



Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

УДК 621.317.7

ИЗМЕРЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИЗ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

А.М. Намаюнас, А.В. Тамашевичюс

Описано электронное устройство, предназначенное для определения корреляционной размерности странных аттракторов из временной реализации одной переменной. В отличие от компьютерных систем прибор работает в масштабе реального времени. Дано математическое описание процедуры и представлена блок-схема прибора. Проведено измерение корреляционной размерности для генератора хаотических колебаний, представляющего собой LC-автогенератор с дополнительной инерционно-нелинейной цепочкой. Отмечено хорошее согласие со значениями, полученными численными методами из соответствующей системы динамических уравнений. Для сравнения также приведены результаты анализа периодического сигнала и случайного шума.

Введение

Хаотические колебания наблюдаются в самых различных нелинейных динамических системах [1]. В последнее время все большее внимание уделяется количественному описанию динамического хаоса с помощью таких характеристик, как размерности аттрактора, энтропии, показатели Ляпунова [2]. В частности, эти параметры позволяют отличить детерминированный динамический хаос от случайных шумов. Среди различного рода размерностей аттрактора наибольшую популярность приобрела так называемая корреляционная размерность [3]. Эта количественная мера, как правило, определяется численным методом с помощью компьютера. Для анализа экспериментальных данных дополнительно требуется аналого-цифровой преобразователь соответствующего исследуемым колебаниям быстродействия.

Имеются несколько аналоговых устройств, не требующих использования цифрового компьютерного оборудования. Например, в работе [4] описано оптическое устройство для определения корреляционной размерности из отображений Пуанкаре. Это устройство ограничено двумерными отображениями. Другой недостаток - трудоемкость и неудобство изготовления необходимых для анализа прозрачных фотографических изображений исследуемых сечений Пуанкаре.

Известен также электронный прибор [5], дающий возможность в масштабе реального времени, т.е. непосредственно в эксперименте, оценить минимальную размерность вложения аттрактора. Однако минимальная размерность вложения [1] (или число активных степеней свободы) является величиной целой и не отражает характера и плотности заполнения аттрактором фазового пространства.

В настоящей работе проведено усовершенствование ранее разработанного прибора [5] с целью обеспечения возможности определения дробной размерности аттракторов.

1. В численных алгоритмах для реконструкции фазового пространства из временной реализации одной переменной $x(t)$ обычно используется метод задержек [6]. С помощью этого метода формируется массив n -мерных векторов $\{\vec{x}_i^n\}$, $i=1, 2, \dots, N$, где

$$\vec{X}_i^n = \{x(iT), x[(i+1)T], \dots, x[(i+n-1)T]\}. \quad (1)$$

Далее рассчитывается корреляционный интеграл [3]:

$$\bar{C}^n(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r - |\vec{X}_i^n - \vec{X}_j^n|), \quad (2)$$

где $H(y)$ - функция Хевисайда. При малых значениях параметра r интеграл имеет степенную зависимость

$$C^n(r) \sim r^{d(n)}, \quad (3)$$

где $d(n)$ при больших значениях размерности вложения n стремится к искомой корреляционной размерности ν .

При аналоговой обработке сигнала удобно модифицировать эту процедуру следующим образом. Пусть задается условие

$$x(t) = c, \quad (4)$$

где c - произвольно выбранный фиксированный уровень, например, среднее значение $x(t)$. Условие (4) для переменного сигнала выполняется в определенные моменты времени t_i . Расстояния между соседними точками t_i и t_{i+1} , т.е. интервалы между последующими пересечениями сигналом заданного уровня, обозначим через T_i . Из этих интервалов формируются m -мерные векторы:

$$\vec{T}_i^m = \{T_i, T_{i+1}, \dots, T_{i+m-1}\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (5)$$

Используя эти векторы, можно рассчитать аналогичный (2) корреляционный интеграл и определить корреляционную размерность $\bar{\nu}$. Следует обратить внимание, что вследствие использованного условия (4) размерность $\bar{\nu}$ на единицу меньше размерности ν (аналогично размерностям, получаемым из сечений Пуанкаре).

2. Выше описанную модифицированную процедуру определения размерности $\bar{\nu}$ можно проводить не только численно, но и с помощью аналогового электронного устройства, блок-схема которого показана на рис.1. Устройство содержит компаратор 1, расширитель импульсов 2, блок ждущих мультивибраторов 3, схему сравнения 4 и счетчик импульсов 5.

В компараторе происходит преобразование непрерывного хаотического сигнала $x(t)$ (рис.2, диаграмма 1) в хаотическую последовательность коротких d -импульсов, разделенных интервалами T_i , T_{i+1} и т.д. (рис.2, диаграмма 2), т.е. формируется m -мерный вектор \vec{T}_i^m . В расширителе эти импульсы преобразуются в более длинные r -импульсы (рис.2, диаграмма 3) с регулируемой длительностью r . Параметр r в этом блоке играет роль радиуса гиперсферы в корреляционном интеграле (2). Одновременно блок мультивибраторов 3 выдает последователь-

ность коротких d -импульсов с независимо регулируемыми интервалами $T_j, T_{j+1}, \dots, T_{j+m-1}$ (рис.2, диаграмма 4), т.е. формирует m -мерный опорный вектор \vec{T}_j^m (в разработанном устройстве максимальное значение m равно 8; на рис.2 приведена иллюстрация для случая $m=2$). Заметим, что первые d -импульсы блока мультивибраторов в каждом пакете \vec{T}_j^m синхронизируются от компаратора 1, а последующие d -импульсы, задающие интервалы T_j , устанавливаются независимо. Расширенные r -импульсы и короткие d -импульсы с блока мультивибраторов поступают на схему сравнения 4. Если все импульсы в соответствующих пакетах совпадают, схема выдает короткий импульс совпадения (рис.2, диаграмма 5), регистрируемый счетчиком 5. На рис.2 показаны две ситуации на временной реализации, в которых произошло такое совпадение (отмечено знаком "+"), а в третьей ситуации один из r -импульсов не совпал с соответствующим d -импульсом из опорного пакета (отмечено знаком "-") и импульс совпадения не появился.

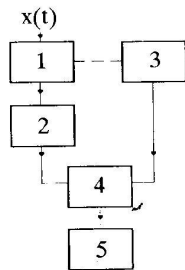


Рис.1

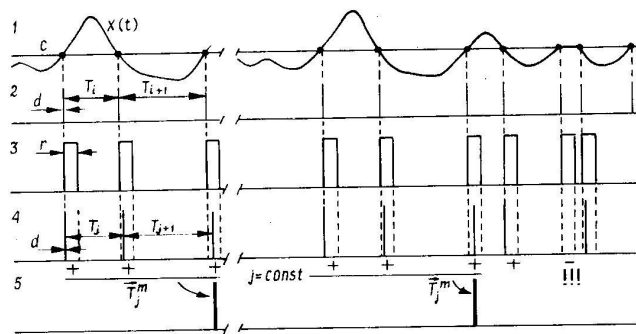


Рис.2

Совпадение происходит в тех случаях, когда

$$T_{i+k-1} < T_{j+k-1} < (T_{i+k-1} + r) \quad (6)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, m$. Полное число точек, описываемых вектором (5) и попадающих в окрестность опорного вектора \vec{T}_j^m , дается выражением, аналогичным корреляционному интегралу (2):

$$M^m(r) = \sum_i \prod_k \{H[r - (T_{jk-1} - T_{ik-1})] H(T_{jk-1} - T_{ik-1})\}. \quad (7)$$

Это число приблизительно подчиняется степенному закону

$$M^m(r) \sim r^{-d^*(m)}, \quad (8)$$

где $d^*(m)$ с увеличением m сходится к точечной корреляционной размерности $\bar{\nu}^*$ ("*" означает, что величина является локальной, поскольку в (7) суммирование производится только по индексам i , а индекс j фиксирован).

Эта процедура является локальным анализом аттрактора ($j = \text{const}, r \ll T_j$). Очевидно, что другие области аттрактора могут быть исследованы соответствующим подбором опорного вектора \vec{T}_j^m . В отличие от компьютерных методов в данном устройстве легко подобрать опорные точки в наиболее "плотных"

областях на аттракторе путем поиска максимальной частоты следования импульсов совпадения. Такие точки, имеют максимальный статистический вес в случае усреднения по j .

3. Проверка работоспособности устройства производилась с помощью простого радиоэлектронного генератора хаотических колебаний [7]. Генератор представляет обычный LC-автогенератор, к колебательному контуру которого параллельно подключена инерционно-нелинейная цепочка, состоящая из последовательно соединенных полупроводникового диода и катушки индуктивности. В данном эксперименте генератор выдавал хаотический широкополосный сигнал с центральной частотой сплошного спектра вблизи 10 кГц.

Результаты анализа хаотического сигнала показаны на рис.3, 4. Частота следования импульсов совпадения была достаточно высока, например, 3 кГц при $m = 2$ и $r = r_0 = 1.2$ мкс, так что счетчик импульсов работал в режиме частотомера. Таким образом, значения M на рис.3 соответствуют количеству точек, набранных за 1с. По наклонам зависимостей $M^m(r)$ в двойном логарифмическом масштабе определялась функция $d^*(m)$ (рис.4, линия 1). Функция быстро насыщается и достигает значения 0.82 ($\bar{\nu}^*$). Для сравнения на том же рисунке приведены результаты измерения для периодического сигнала (линия 2) и случайного шума (линия 3). Здесь результаты очевидны: $\bar{\nu}^* = 0$ в случае регулярного сигнала и $d^*(m) \sim m$, т.е. насыщения не наблюдается в случае полностью стохастического сигнала (рис.4, сплошная линия).

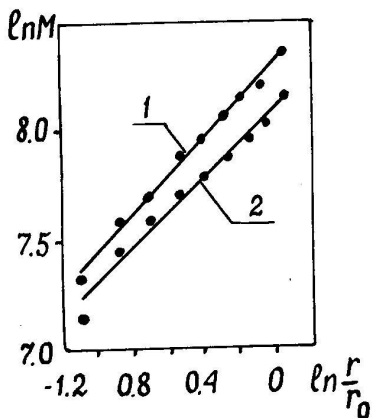


Рис.3

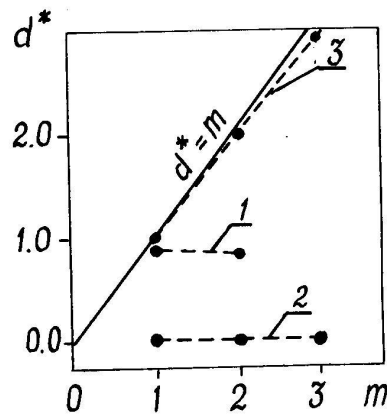


Рис.4

4. Исследованный генератор хаотических колебаний согласно результатам работы [5] имеет три степени свободы, т.е. минимальное число независимых переменных равно трем. Действительно, как показал качественный анализ, основанный на сравнении временных разверток, фазовых портретов, сечений Пуанкаре и частотных спектров, данный генератор хорошо описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в безразмерном обозначении имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax + y - z, \\ dy/dt &= -x, \\ dz/dt &= b[x - F(z)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $F(z) = \ln(kz+1)$ при $z > 0$ и $F(z) = kz$ при $z \leq 0$ есть функция, отражающая вольтамперную характеристику диода. Хаотический режим наблюдается, например, при $a = 0.91$, $b = 10$ и $k = 500$. Полученная путем численного интегрирования данной системы уравнений, временная реализация $x(t)$ анализировалась тремя

способами. Согласно методу [3] по формулам (1) - (3) определена корреляционная размерность $\nu = 1.92$. С помощью выше описанного модифицированного метода и формул (4), (5) определена корреляционная размерность $\tilde{\nu} = 0.92$, т.е. $\tilde{\nu} = \nu - 1$. Наконец, точечная корреляционная размерность $\tilde{\nu}^*$, рассчитанная по алгоритму, имитирующему действие аналогового устройства, имела значение 0.95 для опорного вектора $\vec{T}_j = \{1.53; 0.94; 2.70\}$. Таким образом, все эти величины, а также экспериментальное значение $\tilde{\nu}^* = 0.82$ достаточно хорошо, если иметь в виду неоднородность аттрактора, согласуются между собой.

Обращает внимание довольно низкое значение корреляционной размерности $\nu = 1.92$, т.е. $\nu < 2$ (соответственно $\tilde{\nu} < 1$ и $\tilde{\nu}^* < 1$), что может показаться неожиданным в случае трехмерного хаотического потока. Данный вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим лишь, что величины $\nu < 2$ встречаются и для других систем. Это, по-видимому, связано с особенностями топологии аттракторов (например, для трехмерного аттрактора Ресслера получено значение фрактальной размерности 1.548 [8]).

Библиографический список

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. Dimensions and entropies in chaotic systems/Ed. G.Mayer-Kress. Berlin: Springer, 1981.
3. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors//Phys.Rev.Lett. 1983. Vol.50. N 5. P.346.
4. Lee C.-K., Moon F.C. An optical technique for measuring fractal dimensions of planar Poincare maps//Phys. Lett. A. 1986. Vol.114. N 5. P.222.
5. Namajūnas A., Pozela J., Tamaševičius A. An electronic technique for measuring phase space dimension from chaotic time series//Phys. Lett.A. 1988. Vol.131. N 2. P.85.
6. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. N 9. P.712.
7. Пикирис Р.А., Пирагас К.А., Тамашевичюс А.В. Схемы преобразования LC-автогенератора в генератор шума//Радиотехника, 1986. N 9. С.43.
8. Agarwal A.K., Banerjee K., Bhattacharjee J.K.// Phys. Lett. A. 1986. Vol.119. N.6. P.280.

Вильнюсский институт физики полупроводников

MEASUREMENT OF CORRELATION DIMENSION FROM TIME SERIES

A.M. Namajūnas, A.V. Tamaševičius

An electronic technique for determining the correlation dimension of strange attractors from a single observable is described. In contrast to the conventional computer methods the elaborated electronic instrument operates on a real time scale. Mathematical description of the procedure as well as the block diagram of the instrument are presented. The correlation dimension is measured for a chaotic oscillator which is a standard LC-oscillator containing an additional nonlinear inertial chain. There is a good agreement of the experimental result with the numerical calculations carried out for the corresponding dynamical equations. In addition, the periodic oscillations and random noise are analyzed electronically for comparison.