



САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ И БРИЗЕРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ С БЕСПОРЯДКОМ

А. А. Тихомиров, К. Г. Мишагин, Т. В. Лантева, О. И. Канаков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Проведено сравнительное исследование двух классов решений в цепочечной модели Фрëлиха–Спенсера–Вейна со случайной пространственной неоднородностью (беспорядком): с одной стороны – самолокализованных волновых пакетов, с другой стороны – дискретных бризеров (решений, локализованных в пространстве и периодических во времени). Волновые пакеты получаются численным интегрированием уравнений движения из начальных условий, локализованных на одном узле решётки. При достаточной энергии пакет остается локализованным в пространстве на всём времени наблюдения. Бризерные решения строятся путём продолжения периодической орбиты по параметру взаимодействия, значение которого увеличивается последовательными шагами от нуля, и исследуются на устойчивость в линейном приближении. Показано, что в подавляющем большинстве реализаций беспорядка бризеры существуют и линейно устойчивы на интервале значений параметра связи от нуля до конечного порога, зависящего от реализации; исчезновение дискретного бризера связано с бифуркацией, при которой пара комплексно-сопряжённых мультипликаторов обращается в $+1$; при наличии дискретного бризера самолокализация волновых пакетов зависит от близости (в фазовом пространстве) траектории, соответствующей пакету, к бризерной орбите. Полученные результаты позволяют связать известное явление самолокализации с существованием устойчивых бризерных орбит и объяснить это явление влиянием этих орбит на структуру фазового пространства в их окрестности. Указанные результаты представляют интерес с точки зрения теоретического описания физических систем, характеризующихся одновременно нелинейностью, пространственной дискретностью и беспорядком (бозе-эйнштейновские конденсаты, решётки связанных оптических волноводов, микро- и наномеханические системы и др.).

Ключевые слова: Решёточные системы, локализация, беспорядок, бризеры.

Введение

Последние несколько лет проблема распространения и локализации волн в структурированных средах занимает центральное место в физике колебаний и волн. Этому способствует широкий интерес со стороны теоретической физики конденсированных сред, нелинейной оптики, а также интенсивная экспериментальная работа ведущих лабораторий в этих направлениях. Эти исследования стали возможны благодаря технологическим достижениям в производстве подобных систем (оптических решеток, фотонных кристаллов, решеток волноводов и т.п.), в способах

управления распространением света, в создании ультрахолодных атомарных газов (бозе-эйнштейновских конденсатов). В свою очередь, решение фундаментальных задач физики таких систем видится необходимым условием прогресса в прикладных областях. Основным теоретическим подходом в данной научной проблеме является исследование динамических моделей колебательных решеточных систем.

Одной из причин локализации волн в решеточных системах является наличие пространственного беспорядка, который приводит к экспоненциальной локализации линейных мод – андерсоновской локализации, к отсутствию распространяющихся волн [1]. Открытие этого явления позволило объяснить один из механизмов перехода металл–диэлектрик [2]. В последующие годы было показано, что андерсоновская локализация – фундаментальное волновое явление, наблюдаемое в системах различной природы. Эксперименты продемонстрировали локализацию света слабой интенсивности в фотонных пространственно неоднородных решетках [3–5], локализацию облака бозе-эйнштейновского конденсата невзаимодействующих частиц в оптических решетках с беспорядком [6–9].

Кроме того, локализация волн может происходить и в пространственно однородных решеточных системах в силу их нелинейности. А именно, в таких системах могут существовать дискретные бризеры – строго периодические во времени, локализованные в пространстве колебательные решения [10–12]. Наличие таких траекторий в многомерном фазовом пространстве системы оказывает сильное влияние на его структуру в целом; в переходных и равновесных режимах в численном эксперименте наблюдается формирование локализованных структур с конечным (в отличие от точных дискретных бризеров), но большим временем жизни [13]. Также примером пространственно локализованных, но непериодических во времени решений являются квазибризеры, введенные в рассмотрение и исследованные на примере различных физических моделей в работах [14–16]. Аналогичный эффект реализуется и в пространстве нормальных мод слабонелинейных колебательных систем: существование время-периодических решений (q -бризеров), локализованных в модовых переменных, приводит к долговременной модовой локализации других (непериодических) решений в их окрестности [17, 18] (в этом состоит одна из интерпретаций известной проблемы Ферми–Пасты–Улама). Существуют экспериментальные свидетельства возникновения локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках [19], решетки связанных нелинейных оптических волноводов [20], ансамбли микромеханических осцилляторов [21].

Однако в большинстве физических систем имеется и пространственный беспорядок, и нелинейность, что делает проблему исследования локализации волн исключительно сложной и многогранной.

Отметим, что в слабонелинейных решетках с беспорядком в теоретических и численных работах получены значительные результаты в исследовании проблемы андерсоновской локализации. Показана деструктивная роль нелинейности в андерсоновской локализации, обнаружено субдиффузионное расплывание изначально локализованных волновых пакетов [22–26]. Получены численные характеристики субдиффузии, установлено существование различных динамических режимов распространения волновых пакетов: слабого и сильного хаоса [22, 24–28]. Предложен вероятностный подход к решению проблемы разрушения андерсоновской локализации сколь угодно малой нелинейностью в средах с пространственным беспорядком [29].

Опубликованы первые экспериментальные работы по локализации взаимодействующих ультрахолодных атомарных конденсатов в неоднородных оптических решетках, в которых подтвердился ряд теоретических результатов. Например, в работе [30] экспериментально показано, что нелинейное взаимодействие приводит к субдиффузионному распространению волновых пакетов атомов.

Вместе с тем, необходимо констатировать существенный пробел в понимании волновой динамики в случае сильной нелинейности. В экспериментальных работах по распространению света высокой интенсивности в фотонных решетках с беспорядком отмечен, но не изучен детально так называемый эффект «самолокализации» начального возбуждения (англ. «self-trapping») [4, 31, 32]. В этом случае волновой пакет либо начинает диффундировать только после длительных локализованных колебаний, либо его существенная часть вообще остается локализованной в течение всего времени наблюдения. Имеются все основания ожидать, что аналогичные эффекты будут вскоре обнаружены и в экспериментах с бозе-эйнштейновскими конденсатами.

В численных экспериментах самолокализация также была отмечена, но детально не исследована [24–26, 28, 33, 34]. Теоретические соображения позволяют предположить, что самолокализация обусловлена нелинейными свойствами среды и ограниченностью линейного спектра задачи. Однако, помимо оценки значений нелинейности (или силы беспорядка), достаточных для самолокализации, другие количественные характеристики данного эффекта и его влияния на расплывание волновых пакетов отсутствуют.

Как отмечалось ранее, периодические во времени бризерные решения оказывают влияние на структуру фазового пространства в их окрестности, что приводит к существованию долгоживущих локализованных структур. Можно предположить, что явление самолокализации обусловлено именно этим механизмом. Теорема о существовании дискретных бризеров доказана для гамильтоновых нелинейных пространственно однородных решеточных систем весьма общего вида [35, 36] и сохраняет применимость в случае решеток с пространственным беспорядком [37]. В качестве основного её условия выступает отсутствие резонансов частоты бризера с парциальными частотами осцилляторов. При наличии жёсткой нелинейности (приводящей к росту частоты решения с увеличением энергии) выполнение этого условия обеспечивается для решений, имеющих достаточно большую энергию. Систематические исследования порогов существования и устойчивости таких решений, однако, отсутствуют. Также неизвестно, как эти пороги соотносятся с порогами самолокализации волновых пакетов.

В данной работе исследование механизмов самолокализации проведено путем сравнительного анализа порогов делокализации волновых пакетов и существования дискретных бризеров. Показано, что в пространственно неоднородных решетках осцилляторов эффект самолокализации, возникающий в условиях сильной нелинейности, определяется существованием и устойчивостью дискретных бризеров.

1. Модель

В данной работе численно исследуются условия самолокализации волновых пакетов в цепочечной модели Фрëлиха–Спенсера–Вейна [38], описываемой уравнением

$$\ddot{x}_n + \omega_n^2 x_n + \alpha x_n^3 = \gamma (x_{n+1} - x_n)^3 + \gamma (x_{n-1} - x_n)^3, \quad n = 1 \dots N, \quad (1)$$

где граничные условия – нулевые ($x_0 = x_{N+1} = 0$), ω_n – собственные частоты осцилляторов, составляющих цепочку, α – параметр нелинейности осциллятора, γ – сила нелинейной связи. С помощью замены переменных система (1) всегда может быть сведена к случаю $\alpha = 1$, что и подразумевается в дальнейшем. Следуя [24–26], введем пространственный беспорядок, полагая квадраты собственных частот ω_n^2 независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[1/2; 3/2]$, причем для центрального узла (на котором, собственно, исследуется самолокализация) полагается $\omega_n^2 = 1$. В силу чисто нелинейных связей, линейные моды системы компактны (представляют собой независимые колебания отдельно взятых осцилляторов), а собственные частоты совпадают с частотами осцилляторов ω_n .

2. Методы

Для отыскания бризерных решений был использован метод продолжения точных периодических решений из антиконтинуального предела. На этом подходе основано как конструктивное доказательство существования дискретных бризеров [36], так и методы численного отыскания таких решений [37, 39]. В данном методе в качестве стартового приближения используется известное тривиальное локализованное решение в системе без взаимодействия, где один (далее – «центральный») осциллятор совершает колебания, остальные же находятся в покое. Значение параметра взаимодействия увеличивается последовательными шагами от нуля. На каждом шаге отыскивается периодическое решение, при этом в качестве начального приближения используется решение, найденное на предшествующем шаге. Периодическое решение ищется как неподвижная точка отображения Пуанкаре. Секущая Пуанкаре задается условием обращения в нуль обобщенной координаты центрального осциллятора. Для обеспечения единственности искомого решения поиск производится при дополнительном условии заданной энергии решения.

Поиск неподвижной точки отображения Пуанкаре осуществляется путём минимизации нормы невязки по методу Левенберга–Марквардта [40] с численной аппроксимацией якобиана. В качестве неизвестных, по которым осуществляется минимизация, выступают скорости всех осцилляторов, кроме центрального. Значения остальных фазовых переменных определяются следующими условиями: координата центрального осциллятора равна нулю по условию секущей; координаты всех остальных осцилляторов также полагаются обращающимися в нуль в момент пересечения решением секущей (этим предположением дополнительно ограничивается класс искомых решений, см. обсуждение ниже); скорость центрального осциллятора выражается из условия заданной энергии искомого решения. Таким образом, количество неизвестных, по которым осуществляется минимизация, составляет $N - 1$. Такое сокращение размерности задачи минимизации (по сравнению с полной размерностью секущей Пуанкаре, составляющей $2N - 1$) позволяет существенно снизить вычислительные затраты и улучшить сходимость метода.

Предположение об обращении в нуль координат *всех* осцилляторов при пересечении решением секущей (то есть, одновременно с обращением в нуль координаты *центрального* осциллятора) обосновывается следующим рассуждением. В самом деле, для стартового приближения (решения с единственным колеблющимся осциллятором в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов) оно выполняется автома-

тически. Далее, в силу чётности потенциальной энергии, описывающей модель (1), те решения, которые *не удовлетворяют* этому предположению (то есть, характеризуются ненулевыми значениями координат в момент пересечения секущей), могут существовать только парами, симметричными относительно смены знака всех координат. При непрерывном продолжении решения по параметру, такие парные решения могут возникать в окрестности продолжаемого решения только в результате бифуркаций типа «вилка». Таким образом, рассматриваемое предположение, ограничивая класс искомых решений, при этом не ограничивает возможность продолжения решения по параметру, а наоборот, устраняя неединственность продолжаемого решения в точках возможных бифуркаций типа «вилка» (за счёт исключения из рассмотрения рождающейся симметричной пары дополнительных решений), позволяет преодолевать точки таких бифуркаций при продолжении решения.

Аналогичный подход, основанный на продолжении по параметру и минимизации нормы невязки в отображении Пуанкаре при дополнительных условиях, задающих подмногообразие сокращённой размерности внутри секущей Пуанкаре (таких, как условие заданной энергии и условия одновременного обращения в нуль всех координат либо всех скоростей) применялся ранее при построении q -бризеров [17, 18].

Во многом схожие подходы, подразумевающие минимизацию определённой целевой функции в пространстве начальных условий, применялись для построения движущихся бризеров [41] и уточнения квазibriзеров [16] (в последнем случае также использовалось сокращение размерности задачи минимизации для уменьшения вычислительных затрат).

Значение нормы невязки, достигнутое в результате минимизации, контролируется на каждом шаге по параметру, благодаря чему исключается попадание в ненулевые локальные экстремумы целевой функции (нормы невязки). Величина шага по параметру варьируется адаптивно. В случае, если очередной шаг по параметру не приводит к отысканию бризерного решения (метод Левенберга–Марквардта расходится либо сходится к ненулевому экстремуму), производится возврат к последнему успешно найденному решению и последовательное дробление шага по параметру. Продолжение решения прекращается (решение считается исчезнувшим), когда величина шага в результате дроблений достигает заданного минимального значения, составляющего 10^{-8} . Если же в результате очередного дробления шага решение успешно продолжается, и удаётся преодолеть то значение параметра, на котором решение ранее (перед последним дроблением шага) было потеряно (плюс «запас», составляющий пятикратную величину шага перед последним дроблением), то восстанавливается величина шага, использованная перед последним дроблением.

Найденное периодическое решение исследуется на устойчивость путем расчета и диагонализации матрицы Флоке. В силу гамильтоновости системы, все мультипликаторы орбиты представлены комплексно-сопряжёнными парами, а в случае наличия значений, не лежащих на единичной окружности, такие значения всегда представлены парами, дающими единицу при перемножении. Асимптотическая устойчивость в таких системах невозможна, поэтому говорят лишь об «устойчивости в линейном приближении», когда все мультипликаторы лежат на единичной окружности. Это свойство не связано ни с устойчивостью по Ляпунову, ни с орбитальной устойчивостью, но характеризует поведение решений (наличие или отсутствие экспоненциального нарастания отклонений) вблизи дискретного бризера.

Вышеописанный алгоритм был реализован на языке программирования интегрированной среды научных вычислений *Scilab* с использованием библиотеки стандартных функций среды. В частности, использована входящая в состав *Scilab* реализация метода Левенберга–Марквардта с масштабированием переменных, изначально опубликованная в составе библиотеки *Minpack* [42].

3. Результаты

При помощи вышеописанного метода в цепочке (1) из $N = 499$ осцилляторов при значениях параметра связи в интервале $\gamma \in (0, 1)$ были найдены периодические локализованные решения, центр которых находится в центре цепочки. Искались решения, имеющие энергии $E = 1$, $E = 10$ (для 500 различных реализаций пространственного беспорядка), $E = 50$ (для 280 реализаций). Для оценки характерной ширины найденных решений было использовано «число возбуждения» [24–26]

$$P = \frac{(\sum_n \varepsilon_n)^2}{\sum_n \varepsilon_n^2}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + \frac{\omega_n^2 x_n^2}{2} + \frac{\alpha x_n^4}{4} + \frac{1}{8} [(x_{n-1} - x_n)^4 + (x_{n+1} - x_n)^4] \quad (3)$$

является энергией n -го осциллятора.

Для указанных значений энергии и для всех реализаций беспорядка полученные значения чисел возбуждения точками отмечены на плоскости параметров, где по горизонтальной оси отложена сила связи γ , а по вертикальной – число возбуждения P (рис. 1). Заметим, что с увеличением силы связи характерная ширина бризеров растет, но тем не менее остается порядка 1...2, то есть найденные решения сохраняют хорошую локализацию. В подавляющем большинстве реализаций¹ эти решения являются устойчивыми либо слабо неустойчивыми (модули численно найденных значений мультипликаторов отличаются от единицы не более, чем на 10^{-5}). Исключение составляют 1, 3 и 6 реализации при $E = 1$, 10, 50, соответственно, где наблюдается потеря устойчивости бризера (отличие мультипликатора от единицы более чем на 10^{-5} по модулю). В силу их маловероятности, режимы с неустойчивыми бризерами детально не исследовались и рассматривались наравне со случаями, где бризер не существует.

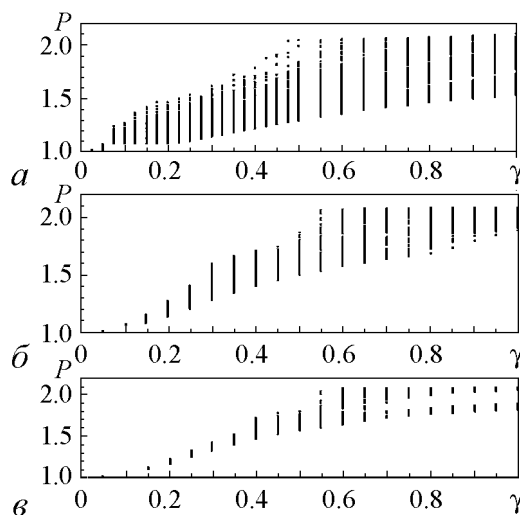


Рис. 1. Числа возбуждения P дискретных бризеров в зависимости от параметра взаимодействия γ при $E = 1$ (а), 10 (б), 50 (в)

¹Напомним, что в качестве «реализации беспорядка», вообще говоря, может выступать любая последовательность $\omega_n^2 \in [1/2; 3/2]$. Например, частным случаем может быть и пространственно однородная система. Поэтому все утверждения, зависящие от реализации беспорядка, могут носить лишь вероятностный характер.

При продолжении бризерного решения по параметру связи γ для большинства реализаций беспорядка бризер перестает существовать при превышении некоторого порогового значения. На рис. 2 в зависимости от силы связи показаны доли числа реализаций беспорядка (от общего их количества), при которых в центре цепочки существует бризер (устойчивый или слабо неустойчивый). Видно, что чем больше энергия найденных бризеров, тем выше лежит соответствующий этой энергии график. Таким образом, пороги существования бризеров (по параметру связи), как правило, возрастают с увеличением энергии.

Во всех случаях исчезновение дискретного бризера оказалось обусловленным бифуркацией, при которой пара комплексно-сопряженных мультипликаторов обращается в единицу (для динамической системы общего вида такая бифуркация имела бы коразмерность 2; в классе гамильтоновых систем, в силу упомянутой ранее структуры спектра мультипликаторов, она имеет коразмерность 1). Во всех случаях, когда решение при продолжении по параметру терялось без выполнения этого условия, его удавалось всё же продолжить вплоть до указанной бифуркации путём адаптивного дробления шага по параметру.

Динамика волновых пакетов исследовалась для тех же реализаций беспорядка (для которых найдены бризерные решения) путем численного моделирования

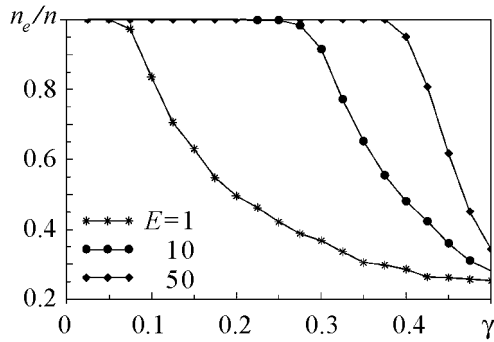


Рис. 2. Зависимость долей реализаций беспорядка, при которых существует бризерное решение, от силы связи γ между осцилляторами для трех значений энергии E

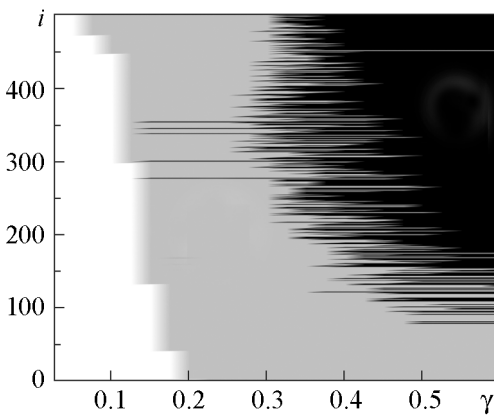


Рис. 3. Связь между существованием бризеров (белая и серая области) и самолокализацией волновых пакетов (только белая область) при $E = 10$

системы (1) из начальных условий, локализованных в центре цепочки: центральному осциллятору при нулевой начальной координате сообщалась начальная скорость $\dot{x} = \sqrt{2E}$; начальные координаты и скорости всех остальных осцилляторов принимались равными нулю. Для количественного анализа полученных результатов ширина волнового пакета оценивалась путем подсчета числа возбуждения $P = P(t_f)$ (см. уравнение (2)) в конечный момент времени $t_f = 10^8$. Пакет считался хорошо локализованным, если для него $P(t_f) \lesssim 2$. Данный критерий является приблизительным и рассчитан из условия, что не менее 50% от начальной энергии остаются локализованными в пределах локализационного объема [29]. Отметим, что для различных энергий системы при увеличении параметра нелинейной связи происходит постепенное уменьшение доли самолокализованных волновых пакетов от близких к 1 до близких к 0 значений.

Рис. 3 иллюстрирует связь между существованием бризерных решений и самолокализацией волновых пакетов. Здесь для энергии $E = 10$ на

плоскости параметров силы связи γ и «номера» реализации беспорядка i (уточним, что реализации были отсортированы по возрастанию числа возбуждения P) обозначены следующие области: белая – одновременное существование как бризерных решений, так и самолокализации волновых пакетов; серая – существование бризерных решений и отсутствие самолокализованных волновых пакетов; чёрная – отсутствие как бризерных решений, так и самолокализованных волновых пакетов.

Из представленных результатов следует, что самолокализация наблюдается только при существовании бризерного решения, локализованного на «центральном» осцилляторе, которому в эволюционном эксперименте сообщается начальная энергия. Отсутствие самолокализации при наличии бризера можно объяснить тем, что начальные условия, использованные для получения волнового пакета, не попадают в некоторую (не известную заранее) окрестность бризера в фазовом пространстве, занятую самолокализующимися решениями. Чтобы подтвердить это предположение, для одной из реализаций беспорядка был проведен численный эксперимент, в котором начальные условия получались линейной интерполяцией с переменными весами между бризерным решением и точечным возбуждением центрального узла

$$x_n(0) = 0, \quad v_n(0) = (1 - s)\delta_{l,n}\sqrt{2E} + sv_n^b, \quad (4)$$

где v_n^b – скорости бризерного решения в момент, когда все его координаты x_n^b равны нулю; параметр s пробегает значения $0 \leq s \leq 1$. На рис. 4 показаны зависимости логарифма числа возбуждения волнового пакета в конечный момент наблюдения от параметра s для трех значений силы связи: $\gamma = 0.1$ из белой области на рис. 3, $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.25$ из серой области на рис. 3. Пунктирная линия показывает значение $P = 2.0$, используемое как критерий самолокализации волновых пакетов. Как и следовало ожидать, для $\gamma = 0.1$ при всех значениях s волновой пакет является самолокализованным. Для $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.25$ при малых значениях s волновой пакет оказывается делокализованным. При увеличении s , то есть при приближении начальных условий к бризерному решению, начиная с некоторого порогового значения происходит резкое уменьшение числа возбуждения, что означает локализацию волнового пакета.

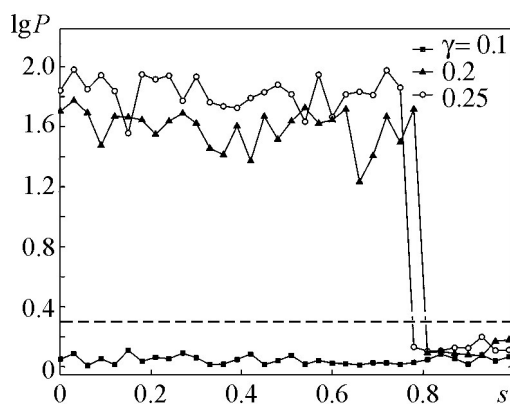


Рис. 4. Изменение логарифма числа возбуждения волнового пакета P при линейной интерполяции начальных условий между точечным возбуждением ($s = 0$) и бризерным решением ($s = 1$)

Заключение

Были исследованы условия самолокализации волновых пакетов, существования и устойчивости бризерных решений, локализованных в пространстве и периодических во времени, а также связи между этими условиями, для модели Фрёлиха–Спенсера–Вейна. Для разных реализаций пространственного беспорядка пороги де-

локализации волновых пакетов и исчезновения бризеров в центре цепочки различаются. При увеличении параметра нелинейной связи происходит постепенное и согласованное уменьшение долей самолокализованных волновых пакетов и продолжаемых дискретных бризеров.

Из представленных результатов следует, что самолокализация решения вблизи некоторого узла имеет место при условии существования бризерного решения, локализованного на том же узле. Множество начальных условий, приводящих к самолокализации, расположено в некоторой окрестности бризерного решения. В определенном диапазоне значений параметра связи это множество включает начальные условия типа «точечного возбуждения» – в этом случае наблюдается самолокализация пакета, эволюционирующего из таких начальных условий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-02-31432.

Библиографический список

1. *Evers F. and Mirlin A.* Anderson transitions // *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. 1355.
2. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Physical Review.* 1958. Vol. 109. P. 1492.
3. *Schwartz T., Bartal G., Fishman S., and Segev M.* Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices // *Nature.* 2007. Vol. 446. P. 52.
4. *Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Christodoulides D.N., and Silberberg Y.* Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices // *Physical Review Letters.* 2008. Vol. 100. 013906.
5. *Segev M., Silberberg Y., and Christodoulides D.N.* Anderson localization of light // *Nature Photonics.* 2013. Vol. 7. P. 197.
6. *Billy J., Josse V., Zuo Z., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clement D., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., and Aspect A.* Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder // *Nature.* 2008. Vol. 453. P. 891.
7. *Roati G., D'Errico C., Fallani L., Fattori M., Fort C., Zaccanti M., Modugno G., Modugno M., and Inguscio M.* Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate // *Nature.* 2008. Vol. 453. 895898.
8. *Kondov S.S., McGehee W.R., Zirbel J.J., and DeMarco B.* Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter // *Science.* 2011. Vol. 334. P. 66.
9. *Jendrzejewski F., Bernard A., Muller K., Cheinet P., Josse V., Piraud M., Pezze L., Sanchez-Palencia L., Aspect A., and Bouyer P.* Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential // *Nature Physics.* 2012. Vol. 8. P. 398.
10. *Flach S. and Gorbach A.* Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // *Int. J. Bif. Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 1645.
11. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete breathers // *Physics Reports.* 1998. Vol. 295. P. 181.
12. *Flach S. and Gorbach A.* Discrete breathers – advances in theory and applications // *Physics Reports.* 2008. Vol. 467. P. 1.
13. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., and Flach S.* Discrete breathers in

- transient processes and thermal equilibrium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 198. P. 120.
14. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, № 3. 036608.
 15. *Chechin G.M. and Dzhelauhova G.S.* Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322, № 3. P. 490.
 16. *Chechin G.M. and Lobzenko I.P.* Ab initio refining of quasibreathers in graphane // *Letters on materials*. 2014. Vol. 4, № 4. P. 226.
 17. *Flach S., Ivanchenko M.V., and Kanakov O.I.* q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, № 6. P. 064102.
 18. *Flach S., Kanakov O.I., Mishagin K.G., and Ivanchenko M.V.* q-Breathers in FPU-lattices – scaling and properties for large systems // *International Journal of Modern Physics B*. 2007. Vol. 21, (23n24). P. 3925.
 19. *Sato M. and Sievers A.J.* Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // *Nature*. 2004. Vol. 432. P. 486.
 20. *Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., and Christodoulides D.N.* Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 023902.
 21. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., and Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 044102.
 22. *Pikovskiy A.S. and Shepelyansky D.L.* Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 094101.
 23. *Veksler H., Krivolapov Y., and Fishman S.* Spreading for the generalized nonlinear Schrödinger equation with disorder // *Physical Review E*. 2009. Vol. 80. 037201.
 24. *Flach S., Krimer D.O., and Skokos Ch.* Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. 024101.
 25. *Skokos Ch., Krimer D.O., Komineas S., and Flach S.* Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 056211.
 26. *Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems // *Europhys. Lett.* 2010. Vol. 91. 30001.
 27. *Flach S.* Spreading of waves in nonlinear disordered media // *Chemical Physics*. 2010. Vol. 375. P. 548.
 28. *Bodyfelt J.D., Laptyeva T.V., Gligoric G., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* Wave interactions in localizing media – a coin with many faces // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21. 2107.
 29. *Ivanchenko M.V., Laptyeva T.V., and Flach S.* Anderson localization or nonlinear waves: A matter of probability // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. 240602.
 30. *Lucioni E., Deissler B., Tanzi L., Roati G., Zaccanti M., Modugno M., Larcher M., Dalfovo M., Inguscio M., and Modugno G.* Observation of subdiffusion in a disordered interacting system // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106. 230403.
 31. *Pertsch T., Peschel U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Tünnermann A.,*

- and Lederer F.* Nonlinearity and disorder in fiber arrays // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 053901.
32. *Naether U., Heinrich M., Lahini Y., Nolte S., Vicencio R.A., Molina M.I., and Szameit A.* Self-trapping threshold in disordered nonlinear photonic lattices // *Optics Letters*. 2013. Vol. 38. P. 1518.
 33. *Vicencio R.A. and Flach S.* Control of wave packet spreading in nonlinear finite disordered lattices // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 016217.
 34. *Naether U., Martínez A.J., Guzmán-Silva D., Molina M.I., and Vicencio R.A.* Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062914.
 35. *Albanese C. and Fröhlich J.* Perturbation theory for periodic orbits in a class of infinite dimensional Hamiltonian systems // *Communications in Mathematical Physics*. 1991. Vol. 138. P. 193.
 36. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623.
 37. *Kopidakis G. and Aubry S.* Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 130. P. 155.
 38. *Fröhlich J., Spencer T., and Wayne C.E.* Localization in disordered, nonlinear dynamical systems // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 42. P. 247.
 39. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9, № 6. P. 1501.
 40. *Moré J.J.* The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // *In Numerical analysis*. 1978. Springer. P. 105.
 41. *Лобзенко И.Б., Чечин Г.М.* Численное моделирование движущихся дискретных бризеров в монокристаллических цепочках // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2013. Т. 4, № 1. С. 67.
 42. *Moré J.J., Sorensen D.C., Hillstrome K.E., and Garbow B.S.* The MINPACK project // *Sources and Development of Mathematical Software*. 1984. P. 88.

Поступила в редакцию 16.11.2015

SELF-TRAPPING AND BREATHERS IN DISORDERED NONLINEAR OSCILLATORY LATTICES

A. A. Tikhomirov, K. G. Mishagin, T. V. Lapyeva, O. I. Kanakov

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

We present a comparative study of two classes of solutions to Fröhlich–Spencer–Wayne chain model with random spatial inhomogeneity (disorder): self-trapped wave packets on one hand, and discrete breathers (localized in space, time-periodic solutions) on the other. Wave packets are obtained by numerical integration of dynamical equations with single-site initial conditions. When given sufficient energy, the packet remains localized in space throughout the observation time. Breather solutions are constructed by continuation of a periodic orbit with coupling parameter increased from zero in successive small steps.

Found solutions are examined for linear stability. We demonstrate that the great majority of disorder realizations exhibit linearly stable breathers on an interval of coupling parameter values from zero up to a finite realization-dependent threshold. The disappearance of a discrete breather is associated with the bifurcation in which a complex-conjugate pair of Floquet multipliers becomes equal to $+1$. When a discrete breather exists, self-trapping of wave packets depends upon the proximity of the corresponding trajectory in the phase space to the breather orbit. These observations allow us to associate the well-known self-trapping effect with the existence of stable breather orbits and to explain this effect by the influence of breather orbits upon the phase space structure in their neighbourhood. The presented results are of interest for developing the theoretical description of physical systems characterized by the simultaneous presence of nonlinearity, spatial discreteness and disorder (Bose–Einstein condensates, lattices of coupled optical waveguides, micro- and nanomechanical systems etc.).

Keywords: Lattices, localization, disorder, breathers.

References

1. *Evers F. and Mirlin A.* Anderson transitions // *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. 1355.
2. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Physical Review*. 1958. Vol. 109. P. 1492.
3. *Schwartz T., Bartal G., Fishman S., and Segev M.* Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices // *Nature*. 2007. Vol. 446. P. 52.
4. *Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Christodoulides D.N., and Silberberg Y.* Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 013906.
5. *Segev M., Silberberg Y., and Christodoulides D.N.* Anderson localization of light // *Nature Photonics*. 2013. Vol. 7. P. 197.
6. *Billy J., Josse V., Zuo Z., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clement D., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., and Aspect A.* Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder // *Nature*. 2008. Vol. 453. P. 891.
7. *Roati G., D’Errico C., Fallani L., Fattori M., Fort C., Zaccanti M., Modugno G., Modugno M., and Inguscio M.* Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate // *Nature*. 2008. Vol. 453. 895898.
8. *Kondov S.S., McGehee W.R., Zirbel J.J., and DeMarco B.* Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter // *Science*. 2011. Vol. 334. P. 66.
9. *Jendrzejewski F., Bernard A., Muller K., Cheinet P., Josse V., Piraud M., Pezze L., Sanchez-Palencia L., Aspect A., and Bouyer P.* Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential // *Nature Physics*. 2012. Vol. 8. P. 398.
10. *Flach S. and Gorbach A.* Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // *Int. J. Bif. Chaos*. 2006. Vol. 16. P. 1645.
11. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete breathers // *Physics Reports*. 1998. Vol. 295. P. 181.
12. *Flach S. and Gorbach A.* Discrete breathers – advances in theory and applications

// Physics Reports. 2008. Vol. 467. P. 1.

13. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., and Flach S.* Discrete breathers in transient processes and thermal equilibrium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 198. P. 120.
14. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, № 3. 036608.
15. *Chechin G.M. and Dzhelauhova G.S.* Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322, № 3. P. 490.
16. *Chechin G.M. and Lobzenko I.P.* Ab initio refining of quasibreathers in graphane // *Letters on materials*. 2014. Vol. 4, № 4. P. 226.
17. *Flach S., Ivanchenko M.V., and Kanakov O.I.* q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, № 6. P. 064102.
18. *Flach S., Kanakov O.I., Mishagin K.G., and Ivanchenko M.V.* q-Breathers in FPU-lattices – scaling and properties for large systems // *International Journal of Modern Physics B*. 2007. Vol. 21, (23n24). P. 3925.
19. *Sato M. and Sievers A.J.* Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // *Nature*. 2004. Vol. 432. P. 486.
20. *Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., and Christodoulides D.N.* Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 023902.
21. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., and Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 044102.
22. *Pikovskiy A.S. and Shepelyansky D.L.* Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 094101.
23. *Veksler H., Krivolapov Y., and Fishman S.* Spreading for the generalized nonlinear Schrödinger equation with disorder // *Physical Review E*. 2009. Vol. 80. 037201.
24. *Flach S., Krimer D.O., and Skokos Ch.* Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. 024101.
25. *Skokos Ch., Krimer D.O., Komineas S., and Flach S.* Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 056211.
26. *Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems // *Europhys. Lett.* 2010. Vol. 91. 30001.
27. *Flach S.* Spreading of waves in nonlinear disordered media // *Chemical Physics*. 2010. Vol. 375. P. 548.
28. *Bodyfelt J.D., Laptyeva T.V., Gligoric G., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* Wave interactions in localizing media – a coin with many faces // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21. 2107.
29. *Ivanchenko M.V., Laptyeva T.V., and Flach S.* Anderson localization or nonlinear waves: A matter of probability // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. 240602.
30. *Lucioni E., Deissler B., Tanzi L., Roati G., Zaccanti M., Modugno M., Larcher M., Dalfovo M., Inguscio M., and Modugno G.* Observation of subdiffusion in a disor-

- dered interacting system // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106. 230403.
31. *Pertsch T., Peschel U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Tünnermann A., and Lederer F.* Nonlinearity and disorder in fiber arrays // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 053901.
 32. *Naether U., Heinrich M., Lahini Y., Nolte S., Vicencio R.A., Molina M.I., and Szameit A.* Self-trapping threshold in disordered nonlinear photonic lattices // *Optics Letters*. 2013. Vol. 38. P. 1518.
 33. *Vicencio R.A. and Flach S.* Control of wave packet spreading in nonlinear finite disordered lattices // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 016217.
 34. *Naether U., Martínez A.J., Guzmán-Silva D., Molina M.I., and Vicencio R.A.* Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062914.
 35. *Albanese C. and Fröhlich J.* Perturbation theory for periodic orbits in a class of infinite dimensional Hamiltonian systems // *Communications in Mathematical Physics*. 1991. Vol. 138. P. 193.
 36. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623.
 37. *Kopidakis G. and Aubry S.* Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 130. P. 155.
 38. *Fröhlich J., Spencer T., and Wayne C.E.* Localization in disordered, nonlinear dynamical systems // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 42. P. 247.
 39. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9, № 6. P. 1501.
 40. *Moré J.J.* The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // In *Numerical analysis*. 1978. Springer. P. 105.
 41. *Lobzenko I.P., Chechin G.M.* Numerical simulations of mobile discrete breathers in monoatomic chains // *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. 2013. Vol. 4, № 1. P. 67. (In Russian).
 42. *Moré J.J., Sorensen D.C., Hillstom K.E., and Garbow B.S.* The MINPACK project // *Sources and Development of Mathematical Software*. 1984. P. 88.



Тихомиров Андрей Александрович – родился в Нижнем Новгороде (1988), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2013), поступил в аспирантуру на кафедру теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов: нелинейные колебания и волны, волновые неустойчивости, решеточные системы, дискретные бризеры. Является соавтором 3 научных статей по указанным выше направлениям.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: andreynn2006@yandex.ru



Мишагин Константин Геннадьевич – родился в Нижнем Новгороде (1981), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по радиофизике (2007). В настоящее время работает по совместительству в должности доцента на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, основное место работы – АО «Время-Ч». Автор 30 научных статей в области нелинейной динамики систем фазовой синхронизации и приложений, локализации энергии в гамильтоновых системах, динамики спиновых генераторов, анализа шумов квантовых стандартов частоты, методов измерений.

Россия 603105 Нижний Новгород, ул. Ошарская, д.67
АО «ВРЕМЯ-Ч»
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: mishagin@vremya-ch.com



Лаптева Татьяна Владимировна – родилась в городе Брянка, Украина (1982). С отличием окончила магистратуру кафедры физики Луганского национального университета имени Тараса Шевченко (2005). В 2013 году закончила аспирантуру факультета математики и естественных наук Технического университета Дрездена, Германия (Technische Universitat Dresden), где 4 марта 2013 года с отличием (*magna cum laude*) защитила диссертацию на соискание степени доктора естественных наук (Dr. rer. nat.) по теме «Нелинейные волны в решетках с беспорядком: локализация и распространение» («Nonlinear waves in random lattices: localization and spreading»). С сентября 2013 года исполняет обязанности старшего преподавателя кафедры теории управления и динамики систем Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Автор 19 научных статей, посвященных волновой динамике и численному моделированию сред с беспорядком и магнитных материалов, в отечественных и зарубежных научных журналах (в том числе, *Physical Review Letters*, *New Journal of Physics*, *Europhysics Letters*, Письма в ЖЭТФ, Известия РАН, ДАН, и т.д.).

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: tetyana.laptyeva@gmail.com



Канаков Олег Игоревич – родился в Нижнем Новгороде (1981), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2004), защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (2007). С 2007 года – старший преподаватель, с 2009 – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Основные научные интересы – локализация и перенос энергии в решеточных системах, нелинейная динамика синтетических генных сетей, волновые неустойчивости в нелинейных решеточных системах. Является соавтором 22 статей по вышеуказанной тематике.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: okanakov@rf.unn.ru