



## ИССЛЕДОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ И ВЫНУЖДЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В НЕАВТНОМНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ОТТАЛКИВАЮЩИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*А.П. Гулай, А.В. Бух*

Саратовский государственный университет

В работе исследуются бифуркационные механизмы синхронизации и формирования мультистабильности в системе двух взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля, один из которых находится под внешним гармоническим воздействием. Строится двухпараметрическая бифуркационная диаграмма для системы в фазовом приближении и исследуется ее эволюция при переходе от симметричного к асимметричному отталкивающему взаимодействию. На основании результатов бифуркационного анализа исходной системы делается вывод о соответствии сценариев синхронизации и формирования мультистабильности в системе фазовых осцилляторов таковым в исходной системе с учетом повышения размерности.

*Ключевые слова:* Синхронизация, мультистабильность, бифуркации, асимметричная связь.

### Введение

Явление синхронизации – один из наиболее широко изучаемых феноменов, характерных для взаимодействующих нелинейных систем [1–3]. Синхронизация может наблюдаться как в относительных простых автоколебательных системах, демонстрирующих квазигармонические автоколебания, так и в более сложных системах, для которых может быть характерно квазипериодическое [4–7] и хаотическое поведение [8–11]. На сегодняшний день большое внимание уделяется исследованию явления синхронизации в больших ансамблях и сетях взаимодействующих систем [12, 13]. При исследовании больших ансамблей крайне важную роль играют топология и тип связей между взаимодействующими осцилляторами. Однако влияние типа связи может существенно влиять на бифуркационные сценарии синхронизации и в достаточно простых системах, например, в случае взаимодействия двух квазигармонических осцилляторов.

В рамках данной статьи рассмотрена система двух осцилляторов ван дер Поля, характеризующаяся асимметричным отталкивающим взаимодействием и наличием внешней гармонической силы. С использованием фазового приближения проведен бифуркационный анализ на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего

воздействия» и исследована эволюция бифуркационной структуры пространства параметров при переходе от классического симметричного взаимодействия к асимметричной и отталкивающей связи между фазовыми осцилляторами. Затем исследованы бифуркации в исходной, неукороченной системе и построена карта режимов данной системы на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия». Полученные результаты для исходной системы сравниваются с результатами бифуркационного анализа укороченной системы уравнений для фаз.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 описана исследуемая система и приведены ее укороченные уравнения в фазовом приближении. В разделе 2 представлены и обсуждены результаты бифуркационного анализа укороченной системы на плоскости управляющих параметров. В разделе 3 представлены результаты бифуркационного анализа исходной системы и проводится сравнение с результатами из раздела 2 с учетом понижения размерности. Оценка структуры пространства параметров исходной системы осуществлена путем построения карты режимов и вычисления спектра ляпуновских характеристических показателей. Построенная таким образом карта на плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия» сравнивается с соответствующей двухпараметрической диаграммой укороченной системы. В заключении приведен обзор новых результатов.

### 1. Исследуемая система

Итак, рассмотрим систему двух взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля, один из которых находится под действием внешней гармонической силы,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \gamma_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_0 \cos(\omega_0 t), \\ \ddot{x}_2 - \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \gamma_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x_{1,2}$  – динамические переменные, характеризующие поведение первого и второго осцилляторов, соответственно;  $\varepsilon$  – параметр нелинейности осцилляторов (он имеет идентичные значения для первого и второго осцилляторов);  $\omega_{1,2}$  – собственные частоты первого и второго осцилляторов, соответственно;  $\gamma_{1,2}$  – коэффициенты связи первого осциллятора со вторым и второго осциллятора с первым, соответственно;  $F_0$  – амплитуда внешней гармонической силы;  $\omega_0$  – частота внешнего гармонического воздействия.

Динамика системы (1) достаточно подробно описана в литературе при различных значениях параметров. В отсутствие внешнего воздействия ( $F_0 = 0$ ) и при симметричной связи ( $\gamma_1 = \gamma_2$ ) исследуемая система соответствует классическому случаю двух резистивно связанных генераторов ван дер Поля [1, 3]. В такой системе явление взаимной синхронизации осуществляется посредством двух механизмов: механизма захвата частоты и механизма подавления. Кроме того, система (1) при данных параметрах может демонстрировать явление амплитудной смерти [14]. Хорошо известно, что наблюдаемые в данной системе механизмы синхронизации основаны на двух типах бифуркаций: захват частоты связан с седло-узловой бифуркацией предельных циклов, а подавление – с бифуркацией Неймарка–Сакера. Для бифуркационного анализа данной системы часто используют квазигармоническое приближение, переходя от системы (1) к уравнениям для амплитуд и фаз колебаний. Такой переход позволяет понизить размерность фазового пространства и, соответственно, исследовать бифуркации предельных множеств меньшей размерности.

В этом случае седло-узловой бифуркации предельных циклов в полной системе будет соответствовать седло-узловая бифуркация состояний равновесия, а бифуркации Неймарка–Сакера – бифуркация Андронова–Хопфа.

Внесение внешней гармонической силы ( $F_0 \neq 0$ ) ведет к увеличению размерности фазового пространства на 1 и появлению нового пика в спектре колебаний системы (1) на частоте  $\omega_0$  внешнего воздействия. Относительно недавно были опубликованы результаты бифуркационного анализа такой системы в фазовом приближении [7]. Отметим, что рассмотрение системы (1) в фазовом приближении позволяет оценивать только фазовую динамику и связанные с ней механизмы синхронизации. В этой работе было показано, что система фазовых уравнений демонстрирует, помимо седло-узловой бифуркации состояний равновесия, касательную бифуркацию предельных циклов. Таким образом, в полной системе следует ожидать касательную бифуркацию инвариантных торов. Исследование полной системы [15] и радиофизический эксперимент [16] подтвердили наличие в неукороченной системе сценария синхронизации, найденного в фазовом приближении.

Вопрос влияния асимметричности в канале связи ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ) при наличии внешнего гармонического воздействия ( $F_0 \neq 0$ ) был рассмотрен в работе [17]. Для исследования динамической системы также было использовано фазовое приближение. Было показано, что если коэффициенты связи имеют различные знаки ( $\gamma_1 \cdot \gamma_2 < 0$ ), то в системе фазовых уравнений возможна реализация бифуркации Андронова–Хопфа и появление мультистабильности. Были проведены аналитические исследования фазовых уравнений, продемонстрированы соответствующие фазовые портреты и построены однопараметрические бифуркационные диаграммы. Тем не менее, остались открыты следующие вопросы.

1. Какова бифуркационная структура основного языка синхронизации на плоскости параметров «частота–амплитуда внешнего воздействия»? Как располагаются области мультистабильности в нем?
2. Как эволюционирует бифуркационная структура указанной плоскости параметров при переходе от случая  $\gamma_1 = \gamma_2 > 0$  к случаю  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  и  $F_0 \neq 0$  [17]?
3. Есть ли соответствие между бифуркационной структурой плоскости параметров системы в фазовом приближении и картой режимов неукороченной системы (1) в соответствующей области изменения управляющих параметров?

В следующих разделах делается попытка дать ответы на эти вопросы.

## 2. Фазовое приближение

Воспользуемся методом медленно меняющихся амплитуд (см., например, [1]), чтобы получить уравнения для динамики разностей фаз колебаний первого и второго осцилляторов относительно внешнего воздействия. В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + g_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{F}{1 - \Delta_1} \cos(\varphi_1), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_1 + \delta + g_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\varphi_{1,2}$  – динамические переменные;  $g_{1,2} = \gamma_{1,2}/2$  – коэффициенты связи; параметр  $\Delta_1 = (\omega_1^2 - \omega_0^2) / (2\omega_0)$  определяет отстройку собственной частоты первого осциллятора от внешнего воздействия, а параметр  $\delta = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (2\omega_0)$  определяет расстройку взаимодействующих осцилляторов по собственным частотам.

В работе [17] было показано, что при значениях управляющих параметров  $F = 0.15$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $g_1 = 0.15$ ,  $g_2 = -0.0616$  и вариации параметра расстройки  $\Delta_1$  в системе (2) реализуется бифуркация Андронова–Хопфа, ведущая к возникновению мультистабильности в фазовом пространстве системы. При этом, также было показано, что при другом значении амплитуды внешнего воздействия  $F$  бифуркация Андронова–Хопфа в системе не реализуется.

Зафиксируем управляющие параметры  $\delta$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  и проведем двухпараметрический бифуркационный анализ системы (2) на плоскости параметров  $(\Delta_1, F)$  с помощью программного обеспечения ХРРАuto [18]. Результаты бифуркационного анализа представлены на рис. 1.

На рис. 2 представлена динамика фазовых портретов этой системы при тех же значениях управляющих параметров  $\delta$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  и различных значениях  $\Delta_1$ ,  $F$ . Установим значения  $\Delta_1 = -0.1$ ,  $F = 0.12$ , при которых система (2) имеет фазовый портрет, представленный на рис. 2, а. Здесь 1 и 2 – седловые состояния равновесия, 3 – устойчивый фокус, 4 – неустойчивый фокус. Увеличение параметра  $F$  ведет к пересечению бифуркационной линии  $L_{AH}$ , соответствующей бифуркациям Андронова–Хопфа состояний равновесия 3 и 4, в результате которых в фазовом пространстве образуются устойчивый  $C_s^*$  и неустойчивый  $C_u^*$  предельные циклы, а состояния равновесия 3 и 4 меняют свою устойчивость.

Дальнейшее увеличение параметра  $F$  ведет к увеличению размеров предельных циклов. При этом предельные циклы  $C_s$  и  $C_u$  приближаются к предельным циклам  $C_u^*$  и  $C_s^*$ , соответственно (рис. 2, в). Пересечение линии  $L_{SC}$  на плоскости параметров рис. 1 соответствует касательной бифуркации предельных циклов  $C_s^*$  и  $C_u^*$  и сепаратрис седловых точек 2 и 3, соответственно. Отметим, что в этот же момент происходит касательная бифуркация циклов  $C_s$  и  $C_u$  с петлями сепаратрис седел 3 и 2, соответственно (при этом циклы приближаются к петлям сепаратрис с внешней стороны). В результате описанных касательных бифуркаций предельные циклы исчезают и в системе (2) остаются только состояния равновесия (рис. 2, г).

Выход из области  $B$  в область  $C$  связан с пересечением линии  $L_{SN}$ , соответствующей одновременному возникновению седло-узловой и седло-репеллерной бифуркаций пар состояний равновесия в системе. В результате этих бифуркаций в фазовом пространстве исчезают состояния равновесия и образуется пара предельных циклов (рис. 2, д).

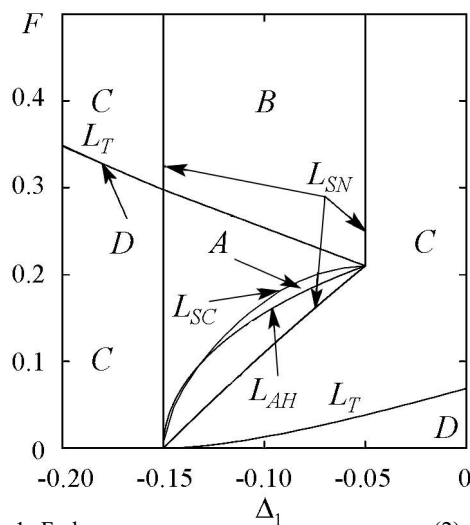


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (2) на плоскости параметров  $(\Delta_1, F)$  при фиксированных значениях  $g_1 = 0.15$ ,  $g_2 = -0.05$ .  $L_{SN}$  – линия седло-узловой бифуркации состояний равновесия;  $L_{AH}$  – линия бифуркации Андронова–Хопфа;  $L_{SC}$  – линия касательной бифуркации предельного цикла и петли сепаратрисы седла;  $L_T$  – седло-узловая бифуркация предельных циклов. A – область существования предельных циклов, возникших в результате бифуркации Андронова–Хопфа; B – область существования состояний равновесия; C – область существования предельных циклов, возникших в результате седло-узловой бифуркации состояний равновесия; D – область существования двухчастотных колебаний

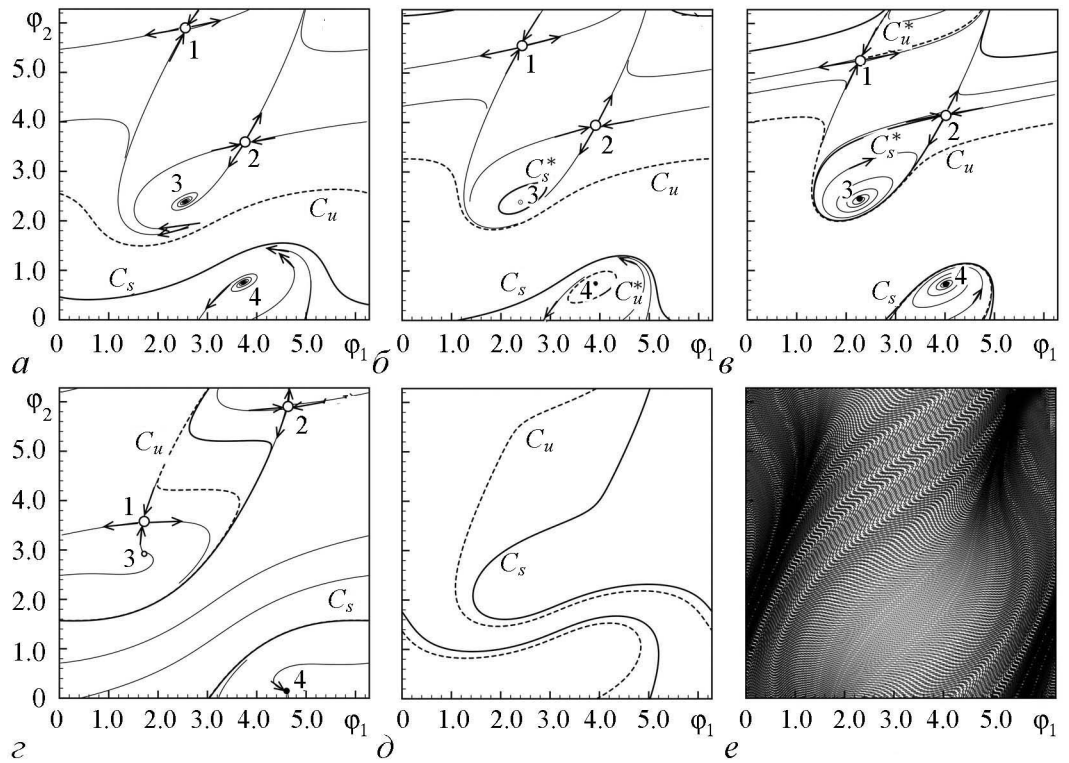


Рис. 2. Фазовые портреты системы (2) при значениях управляющих параметров  $\delta = 0.1$ ,  $g_1 = 0.15$ ,  $g_2 = -0.05$ . 1, 2, 3 и 4 – состояния равновесия;  $C_s$ ,  $C_s^*$  – устойчивые предельные циклы;  $C_u$ ,  $C_u^*$  – седловые предельные циклы. а –  $\Delta_1 = -0.1$ ,  $F = 0.12$ ; б –  $\Delta_1 = -0.1$ ,  $F = 0.15$ ; в –  $\Delta_1 = -0.1$ ,  $F = 0.16$ ; г –  $\Delta_1 = -0.1$ ,  $F = 0.2$ ; д –  $\Delta_1 = -0.072$ ,  $F = 0.15$ ; е –  $\Delta_1 = 0.18$ ,  $F = 0.15$

Переход из области  $C$  в область  $D$  сопровождается касательной бифуркацией предельных циклов, отмеченной линией  $L_T$  на бифуркационной диаграмме. В результате данной бифуркации в системе реализуются двухчастотные колебания, а фазовая траектория покрывает всю фазовую плоскость  $(\phi_1, \phi_2)$  (рис. 2, е). Следует также отметить, что область  $D$  частично заходит в область  $B$ , образуя складку в бифуркационной структуре пространства параметров. Таким образом, в фазовом пространстве реализуется сосуществование двухчастотных колебаний и состояний равновесия, то есть в исходной системе (1) следует ожидать сосуществование предельных циклов и двумерных торов. Данное предположение будет проверено в разделе 3 статьи.

Структура бифуркационной диаграммы, представленной на рис. 1, имеет существенные отличия от бифуркационной диаграммы, полученной ранее для системы (2) при  $\gamma_1 = \gamma_2 > 0$  и опубликованной в статье [7]. Возникает естественный вопрос: как эволюционирует бифуркационная структура пространства параметров системы (2) при переходе к асимметричной отталкивающей связи?

Для ответа на поставленный вопрос зафиксируем значение одного из коэффициентов связи и, меняя значение второго коэффициента, построим три двухпараметрические бифуркационные диаграммы (рис. 3). Из результатов, представленных на рисунке, легко видеть, что внесение асимметричности во взаимодействие между фазовыми осцилляторами ведет к сужению основного языка синхронизации (ср. области  $B$  на рис. 3, а, б). Смена знака одного из коэффициентов связи «разворачивает»

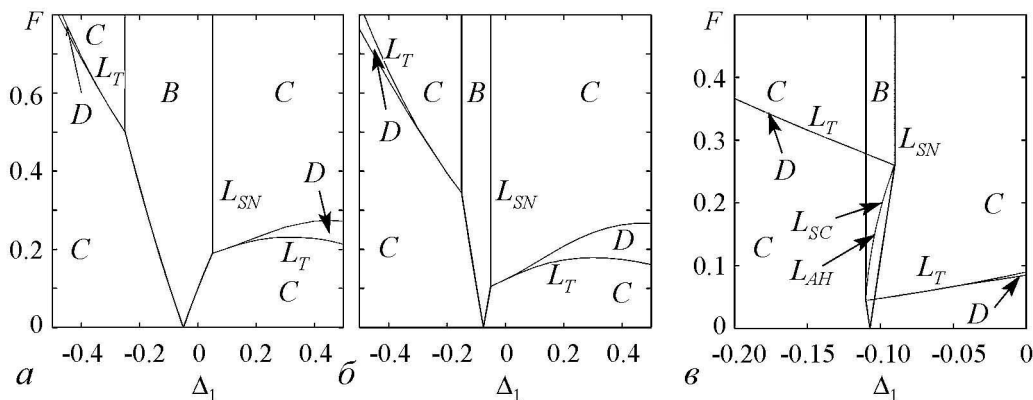


Рис. 3. Эволюция бифуркационной диаграммы системы (2) на плоскости параметров  $(\Delta_1, F)$  при фиксированном значении  $g_1 = 0.15$  и различных значениях  $g_2$ :  $a - 0.05$ ;  $б - (-0.01)$ ;  $в - (-0.05)$ . Обозначения областей и линий те же, что и на рис. 1

основной язык (ср. области  $B$  на рис. 3,  $б, в$ ). При этом бифуркации коразмерности 2, соответствующие точкам касания областей  $B$  и  $D$ , также «разворачиваются», увлекая за собой и области двухчастотных колебаний, которые теперь пересекают область существования состояний равновесия, обуславливая существование мультистабильности в системе (2). При уменьшении одного коэффициента связи, в момент «разворота» области  $B$  (при переходе изменяемого коэффициента связи через нуль), внутри нее образуется новая пара бифуркационных линий  $L_{AH}$  и  $L_{SC}$ , обуславливающих реализацию бифуркации Андронова–Хопфа в системе (2). Обе новые бифуркационные линии соединяют точки бифуркаций коразмерности 2, соответствующие касанию бифуркационных линий  $L_T$  и  $L_{SN}$ .

В следующем разделе будут рассмотрены бифуркации в исходной, неукороченной, системе (1), характерные для случая асимметричной отталкивающей связи, проведены сравнения их с соответствующими бифуркациями в укороченной системе (2) с учетом понижения размерности фазового пространства.

### 3. Полная система

Теперь рассмотрим исходную, неукороченную, систему (1). Исходя из результатов, полученных в фазовом приближении, можно предположить возникновение мультистабильности в виде сосуществования устойчивых двумерного тора и предельного цикла.

Зафиксируем следующие значения управляющих параметров:  $\gamma_1 = 0.09$ ,  $\gamma_2 = -0.02$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 1.001$ ,  $\omega_0 = 0.985$  и, изменяя управляющий параметр  $F_0$ , проследим за бифуркациями, происходящими в системе (1). Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 4,  $a$ . Вход в область синхронизации соответствует седло-узловой бифуркации  $SN_1$ , в результате которой рождается пара предельных циклов: седловой  $C_1$  и устойчивый  $C'_1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $F_0$  происходит пара касательных бифуркаций  $SN_2$  и  $SN_4$  и образуются 4 неустойчивых предельных цикла. Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к касательной бифуркации  $SN_3$  и исчезновению пары неустойчивых циклов  $C'_2$  и  $C_3$ . Таким образом, в фазовом пространстве существуют 4 предельных цикла: один устойчивый  $C'_1$  и три неустойчивых  $C_1, C_2$  и  $C'_3$ . Заметим, что данная ситуация соответствует наблюдаемой ситуации в системе (2) до бифуркации Андронова–Хопфа с учетом понижения размерности (см. рис. 2,  $a$ ).

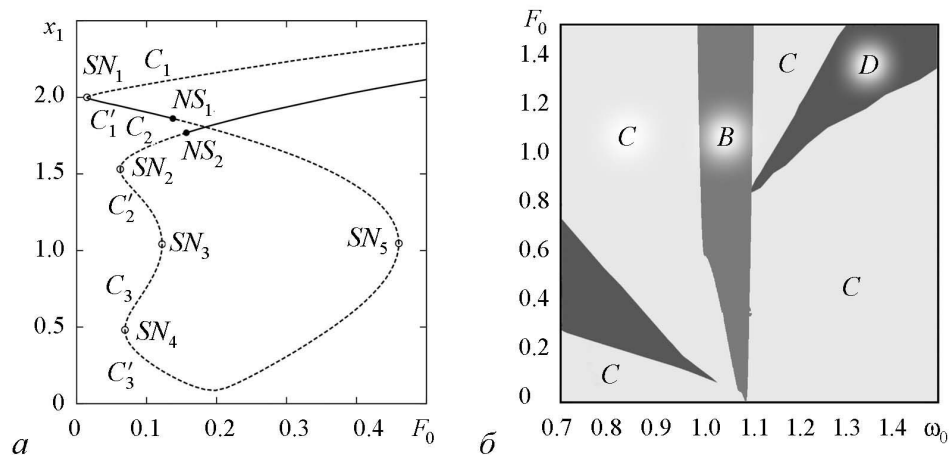


Рис. 4. *a* – бифуркационная диаграмма системы (1) при значениях управляющих параметров:  $\gamma_1 = 0.09$ ,  $\gamma_2 = -0.02$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1.001$ ,  $\omega_0 = 0.985$ .  $SN_{1,2,3,4,5}$  – касательные бифуркации предельных циклов;  $NS_{1,2}$  – бифуркации Неймарка–Сакера;  $C_{1,2,3}$  и  $C'_{1,2,3}$  – предельные циклы. Сплошной линией обозначены устойчивые предельные циклы, пунктирной – седловые предельные циклы. *б* – структура плоскости параметров «частота–амплитуда внешнего воздействия» системы (1), построенная на основании анализа сигнатуры спектра характеристических показателей Ляпунова. *B* – область существования одночастотных колебаний; *C* – область существования двухчастотных колебаний; *D* – область существования трехчастотных колебаний

Пересечению бифуркационной линии  $L_{AH}$  (см. рис. 1) на плоскости параметров системы фазовых уравнений соответствуют бифуркации Неймарка–Сакера в системе (1), отмеченные на бифуркационной диаграмме рис. 4 точками  $NS_1$  и  $NS_2$ . В результате бифуркации  $NS_1$  предельный цикл  $C'_1$  теряет свою устойчивость, и в его окрестности рождается устойчивый двумерный тор. В результате бифуркации  $NS_2$  в окрестности предельного цикла  $C_2$  рождается седловой двумерный тор, а сам предельный цикл приобретает устойчивость. Таким образом, в фазовом пространстве сосуществуют 4 предельных цикла, один из которых является устойчивым, а также устойчивый и неустойчивый двумерные торы. С учетом понижения размерности, это соответствует структуре фазового пространства укороченной системы (2), представленной на рис. 2, б.

Следует отметить, что есть и отличия в структуре как фазового пространства, так и пространства параметров между исходной системой (1) и фазовым приближением (2). Например, возникновение и исчезновение предельных циклов  $C'_2$  и  $C_3$  никак не отражено в бифуркационных сценариях, наблюдаемых в системе (2). Кроме того, если в укороченной системе две бифуркации Андронова–Хопфа происходят при одних и тех же значениях параметров, то в исходной системе (1) точки бифуркаций  $NS_1$  и  $NS_2$  соответствуют различным (хотя и незначительно) величинам амплитуды внешнего воздействия  $F_0$ . Тем не менее, сосуществование устойчивого предельного цикла и двумерного эргодического тора в системе (1), предполагаемое на основании анализа фазового приближения (2) в работе [17], действительно реализуется как следствие соответствующих бифуркаций. Фазовые портреты, иллюстрирующие явление бистабильности в системе (1), представлены на рис. 5.

Изображенная на рис. 4, *a* бифуркационная диаграмма, дает некоторое представление о внутренней структуре основного языка синхронизации в системе (1) для случая асимметричного отталкивающего взаимодействия между осцилляторами. Для того, чтобы сравнить в общих чертах структуру плоскости параметров «частота–амплитуда внешнего воздействия» исходной системы (1) с представленной на рис. 1,

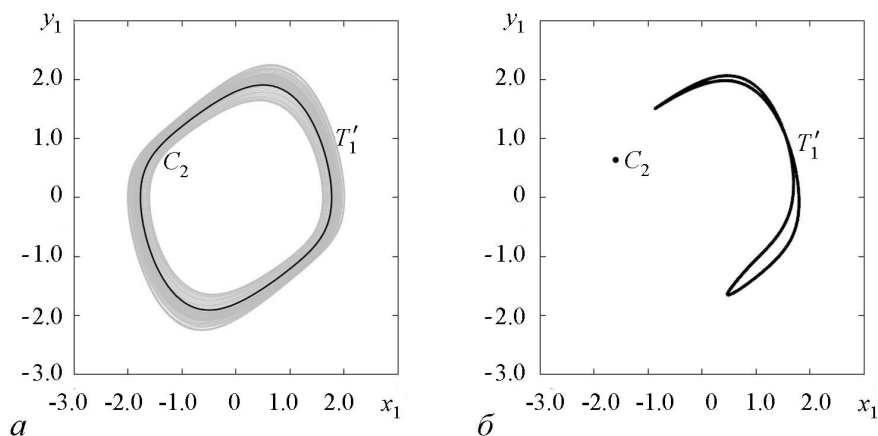


Рис. 5. Фазовые портреты системы (1) при значениях управляющих параметров:  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 0.09$ ,  $\gamma_2 = -0.02$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1.001$ ,  $\omega_0 = 0.985$ ,  $F_0 = 0.158$ .  $C_2$  – устойчивый предельный цикл,  $T_1'$  – устойчивый двумерный тор. *a* – фазовый портрет в непрерывном времени; *б* – стробоскопическое сечение с периодом внешнего воздействия  $2\pi/\omega_0$

обратимся к анализу сигнатуры спектра ляпуновских характеристических показателей. Исходя из того, что режиму со старшим показателем Ляпунова, равным нулю (при остальных отрицательных), соответствует движение на предельном цикле, режиму с двумя старшими показателями, равными нулю, – движение на двумерном эргодическом торе, а режиму с тремя старшими показателями, равными нулю, – движение на трехмерном эргодическом торе, произведем разбиение плоскости параметров (рис. 4, б). Подчеркнем, что в деталях внутренняя структура областей не исследовалась, а лишь определялись границы областей. Тем не менее, представленная на рис. 4, б карта в целом повторяет структуру расположения областей на бифуркационной диаграмме рис. 1. Отметим, что методика, по которой была построена карта на рис. 4, б, не позволила учесть явление мультистабильности, чем объясняется отсутствие сложной внутренней структуры основного языка синхронизации, соответствующего области *B*.

### Заключение

В рамках данной работы рассмотрены особенности синхронизации внешним гармоническим воздействием системы двух осцилляторов ван дер Поля с асимметричным и отталкивающим взаимодействием. Были применены два подхода. С использованием фазового приближения осуществлен детальный двухпараметрический бифуркационный анализ системы фазовых осцилляторов. Для оценки, насколько обнаруженные в фазовом приближении явления соответствуют таковым в исходной динамической системе, был осуществлен бифуркационный анализ неукороченных уравнений и проанализирован спектра характеристических показателей Ляпунова.

Для системы фазовых уравнений построена подробная бифуркационная диаграмма на плоскости параметров, соответствующих амплитуде и частоте внешнего воздействия в исходной системе. Полученная диаграмма позволяет ответить на вопрос, каким образом возникает сценарий формирования мультистабильности, описанный в работе [17]. Кроме того, показана эволюция двухпараметрической бифуркационной диаграммы при переходе от случая симметрично резистивно связанных осцилляторов, описанного в статье [7], к случаю отталкивающей асимметричной связи.



Рассмотрен вопрос соответствия результатов, полученных в фазовом приближении, бифуркационным переходам, демонстрируемым исходной, неукороченной, системой. Явно показано, что бифуркации Андронова–Хопфа, ведущей к формированию мультистабильности в фазовом приближении, соответствует бифуркация Неймарка–Сакера, в результате которой в области значений параметров из основного языка синхронизации сосуществуют устойчивый предельный цикл и устойчивый двумерный эргодический тор. С помощью анализа сигнатуры спектра ляпуновских характеристических показателей проведена оценка структуры плоскости параметров «амплитуда–частота внешнего воздействия». Исходя из этой оценки, можно предположить, что бифуркационная структура плоскости параметров исходной системы в определенной степени соответствует таковой у системы в фазовом приближении с учетом понижения размерности фазового пространства.

Авторы выражают благодарность научному руководителю С.В. Астахову за непосредственную помощь в выполнении работы, а также профессору Ю. Куртсу за плодотворные обсуждения полученных результатов.

### Библиографический список

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
2. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B. et al.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
3. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009.
4. *Izhikevich E.M.* Weakly connected quasi-periodic oscillators, FM interactions, and multiplexing in the brain // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1999. Vol. 59, № 6. P. 2193.
5. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*. 2007. Oct. Vol. 76. P. 046216.
6. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Chaos*. 2008. Vol. 18, № 3. P. 037123.
7. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*. 2009. May. Vol. 86. P. 30003.
8. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progress of Theoretical Physics*. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
9. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Feb. Vol. 64. P. 821.
10. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
11. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Mar. Vol. 76. P. 1804.
12. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. Vol. 410, №6825. P. 268.
13. *Lu J., Zhong J., Tang Y. et al.* Synchronization in output-coupled temporal Boolean networks // *Sci. Rep.* 2014. 09. Vol. 4.
14. *Koseska A., Volkov E., Kurths J.* Oscillation quenching mechanisms: Amplitude vs. oscillation death // *Physics Reports*. 2013. 10. Vol. 531, № 4. P. 173.
15. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух

связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 3. С. 411.

16. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
17. Astakhov S.V., Fujiwara N., Gulay A.P. et al. Hopf bifurcation and multistability in a system of phase oscillators // Phys. Rev. E. 2013. Sep. Vol. 88. P. 032908.
18. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>.

Поступила в редакцию 10.12.2014

## THE STUDY OF MULTISTABILITY AND EXTERNAL SYNCHRONIZATION IN NONAUTONOMOUS SYSTEM OF TWO COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS WITH REPULSIVE COUPLING

*A.P. Gulay, A.V. Buh*

Saratov State University

In this paper we study the bifurcational mechanisms of synchronization and multistability formation in a system of two interacting van der Pol oscillators, one of which is under external harmonic forcing. We draw a two-parametric bifurcation diagram for phase-reduced system and study its evolution in transition from symmetrical to asymmetrical repulsive interaction. Relying on the results of bifurcation analysis of non-reduced system we conclude that the synchronization scenarios found in the phase-reduced system correspond to the ones in the non-reduced system.

*Keywords:* Synchronization, multistability, bifurcations, asymmetrical coupling.



*Гулай Артем Петрович* – родился в 1994 году в городе Акмола, Республика Казахстан. Студент 4 курса физического факультета Саратовского государственного университета. Научные интересы: синхронизация, бифуркационный анализ, мультистабильность.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [gulai.artem@gmail.com](mailto:gulai.artem@gmail.com)



*Бух Андрей Владимирович* – родился в 1993 году в городе Палласовка, Волгоградская область, Россия. Студент 4 курса физического факультета Саратовского государственного университета. Научные интересы: синхронизация, бифуркационный анализ, мультистабильность.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [buh.andrey@yandex.ru](mailto:buh.andrey@yandex.ru)