Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 517.9 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76

Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда

С. П. Плышевская

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4
E-mail: splyshevskaya@mail.ru
Поступила в редакцию 4.12.18, принята к публикации 20.12.2018

Тема исследования. Исследована динамика известного нелинейного уравнения Кана–Хилларда. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и исследованы бифуркационные явления. **Цель**. Построение конечномерных и специальных бесконечномерных уравнений, которые играют роль нормальных форм. **Методы исследования**. Используются как стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, так и специальные методы бесконечномерной нормализации. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. **Результаты**. Построены конечномерные и специальные бесконечномерные уравнения, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение решений из малой окрестности исходной краевой задачи. Приведены асимптотические на промежутке $[t_0, \infty)$ формулы для решений. **Обсуждение.** Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния. Уравнение Кана–Хилларда – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компонента вещества.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, нормальные формы, уравнение Кана–Хилларда.

Образец цитирования: Плышевская С.П. Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 63–76. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76

Asymptotic research of local dynamics families of Cahn–Hilliard equations

S. P. Plyshevskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University
4, prospekt Vernadskogo, 295007 Simferopol, Republic of Crimea, Russia
E-mail: splyshevskaya@mail.ru

Received 4.12.18, accepted for publication 20.12.2018

Topic. Dynamics of well-known Cahn–Hilliard nonlinear equation is researched. In a state of balance stability task, critical cases were highlighted and bifurcation phenomena were researched. **Aim.** To formulate finite-dimensional and special infinite-dimensional equations, which can be represented as normal forms. **Method.** You can use as standard local dynamics research methods, based on constructing of normal forms on central manifolds, and special infinite-dimensional normalization ones. There is an algorithm of reducing an assumed boundary value task to equations for slowly varying amplitudes. **Results.** There are formulated finite-dimensional and special infinite-dimensional equations, which can be represented as normal forms. Their non-local dynamics defines the behavior of solutions that come from an assumed boundary value task minor adjacency. Asymptotic in between formulas to solve are quoted as well. **Discussion.** An offered problem is divided into a continual family, which depends on a certain parameter of more specialized boundary value tasks. As a rule, considered critical cases possess 1 and 2 dimensions. You've got a situation that is inherent to advection index major values, when a critical case possesses an infinite advection: infinitely many roots of a characteristic equation of a linearized boundary value problem aim for an imaginary axis with this index increase.

Key words: dynamics, stability, normal forms, Cahn–Hilliard equation.

Reference: Plyshevskaya S.P. Asymptotic research of local dynamics families of Cahn–Hilliard equations. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 63–76. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76

Введение

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [1].

Уравнение Кана–Хилларда [2] – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компонента вещества.

В первом разделе рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3\right]. \tag{1}$$

Как правило, вместе с (1) рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=1} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=0}^{x=1} = 0, \tag{2}$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x+1) \equiv u(t, x). \tag{3}$$

Для коэффициентов a_j выполнены неравенства

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_4 > 0. \tag{4}$$

Такого вида краевые задачи изучались в [3].

Особо отметим то обстоятельство, что для произвольного значения вещественной постоянной c решение $u_0(t,x) \equiv c$ является однородным состоянием равновесия рассматриваемых краевых задач.

Во втором разделе рассматривается более общее по сравнению с (1) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3\right],$$

которое отличается от (1) только наличием в правой части еще одного слагаемого $\lambda\partial^3 u/\partial x^3$.

1. Динамика краевых задач (1), (2) и (1), (3)

В настоящем разделе исследуется вопрос о поведении всех решений краевых задач (1), (2) и (1), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности каждого состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$.

Отметим, что количество параметров в (1) можно уменьшить, произведя нормировку «времени» $t \to (-a_2)t$ и нормировку функции $u \to (a_4 a_2^{-1})^{\frac{1}{2}} u$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3\right], \tag{5}$$

где $\alpha = -a_1 a_2^{-2} \quad (\alpha > 0), \quad b = a_3 a_2^{-\frac{3}{2}} a_4^{\frac{1}{2}}$.

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$ в (5) произведём замену

$$u = c + \upsilon. \tag{6}$$

В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\alpha\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \beta\upsilon + \gamma\upsilon^2 + \upsilon^3\right] \tag{7}$$

с краевыми условиями либо

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right|_{x=0,x=1} = \left.\frac{\partial^3 \upsilon}{\partial x^3}\right|_{x=0,x=1} = 0, \tag{8}$$

либо

$$\upsilon(t, x+1) \equiv \upsilon(t,x). \tag{9}$$

В (7) приняты обозначения

$$\beta = 1 - 2b - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c.$$

Ниже обозначаем через $M(\varphi)$ среднее на отрезке $x \in [0,1]$ значение функции $\varphi(x)$

$$M(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(x)dx.$$

Через $\overset{0}{W}$ обозначим множество всех функций $\varphi(x)$ $(x \in [0,1])$, для которых $\varphi(x) \in W_4^2([0,1])$, и для $\varphi(x)$ выполнены краевые условия (8) или (9) и $M(\varphi) = 0$.

Важную роль играет следующее простое утверждение.

Теорема 1. *Для каждого* $c \in (-\infty, \infty)$ *множество всех таких решений* $u(t,x)$ *краевой задачи* (5), (2) *и краевой задачи* (5), (3), *определённых при* $t > t_0$, *для которых выполнены условия* $u(t,x) = c + \upsilon(t,x)$, *и*

$$M(\upsilon) = 0 \tag{10}$$

является инвариантным интегральным многообразием.

Это означает, что из условий $\upsilon(t,x) \in \overset{0}{W}$ и $M(\upsilon(t_0,x)) = 0$ следует равенство $M(\upsilon(t,x)) \equiv 0$ для $t > t_0$.

Отсюда естественным образом возникает задача исследования локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамики краевых задач (7), (8) и (7), (9), зависящих от континуального параметра $c \in (-\infty, \infty)$.

Характеристическое уравнение для линеаризованных в нуле соответствующих краевых задач (7), (8), (10) и (7), (9), (10) имеет вид

$$\lambda = \pi^2 k^2 [-\alpha\pi^2 k^2 + 1 - 2bc - 3c^2], \tag{11}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ в случае условий (8), (10) и $k = \pm 2, \pm 4, \ldots$ в случае условий (9), (10).

Базовыми являются следующие хорошо известные утверждения.

Утверждение 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\pi^2\alpha > 1 - 2bc - 3c^2. \tag{12}$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (7), (8), (10) *асимптотически устойчиво. Если выполнено неравенство*

$$4\pi^2\alpha > 1 - 2bc - 3c^2, \tag{13}$$

то нулевое решение краевой задачи (7), (9), (10) *тоже асимптотически устойчиво.*

В этих случаях все решения из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемых краевых задач соответственно стремятся к нулю при $t \to \infty$. Тем самым решения $u(t,x)$ краевых задач (5), (2) и (5), (3) с близкими к постоянной c и удовлетворяющими условию $M(u(t_0,x)) = c$, стремятся к постоянной c при $t \to \infty$.

Утверждение 2. *Пусть при* $\alpha > 0$ *выполнено неравенство*

$$\pi^2\alpha < 1 - 2bc - 3c^2. \tag{14}$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (7), (8), (10) *неустойчиво. Если же выполнено неравенство*

$$4\pi^2\alpha < 1 - 2bc - 3c^2, \tag{15}$$

то нулевое решение краевой задачи (7), (9), (10) *тоже неустойчиво.*

При условии (14) или (15) в достаточно малой окрестности нуля не может быть аттрактора у рассматриваемых задач, соответственно. Тем самым задача о динамике этих краевых задач становится нелокальной. Поэтому динамика краевых задач (5), (2) и (5), (3) в окрестности состояния равновесия $u_0(t,x) \equiv c$ тоже является нелокальной.

При условии, когда для некоторого c_0 в (12), (14) вместо неравенства стоит строгое равенство

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2\alpha = 0, \tag{16}$$

в задаче об устойчивости краевой задачи (7), (8), (10) возникает критический случай. Этот критический случай имеет единичную размерность. Для краевой задачи (7), (9), (10) критический случай выделяется равенством

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2\alpha = 0. \tag{17}$$

Размерность этого критического случая равна двум (с двумя группами решений).

Эти два случая соответственно рассматриваются в разделах 2 и 3. В разделе 4 изучается вопрос о существовании неоднородных состояний равновесия в краевых задачах (5), (2) и (5), (3).

1.1. Критический случай в краевой задаче (7), (8), (10). Рассмотрим вопрос о локальной динамике краевой задачи (7), (8), (10) при условии

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \tag{18}$$

где c_0 является корнем уравнения (16), $c_1 \neq 0$ – как-то фиксировано, а ε – малый положительный параметр,

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{19}$$

Из условий (16), (18), (19) вытекает [4], что в некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемой краевой задачи существует одномерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором эту краевую задачу можно записать в виде нормальной формы, то есть в виде скалярного нелинейного уравнения первого порядка [5]. Для определения элементов этого уравнения воспользуемся стандартной процедурой (см., например, [6]). Введём в рассмотрение формальный ряд

$$\upsilon(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi(\tau)\cos(\pi x) + \varepsilon\upsilon_2(\tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\upsilon_3(\tau, x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{20}$$

Подставим (20) в (7), (8), (10) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, получаем верное тождество, а на втором – для определения $\upsilon_2(\tau, x)$ приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\alpha\frac{\partial^2\upsilon_2}{\partial x^2} - \beta\upsilon_2\right] = -\xi^2\gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cos^2\pi x),$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x}\right|_{x=0,x=1} = \left.\frac{\partial^3\upsilon_2}{\partial x^3}\right|_{x=0,x=1} = 0, \quad M(\upsilon_2) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\upsilon_2(\tau, x) = A\xi^2\cos 2\pi x, \quad A = \gamma(2\beta - 8\alpha\pi^2)^{-1}.$$

На следующем шаге для нахождения $\upsilon_3(\tau, x)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\alpha\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial x^2} - \beta\upsilon_3\right] = \dot{\xi}\cos(\pi x) - \pi^2(2b + 6c_0)c_1\cos(\pi x) +$$
$$+\xi^3\frac{d^2}{dx^2}(\cos^3\pi x) - 2\gamma\xi^3 A\frac{d^2}{dx^2}(\cos(2\pi x)\cos(\pi x)),$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x}\right|_{x=0,x=1} = \left.\frac{\partial^3\upsilon_3}{\partial x^3}\right|_{x=0,x=1} = 0, \quad M(\upsilon_3) = 0.$$

Условие разрешимости этой краевой задачи состоит в вычислении равенства

$$\dot{\xi} = \delta\xi + \sigma\xi^3, \tag{21}$$

где

$$\delta = 2\pi^2(b + 3c_0)c_1, \quad \sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma\pi^2 A.$$

Таким образом, уравнение (21) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ является нормальной формой для краевой задачи (7), (8), (10). Оно описывает, в главном, поведение всех решений (7), (8), (10) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Уравнение (21) интегрируется в явном виде. При $\delta\sigma < 0$ у (21) имеется два ненулевых состояния равновесия $\xi_\pm = (-\delta/\sigma)^{1/2}$. Согласно асимптотической формуле (20), им отвечают два ненулевых неоднородных состояния равновесия $\upsilon_\pm(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_\pm \cos(\pi x) + O(\varepsilon)$.

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 2. *При условиях* $\delta \neq 0, \quad \sigma \neq 0$ *и при всех достаточно малых* ε *поведение решений* (7), (8), (10) *из некоторой достаточно малой и независящей от* ε *окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением* (21):

1^0. *При* $\delta > 0, \ \sigma > 0$ *в этой окрестности не существует аттрактора;*

2^0. *При* $\delta > 0, \ \sigma < 0$ *нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия* $u_\pm(x, \varepsilon)$*;*

3^0. *При* $\delta < 0, \ \sigma > 0$ *нулевое решение устойчиво, а* $u_\pm(x, \varepsilon)$ *– неустойчивы;*

4^0. *При* $\delta < 0, \ \sigma < 0$ *все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при* $t \to \infty$.

1.2. Критический случай в краевой задаче (7), (9), (10). Здесь предполагаем, что выполнено условие (17). При этом два корня характеристического уравнения (11) при $k = \pm 2$ являются нулевыми, а все остальные отрицательные. Положим, как и выше,

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда при всех достаточно малых ε в некоторой достаточно малой и не зависящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (7), (9), (10) имеется устойчивое двумерное локальное инвариантное интегральное многообразие [4]. На нём исходную краевую задачу можно записать в виде специального скалярного нелинейного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Именно это уравнение и определяет (при выполнении некоторых условий типа общности положения) локальное поведение решений задачи (7), (9), (10) в указанной малой окрестности. Для построения нужного уравнения воспользуемся стандартным алгоритмом (см., например, [6]).

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$\upsilon(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau)\exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-2\pi i x)) + \varepsilon\upsilon_2(\tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\upsilon_3(\tau, x) + \ldots, \tag{22}$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $\upsilon_j(\varepsilon, x)$ – 2π-периодичны по x. Подставим (22) в (7), (9), (10) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором – получаем уравнение для $\upsilon_2(\tau, x)$. Интегрируя его, находим, что

$$\upsilon_2(\tau, x) = -\gamma_0(12\pi^2\alpha)^{-1}\xi^2\exp(4\pi i x) - \gamma_0(12\pi^2\alpha)^{-1}\bar{\xi}^2\exp(-4\pi i x).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, получим уравнение для $\upsilon_3(\tau, x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$(2\pi)^{-2}\frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1\xi + d\,\xi|\xi|^2, \tag{23}$$

в котором $\beta_1 = 2(b + 3c_0)c_1, \quad d = -3 + \gamma^2(6\pi^2\alpha)^{-1}$. Отметим, что при $\beta_1 d < 0$ уравнение (23) имеет множество состояний равновесия вида $\xi_0 \exp(i\varphi)$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$, где $\xi_0 = (-\beta_1/d)^{1/2}$.

Теорема 3. *При условиях* $\beta_1 \neq 0, \quad d \neq 0$ *и при всех достаточно малых* ε *динамика уравнения* (23) *определяет поведение решений краевой задачи* (7)*,* (9)*,* (10) *в малой окрестности нулевого состояния равновесия.*

Более подробно: при $\beta_1 d < 0$ краевая задача (7), (9), (10) имеет неоднородное состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_0 \exp(2\pi i x) + O(\varepsilon)$. Оно устойчиво при $\beta_1 > 0$ и неустойчиво при $\beta_1 < 0$. При $\beta_1 < 0, \quad d < 0$ все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $\beta_1 > 0,\ d > 0$, то задача о динамике становится нелокальной.

1.3. О неоднородных состояниях равновесия краевой задачи (5), (3). Сначала отметим, что эти состояния равновесия являются 2π-периодическими решениями уравнения

$$\alpha\frac{d^2\omega}{dx^2} + f(\omega) = h, \tag{24}$$

где $h \in (-\infty, \infty)$, а $f(\omega) = \omega + b\omega^2 - \omega^3$. Функция $f(\omega)$ имеет локальный минимум f_- и локальный максимум f_+, причём

$$f_\pm = f(\omega_\pm), \quad \omega_\pm = \frac{1}{3}b \pm \sqrt{\frac{b^2}{9} + 3}.$$

При $h < f_-$ и $h > f_+$ уравнение (24) не может иметь неоднородных периодических решений. Ниже предполагаем, что

$$f_- < h < f_+.$$

При этих условиях через $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ обозначим корни уравнения

$$f(\omega) = h.$$

Через $\omega_c(x)$ обозначим решение (24) с начальными условиями

$$\omega_c(0) = c, \quad \omega_c'(0) = 0.$$

Это решение заведомо периодическое либо при $c \in (\omega_1, \omega_2)$, либо при $c \in (\omega_2, \omega_3)$. Его период обозначим через $T_h(c)$. Заметим, что

$$\lim_{c \to \omega_2} T_h(c) = 2\pi(\alpha f'(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Если $T_h(c)$ определено при $c \in (\omega_1, \omega_2)$, то $\lim\limits_{c \to \omega_1 + 0} T_h(c) = \infty$.

Если $T_h(c)$ определено при $c \in (\omega_2, \omega_3)$, то $\lim\limits_{c \to \omega_3 - 0} T_h(c) = \infty$.

Отметим ещё, что $\lim\limits_{h \to f_1 + 0} T_h(c) = \infty, \quad \lim\limits_{h \to f_2 - 0} T_h(c) = \infty$.

Из приведённых соотношений уже легко сделать вывод о существовании 2π-периодического решения (24). Этот вывод связан с разрешимостью уравнения

$$T_h(c) = 2\pi n^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Учитывая (25), заключаем, что уравнение (26) разрешимо при

$$\alpha f'(\omega_2) < h^2.$$

Осталось заметить, что соответствующее состояние равновесия устойчиво при условии $n = 1$ в (26), а при $n > 1$ – неустойчиво.

Асимптотика при $\alpha \to 0$ периодических решений исследована в [7, 8].

2. Бифуркации в обобщенном уравнении Кана–Хилларда

2.1. Постановка задачи. Исследуется обобщенное уравнение Кана–Хилларда, которое отличается от (1) наличием ещё одного слагаемого $\lambda\partial u/\partial x$, стоящего в скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3\right]. \tag{27}$$

Вместе с (27) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{28}$$

В отличие от (1), (2) у краевой задачи (27), (28) могут быть только однородные состояния равновесия $u(t, x) \equiv c \quad (c \in (-\infty, \infty))$.

В (27) произведем замену

$$u(t, x) = \upsilon(t, x) + c.$$

В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \beta\upsilon + \gamma\upsilon^2 - \upsilon^3\right], \tag{29}$$

$$\upsilon(t, x + 2\pi) \equiv \upsilon(t, x), \tag{30}$$

где $\beta = 1 + 2b - 3c^2,\ \gamma = b - 3c$. Важно отметить, что из условия

$$M(\upsilon(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \upsilon(t_0, x)dx = 0$$

следует выполнение при всех $t > t_0$ условия

$$M(\upsilon(t, x)) = 0. \tag{31}$$

Таким образом, множество всех решений (27), (28), для которых $M(u(t, x)) = c$, является инвариантным интегральным многообразием. Отсюда вытекает корректность постановки следующей задачи: исследование локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамики всего семейства, зависящего от параметра c, краевых задач (29), (30) при дополнительном условии (31). Отметим, что краевые задачи (27) и (28) изучались в [3].

Вначале рассмотрена бифуркация Андронова–Хопфа. В разделе 3 исследован критический случай бесконечной размерности, который выделяется условием $|\lambda| \gg 1$.

2.2. Бифуркация Андронова–Хопфа. При исследовании локальной динамики краевой задачи (29)–(31) важную роль играет расположение корней λ_k характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3\lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{32}$$

В случае, когда $\alpha > -\beta$, все корни (32) имеют отрицательные вещественные части. Отсюда следует, что все решения (29)–(31) из некоторой достаточно малой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $\alpha < -\beta$, то среди корней (32) есть корни с положительной вещественной частью, а значит, поставленная задача о динамике становится нелокальной.

Ниже предполагаем, что имеет место критический случай. Пусть значение $c = c_0$ такое, что

$$\alpha = \beta = 1 - 2bc_0 - 3c_0^2. \tag{33}$$

При этом, конечно, выполнено неравенство $\alpha > 0$, то есть

$$1 - 2bc_0 - 3c_0^2 > 0.$$

Фиксируем произвольно значение c_1 и положим в (29)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \tag{34}$$

где ε – малый положительный параметр, то есть

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{35}$$

Исследуем поведение всех решений краевой задачи (29)–(31) из некоторой достаточно малой и независящей от ε окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (33)–(35).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$, а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова–Хопфа.

Воспользуемся известными результатами (см., например, [4, 5]). В малой окрестности нулевого состояния равновесия (29)–(31) существует локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие, на котором эта краевая задача может быть записана в виде скалярного специального комплексного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для того чтобы выписать это уравнение – его называют нормальной формой – применим следующий формализм.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$\upsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\xi(\tau)\exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau)\exp(-ix - i\lambda t)\right] + \varepsilon\upsilon_2(t,\tau,x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\upsilon_3(t,\tau,x) + \ldots \tag{36}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ – медленное «время»; функции $\upsilon_j(t,\tau,x)$ – $2\pi/\lambda$-периодичны по t и 2π-периодичны по x.

Подставим (36) в (29)–(31) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, получим верное тождество, а на втором – уравнение для определения $\upsilon_2(t,\tau,x)$:

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x} + \beta_0\upsilon_2\right) = -4\gamma\left[\xi^2\exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{\xi}^2\exp(-2ix - 2i\lambda t)\right],$$

где $\beta_0 = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2$.

Отсюда приходим к выводу, что

$$\upsilon_2 = A\xi^2\exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{A}\bar{\xi}^2\exp(-2ix - 2i\lambda t),$$

где $A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}$.

На третьем шаге для нахождения $\upsilon_3(t, \tau, x)$ приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned}\frac{\partial \upsilon_3}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x} + \beta_0\upsilon_3\right) &= \\ = \left(-\frac{d\xi}{d\tau} + \beta\,(2b{+}6c_0)\,c_1\xi + (2A\gamma{+}3)\xi|\xi|^2\right)&\exp(ix{+}i\lambda t) + \\ + \left(-\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} + \beta\,(2b{+}6c_0)\,c_1\bar{\xi} + (2\bar{A}\gamma{+}3)\bar{\xi}|\xi|^2\right)&\exp(-ix{-}i\lambda t) + \\ + 9\,(2A\gamma{+}1)\,\xi^3\exp(3ix{+}3it) + 9\,(2\bar{A}\gamma{+}1)\,\bar{\xi}^3&\exp(-3ix{-}3it),\end{aligned} \tag{37}$$

$$\upsilon_3(t, \tau, x + 2\pi) \equiv \upsilon(t, \tau, x), \quad M(\upsilon_3) = 0. \tag{38}$$

Условие разрешимости краевой задачи (37), (38) в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \tag{39}$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3.$$

Отсюда и из общих утверждений (см., например, [4]) вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $\delta \neq 0$ *и* $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$. *Тогда при всех достаточно малых* ε *динамика уравнения* (39) *определяет локальную динамику краевой задачи* (29)–(31).

Поясним это утверждение. Пусть $\delta > 0$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$. Тогда в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (29)–(31) не может существовать аттрактора, то есть задача о динамике становится локальной.

Пусть $\delta > 0$ и $\operatorname{Re}\sigma < 0$. Тогда уравнение (39) имеет устойчивый цикл $\xi_0(\tau) = \xi_0\exp(i\omega_0\tau)$, где $\xi_0 = (-\delta(\operatorname{Re}\sigma)^{-1})^{1/2}$, $\omega_0 = (\operatorname{Im}\sigma)\xi_0^2$, а краевая задача (29)–(31) тоже имеет устойчивый цикл

$$\upsilon_0(t, \tau, x) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[\xi_0\exp\bigl(ix + i(\lambda{+}\varepsilon\omega_0{+}o(\varepsilon))t\bigr) + \bar{\xi}_0\exp\bigl(-ix - i(\lambda{+}\varepsilon\omega_0{+}o(\varepsilon))t\bigr)\right] + O(\varepsilon). \tag{40}$$

При условии $\delta < 0$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$ уравнение (39) имеет устойчивое состояние равновесия и неустойчивый цикл. Краевая задача (29)–(31) тоже имеет при малых ε устойчивое нулевое состояние равновесия и неустойчивый цикл (40).

При условии $\delta < 0$ и $\operatorname{Re}\sigma < 0$ в (39) все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$, и в краевой задаче (29)–(31) тоже все решения из малой (не зависящей от ε) окрестности нуля при всех достаточно малых ε стремятся к нулю при $t \to \infty$.

2.3. Исследование решений краевой задачи (29)–(31) при достаточно больших значениях параметра $|\lambda|$. Без потери общности можно считать, что параметр λ отрицателен. В противном случае, это достигается заменой $x \to -x$.

Основное предположение этого раздела состоит в том, что выполнено неравенство

$$-\lambda \gg 1.$$

В (29) поделим левую и правую части на $(-\lambda)$. Произведём замену $t \to (-\lambda)^{-1}t$ и положим $\varepsilon = (-\lambda)^{-1}$, то есть $0 < \varepsilon \ll 1$. В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \beta\upsilon + \gamma\upsilon^2 - \upsilon^3\right), \tag{41}$$

$$\upsilon(t, x + 2\pi) \equiv \upsilon(t, x), \quad M(\upsilon) = 0. \tag{42}$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи при малых ε и при $t \to \infty$.

В случае $\varepsilon = 0$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial x^3}, \quad \upsilon(t, x + 2\pi) \equiv \upsilon(t, x), \quad M(\upsilon) = 0. \tag{43}$$

Все корни λ_k характеристического уравнения для (43) являются чисто мнимыми: $\lambda_k = -ik^3$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тем самым в (41), (42) реализуется критический в задаче об устойчивости случай бесконечной размерности. Методика изучения такого типа критических случаев разработана в [3, 6–8]. Применим её для рассматриваемой задачи.

Положим в (41), (42)

$$\upsilon = \upsilon_0(t, \tau, x) + \varepsilon\upsilon_1(t, \tau, x) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t, \tag{44}$$

$$\upsilon_0(t, \tau, x) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(ikx - ik^3 t). \tag{45}$$

Зависимость от t и x в (44) предполагается 2π-периодической и $M(\upsilon_0(t, \tau, x)) = 0$. Подставим (44) в (41). Тогда для определения $\upsilon_1(t, \tau, x)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 \upsilon_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \upsilon_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha \frac{\partial^2 \upsilon_0}{\partial x^2} + \beta\upsilon_0 + \gamma\upsilon_0^2 - \upsilon_0^3\right). \tag{46}$$

Из условия разрешимости (46) в указанном классе функций для определения элементов $\xi_k(\tau)$ формального ряда (45) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\alpha k^4 \xi_k + k^2\beta\xi_k - 3k^2\xi_k\left(2\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2\right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{47}$$

Система (47) играет роль нормальной формы. Её нелокальная динамика определяет, на основе соотношения (45), поведение решений исходной краевой задачи (30), (31) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Систему (47) можно записать в компактной форме. Для этого введём несколько обозначений. Во-первых, отметим, что

$$\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M(\upsilon_0^2(t, \tau, x)). \tag{48}$$

Через $\omega(\tau, x)$ обозначим функцию

$$\omega(\tau, x) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau)\exp(ikx), \tag{49}$$

где коэффициенты Фурье ξ_k те же, что и в формуле (45). Поэтому

$$\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M([\omega(\tau, x)]^2). \tag{50}$$

Обозначим через $N(\omega)$ бесконечномерный вектор

$$N(\omega) = (\ldots,\ \xi_{-2}\exp(-2ikx),\ \xi_{-1}\exp(-ikx),\ \xi_1\exp(ikx),\ \xi_2\exp(2ikx),\ \ldots).$$

Тогда

$$\bar{N}(\omega) = (\ldots,\ \xi_2\exp(2ikx),\ \xi_1\exp(ikx),\ \xi_{-1}\exp(-ikx),\ \xi_{-2}\exp(-2ikx),\ \ldots).$$

Умножение векторов далее считаем покоординатным. Поэтому

$$N(\omega)\bar{N}(\omega) = (\ldots,\ |\xi_2|^2,\ |\xi_1|^2,\ |\xi_1|^2,\ |\xi_2|^2,\ \ldots).$$

Для скалярного произведения $(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega))$ в итоге приходим к формуле

$$(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega)) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k |\xi_k|^2 \exp(ikx).$$

После этого систему (46) можно представить в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = -\alpha\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} - \beta\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 3\left(2M(\omega^2) - 3(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2})\right). \tag{51}$$

Это уравнение следует дополнить периодическими краевыми условиями

$$\omega(\tau, x + 2\pi) \equiv \omega(\tau, x). \tag{52}$$

В том случае, если найдено какое-то решение краевой задачи (51), (52), то найдены для него, соответственно, и коэффициенты Фурье $\xi_k(\tau)$ согласно (49). Затем с помощью соотношения (45) определяем функцию $\upsilon_0(t, \tau, x)$. Построенную так функцию $\upsilon_0(t, \tau, x)$ будем называть соответствующей решению $\omega(\tau, x)$. Тем самым находим главную часть аналитического представления для $\upsilon(t, x, \varepsilon)$ согласно (44).

Таким образом, приходим к обоснованию следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть краевая задача* (51), (52) *имеет решение* $\omega(\tau, x)$, *которое ограничено при* $\tau \to \infty,\ x \in [0, 2\pi]$ *вместе с* $\partial^2\omega(\tau, x)/\partial x^2$. *Тогда краевая задача* (30), (31) *при всех достаточно малых* ε *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon)$ *решение* $u(t, x, \varepsilon) = \upsilon_0(t, \tau, x) + O(\varepsilon)$, *где* $\upsilon_0(t, \tau, x)$ *является соответствующей для* $\omega(\tau, x)$.

Замечание 1. *При* $t = 2\pi m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *значения функции* $\omega(\tau, x)$ *и соответствующей для нее функции* $\upsilon_0(t, \tau, x)$ *совпадают. Состояниям равновесия в* (51), (52) *соответствуют торы в* (30), (31).

Замечание 2. *Асимптотическое представление для* $u(t, x, \varepsilon)$ *можно уточнять.*

Выводы

Исследовано поведение решений уравнения Кана–Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия и изучена их устойчивость.

Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства. Рассмотрена задача с большим коэффициентом адвекции, который приводит к бесконечномерному критическому случаю в задаче об устойчивости стационара. Показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния. Уравнение Кана–Хилларда – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компоненты вещества.

Библиографический список

1. *Краснюк И.Б., Стефанович Л.И., Юрченко В.М.* Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, № 11. С. 55–62.
2. *Cahn J.W., Hilliard J.E.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phis. 1958. Vol. 28. C. 258–267.
3. *Кащенко С.А.* Бифуркации в уравнении Курамото–Сивашинского // Теоретическая и математическая физика. 2017. Т. 192, № 1. С. 23–40. ISSN 0564-6162. DOI: 10.4213/tmf9195. URL: http://mi.mathnet.ru/tmf9195 (дата обр. 26.06.2017).
4. *Марсден Д., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Пер. с англ. Л.М. Лермана. М.: Мир, 1980. 368 с.
URL: http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0611154 (дата обр. 15.03.2017).
5. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
URL: http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0542758 (дата обр. 14.03.2017).
6. *Кащенко С.А., Преображенская М.М.* Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега–де Фриза // Известия высших учебных заведений. Математика. 2018. № 2. С. 54–68. ISSN 0021-3446. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm9330 (дата обр. 20.12.2017).
7. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32. ISSN 0005-2310. URL: http://mi.mathnet.ru/at2615 (дата обр. 24.04.2017).
8. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т.* О системе типа реакция–диффузия–перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 7. С. 1005–1017. ISSN 0044-4669. URL: http://mi.mathnet.ru/zvmmf991 (дата обр. 24.04.2017).
9. *Кащенко С.А.* Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 383–386. ISSN 0869-5652.
DOI: 10.7868/S0869565216160052. URL: http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3559770 (дата обр. 09.06.2017).

References

1. Krasnyuk I.B., Stefanovic L.I., Yurchenko V.M. Analysis of oscillations of concentration in bounded binary mixtures taking into account surface effects. *Technical Physics*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 1445–1452.
2. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phis.*, 1958, vol. 28, pp. 258–267.
3. Kashchenko S.A. Bifurcations in Kuramoto–Sivashinsky equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2017, vol. 192, no. 1, pp. 958–973.
4. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and its Applications. Berlin: Springer, Applied Math. Series, no. 19, 1976, 408 p.
5. Bruno A.D. Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
6. Kashchenko S.A., Preobrazhenskaya M.M. Bifurcations in the generalized Korteweg–de Vries equation. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 49–61.
7. Butuzov V.F., Vasil'yeva A.B., Nefodov N.N. Asymptotic theory of contrasting structures. A survey. *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, 1068–1091.
8. Butuzov V.F., Levashova N.T. On a system of reaction–diffusion–transfer type in the case of small diffusion and fast reactions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 7, pp. 962–974.
9. Kashchenko S.A. Normal form for the Korteweg–de Vries–Burgers equation. *Doklady Akademii Nauk*, 2016, vol. 468, no. 4, pp. 383–386.

Плышевская Светлана Петровна – родилась в Кокчетаве (1974), окончила Симферопольский государственный университет (1996). С 1996 года по 2010 год работала на кафедре геометрии математического факультета Таврического национального университета, с 2010 года – на кафедре дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики (с 2015 года – факультета Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского). Опубликовала более 20 научных статей, связанных с теорией бифуркаций.

Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского
E-mail: splyshevskaya@mail.ru