



**Нелинейные волны в цилиндрической оболочке,
содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды
и конструкционного демпфирования в продольном направлении**

Ю. А. Блинков¹, Е. В. Евдокимова², Л. И. Могилевич²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77

E-mail: blinkovua@info.sgu.ru, eev2106@mail.ru, mogilevich@sgu.ru

Автор для переписки Блинков Юрий Анатольевич, blinkovua@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 9.04.2018, принята к публикации 27.06.2018

Тема и цель исследования. В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Наличие окружающей среды приводит к интегриродифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Кортевега–де Вриза, имеющему то же решение в виде уединенной волны – солитона. Оно не содержит произвольного постоянного волнового числа, в отличие от решения уравнения Кортевега–де Вриза. Поведение вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки описывается уравнениями динамики и неразрывности. Они решаются вместе с граничными условиями прилипания жидкости к стенке оболочки. **Методы.** Решение представляется прямым разложением искомых функций по малому параметру задачи гидроупругости и сводится к задаче для уравнения гидродинамической теории смазки. Решение этих уравнений и определяет напряжения со стороны жидкости, действующие на оболочку в продольном направлении и по нормалям. Наличие жидкости в оболочке добавляет в уравнения продольных волн деформаций член уравнения, который не позволяет найти точное решение. Конструкционное демпфирование в продольном направлении добавляет такой же точно член уравнения, что и наличие жидкости. Они имеют разные знаки, когда коэффициент Пуассона меньше 1/2. В противном случае знаки совпадают. Наличие жидкости и конструкционного демпфирования требует численного исследования. Численное исследование проводится с использованием современного подхода, основанного на универсальном алгоритме коммутативной алгебры для интегроинтерполяционного метода. **Результаты.** В результате построения разностного базиса Грёбнера сгенерированы разностные схемы типа Кранка–Николсон, полученные с использованием базовых интегральных разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему уравнений.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, упругие цилиндрические оболочки.

Образец цитирования: Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 32–47.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Nonlinear waves in cylinder shell containing viscous liquid, under the impact of surrounding elastic medium and structural damping in longitudinal direction

Yu. A. Blinkov¹, E. V. Evdokimova², L. I. Mogilevich²

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

77, Politechnicheskaya str., 410054 Saratov, Russia

E-mail: blinkovua@info.sgu.ru, eev2106@mail.ru, mogilevich@sgu.ru

Correspondence should be addressed to Blinkov Yuri A., blinkovua@info.sgu.ru

Received 9.04.2018, accepted for publication 27.06.2018

Subject of the study. The present article deals with further developing of perturbation method for deformation non-linear waves in an elastic cylinder shell, filled with viscous incompressible liquid, surrounded by an elastic media and under construction damping in longitudinal direction. Surrounding medium presence leads to integro-differential equation, to generalizing Korteweg–de Vries ones and possessing the same soliton in the form of a solitary wave – a soliton. It does not contain an arbitrary constant number unlike Korteweg–de Vries equation solution. The viscous incompressible liquid presence inside the shell behavior is described by means of dynamics and continuity equation, is solved together with boundary conditions liquid adhesion to a shell wall. **Methods.** The solution is presented by direct expansion of unknown function by small parameter of hydroelasticity problem and reduced to the problem for hydrodynamics lubrication theory equations. The equations solution defines the tensions on the part of the liquid, the tensions influence the shell longitudinal and normal directions. The liquid presence in the shell adds to longitudinal deformation waves equations one more equation member, which does not allow to find exact solution. Construction damping in a longitudinal direction adds the same equation member, like liquid presence does. They possess opposite signs in the case of shell Poisson coefficient being smaller than 1/2. In contrary case signs coincide. Liquid presence in the shell and construction damping demand for numerical research. The liquid presence leads to the equation, generalizing Korteweg–de Vries equation, lacking the exact solution and demanding numerical investigation. The numerical investigation is carried out with the use of the modern approach, relying on the universal algorithm of commutative algebra for integro-interpolation method. **Results.** As a result of difference Gröbner basis construction, the difference Crank–Nicolson type schemes are generalized. The schemes were obtained due to the use of basic integral difference correlations, approximating the initial equations system.

Key words: non-linear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell.

Reference: Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in cylinder shell containing viscous liquid, under the impact of surrounding elastic medium and structural damping in longitudinal direction. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 32–47. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47>

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 16-01-00175-a).

Введение

Взаимодействие упругих элементов конструкций с жидкостью рассматривалось в разных аспектах. Взаимодействие упругих оболочек с идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкостью (газом) исследовано в работах [1, 2]. В абсолютно жесткой трубе с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического поведения по времени перепада давления анализировалось в [3], а при пульсирующем движении вязкой жидкости в соосных упругих оболочках конечной длины – в [4, 5]. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [6–9], а с учётом вращения жидкости – в [10–12].

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих тонкостенных конструкциях. Проблема распространения волн в газовой динамике и теории упругих оболочек изучается при помощи линеаризованных уравнений. При этом скорость распространения возмущений считается постоянной и равной скорости

распространения звука в невозмущенной среде. Однако ряд явлений, несмотря на малые значения зависимых переменных, целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины зависимых переменных и исследуется на базе нелинейных уравнений. Эти исследования проводятся с помощью методов возмущений, таких как метод сращиваемых асимптотических разложений, метод деформируемых координат, метод многомасштабных разложений.

Впервые уравнения Кортевега–де Вриза для продольных нелинейных волн в стержнях получены в [13], а с учетом диссипативных факторов уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера для стержней и пластин получены в [14]. Обзор работ о распространении нелинейных волн и экспериментальном обнаружении таких волн приведен в [15].

Волны деформаций в упругих цилиндрических оболочках рассматривались в [16–18]. Кроме того, проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, с позиции теории солитонов рассматривались в [19–21]. Получение точных решений эволюционных уравнений, включая уравнения распространения уединенных волн, рассмотрено в [22, 23].

Известны математические модели, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости на волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [24–26]. При этом найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает. Решение поставленной в работе задачи для геометрически нелинейных оболочек представляется актуальным и сложным и имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанобъектов, в частности, карбоновых нанотрубок.

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой, и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Показано влияние вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку, окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования на поведение продольных волн деформации в упругой цилиндрической оболочке.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, Θ, x для случая осесимметричного течения записываются в виде [27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости согласно подходу Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \text{при } r = R - W. \quad (2)$$

Здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; W – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки, $h_0 = 2(R - R_1)$, где R_1 – внутренний радиус оболочки, и $h_0 \ll R$.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Лява, рассмотрим материал с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i

$$\sigma_i = E e_i \quad (3)$$

(E – модуль Юнга).

Кроме того, учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной, пропорциональной $\partial U / \partial t$, добавляемой к даламберовой силе инерции, в продольном направлении [28]

$$\varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь ε_1 – коэффициент демпфирования; ρ_0 – плотность материала оболочки; μ_0 – коэффициент Пуассона; $\sqrt{E / [\rho_0 (1 - \mu_0^2)]} = c_0$ – скорость распространения продольных волн в оболочке; l – длина волны.

Уравнения динамики геометрически нелинейной оболочки с учетом (3), (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \\ & - \varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t} - \left[k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U - k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3 \right] = -q_x - U \frac{\partial q_x}{\partial x} + W \frac{\partial q_x}{\partial r}; \\ & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \left\{ \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{R} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \frac{W}{R^2} \right\} - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \right\rangle + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \\ & + \left[k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] = q_n + U \frac{\partial q_n}{\partial x} - W \frac{\partial q_n}{\partial r}. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь q_x, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри оболочки. Выражения в

квадратных скобках системы (5)

$$\begin{aligned} & -k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3, \\ & k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

характеризуют реакцию Власова–Леонтьева [29,30] упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения. Выражение $-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3$ – реакция на продольное перемещение, а слагаемые $k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W$ – реакция на сдвиг, $-2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ – реакция на сдвиг, $m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ – инерционная реакция. Безразмерные коэффициенты порядка единицы k_1, k_2, k_3, t_1, m_0 – введены в [29,30] в размерном виде.

Поверхностные напряжения со стороны жидкости, снесенные на невозмущенную срединную поверхность оболочки ($W \ll R$), определяются формулами

$$q_x = \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (7)$$

2. Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости в оболочке

Принимая l (длину волны) за характерную длину, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (5)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R}. \quad (8)$$

Здесь w_m, u_m – характерные значения прогиба W и продольного перемещения U . Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{u_m R}{l h_0} = O(1), \quad \frac{w_m}{h_0} = O(1), \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 = O(\varepsilon), \quad k_1 = O(1), \quad k_3 = O(1), \quad k_2 = O(1), \quad t_1 = O(1), \quad m_0 = O(1),$$

где ε – малый параметр задачи (5).

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (10)$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, τ – быстрое время, и зависимые переменные в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (11)$$

Подставляя (8), (10), (11) в уравнения (5) с учетом оценок (9), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0, \end{aligned}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (12)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (13)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (12) и (13), находится уравнение, являющееся составным, для u_{10}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l^2} [1 + m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2} u_{10}^3 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = - \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения (14) равна нулю и получается известное уравнение – модифицированное уравнение Гарднера–Бюргера–Островского для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}$.

3. Определение напряжений, действующих со стороны жидкости

Для определения правой части уравнения (14) введем безразмерные переменные и параметр

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R^3} P, \quad \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру ε

$$v_x = v_x^0 + \varepsilon v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots \quad (16)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi=0$ – гидродинамическая теория смазки), считая $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \ll 1$ (ползущие течения [31]), и в нулевом приближении по ε получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (17)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad \text{при } r^* = 0, \\ v_r^0 = - \frac{\partial u_3}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \quad \text{при } r^* = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из решения задачи (17), (18) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \cdot \left. \frac{\partial p^0}{\partial x^*} \right|_{r^*=1} = 8 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right]. \quad (19)$$

Учитывая, что были введены переменные (10), (11), и имея соотношения (12), (13), из (19) получим

$$P^0 = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} [2\mu_0 - 1] u_{10},$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} [2\mu_0 - 1] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \quad (20)$$

С принятой точностью по ε , ψ из (7) найдем

$$q_x = \varepsilon \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}, \quad q_n = -\frac{\varepsilon}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0$$

и, следовательно, выражение в правой части уравнения (14) принимает вид

$$q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = -4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \varepsilon \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнение (14), окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} [1 + m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} +$$

$$+ \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2} u_{10}^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \quad (22)$$

Замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_1 \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad \tilde{t} = c_3 \tau \quad (23)$$

позволяет записать уравнение (22) в виде

$$\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} + (s_3 - s)\varphi - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0. \quad (24)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (23) в (22) и имеют вид

$$c_1 = \sigma_0^{-1} \sigma_4^{1/2} \sigma_1^{1/2}, \quad c_2 = \sigma_4^{1/4} \sigma_1^{-1/4}, \quad c_3 = \sigma_4^{3/4} \sigma_1^{1/4},$$

при этом вводятся обозначения

$$s_2 = \sigma_2 c_2 c_3^{-1}, \quad s_3 = \sigma_3 c_3^{-1}, \quad s = \sigma c_3^{-1}, \quad s_5 = \sigma_5 c_1^2 c_2^{-3} c_3^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} 6\sigma_0 &= \frac{u_m \sqrt{1-\mu_0^2}}{l\varepsilon} \frac{1}{2}, & \sigma_2 &= \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2}, & \sigma_3 &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, & \sigma_4 &= \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2}, & \sigma_5 &= \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2}, \\ \sigma_1 &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} [1+m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\}, & \sigma &= 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} [1-4\mu_0^2]. \end{aligned}$$

Отметим, что при отсутствии конструкционного демпфирования имеем $s_3 = 0$, $s > 0$ при $\mu_0 < 1/2$ для неорганических материалов, $s < 0$ при $\mu_0 > 1/2$ для живых организмов и $s = 0$ при $\mu_0 = 1/2$ для несжимаемого материала, такого как резина, или при отсутствии жидкости. Заметим, что случай $s_3 = s$ равносильен отсутствию влияния жидкости внутри оболочки.

При отсутствии конструкционного демпфирования и жидкости или для случая $s_3 = s$ получим из (24) уравнение

$$\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0, \quad (25)$$

которое имеет точное решение

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} + 2s_5 + s_2 \right) \tilde{t} \right] \right\}. \quad (26)$$

В случае отсутствия окружающей упругой среды уравнение (25) превращается в уравнение Кортевега–де Вриза с точным решением

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} \right) \tilde{t} \right] \right\} \quad (27)$$

при произвольном значении s_5 .

4. Численное моделирование

В работах [32–34] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате, разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом, получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем уравнение (24) в виде системы в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (-3\varphi^2 - \varphi_{\eta\eta} - s_2\varphi) dt + \varphi d\eta + \iint_{\Omega} (-s\varphi - \Psi + s_3\Psi^3) dt d\eta &= 0, \\ \int_b^a (\Psi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta}) d\eta &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

для любой области Ω и любого интервала $a > b$. Здесь связь $\int \varphi d\eta = \Psi$ записана через ее производную. Это связано с тем, что для устойчивости численного решения разностной схемы

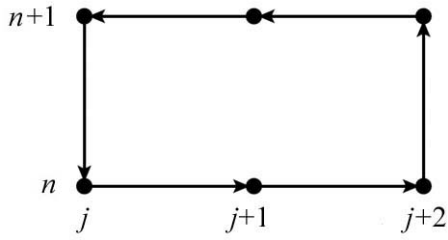


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (28)

Fig. 1. Basic contour for the equation (28)

необходимо диагональное преобладание в соответствующей ей матрице. В результате, для Ψ будет получено уравнение второго порядка и нужно будет лишь зафиксировать вторую произвольную константу в решении. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \phi(t_n, \eta_j)$, $U_j^n = \Psi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1, для значений a, b выберем точки $j+2, j$, соответственно.

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta &= u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta} d\eta &= u_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u_{\eta}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} U_{\eta} d\eta &= U(t, \eta_{j+1}) - U(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (28), (29) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-3 \left(u_j^{2n} + u_j^{2n+1} - u_{j+2}^{2n} - u_{j+2}^{2n+1} \right) - \left(u_{\eta\eta j}^n + u_{\eta\eta j}^{n+1} - u_{\eta\eta j+2}^n - u_{\eta\eta j+2}^{n+1} \right) - \right. \\ & \left. - 2s_2 \left(u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n \right) \cdot 2h - \left(s \left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n \right) - \right. \\ & \left. - \left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j+1}^n \right) + s_3 \left(U_{j+1}^{3n+1} + U_{j+1}^{3n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\ & \left(U_{\eta_{j+2}}^n - U_{\eta_j}^n \right) - \left(u_{j+2}^n - u_j^n \right) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(u_{\eta_{j+1}}^n + u_{\eta_j}^n \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n,$$

$$u_{\eta_{j+1}}^n \cdot 2h = u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_j}^n,$$

$$\left(U_{\eta_{j+1}}^n + U_{\eta_j}^n \right) \cdot \frac{h}{2} = U_{j+1}^n - U_j^n.$$

Поскольку пакет [32] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (24) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F = 3u^2$. За счет выбора допустимого упорядочения, так чтобы $u \succ U \succ \dots \succ F$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность к искомой разностной схеме.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (24), аналогичную схеме Кранка–Николсон для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + ((u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + \\ & + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n))/4h^3 + s_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \\ & - s \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} - \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + s_3 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} = 0, \\ & \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + U_j^n}{h^2} - \frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2h} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало двух-трёх. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://scipy.org>).

В результате проведенных вычислительных экспериментов на известном точном решении при частном наборе параметров для уравнения (24) получено хорошее согласование численного и аналитического (26) решений при $s_3 = s$ (рис. 2). Этот результат является тестом для представленного программного обеспечения.

Следует отметить, что скорость нелинейной уединенной волны, согласно (26), (27), больше при наличии упругой окружающей среды, чем при ее отсутствии. Численный расчет урав-

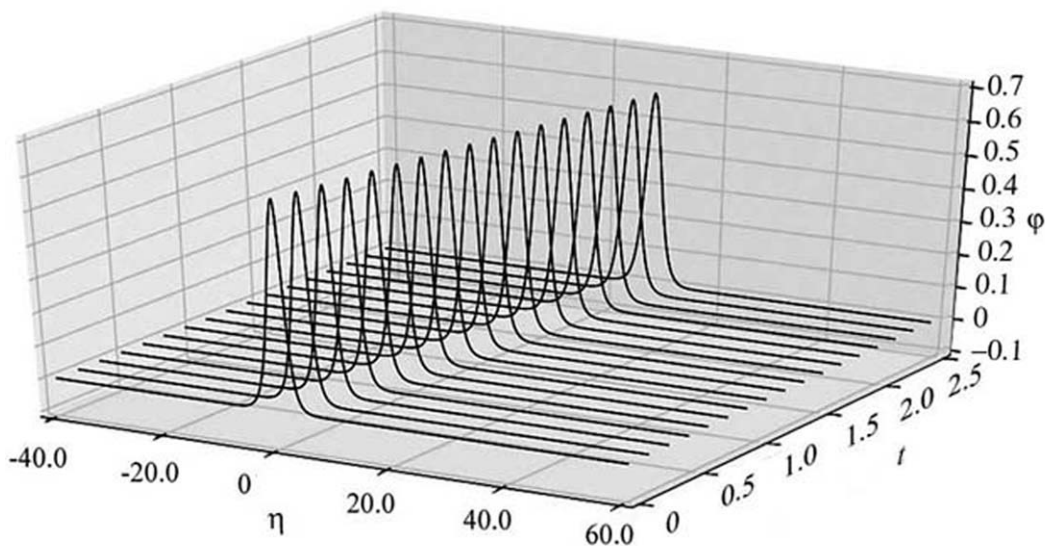


Рис. 2. Графики численного решения уравнений (24) при $s = s_3 = 1.0$, $s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 2. Equations (24) numerical solution graphs under $s = s_3 = 1.0$, $s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from exact solution (26) under $t = 0$

нения (24) с начальным условием в виде решения (26) при $\tilde{t} = 0$ показал, что имеет место затухание амплитуды волны при $s_3 - s > 0$ (рис. 3) и рост амплитуды при $s_3 - s < 0$ (рис. 4).

При отсутствии жидкости $s = 0$ происходит затухание волны за счет конструкционного демпфирования, а при отсутствии конструкционного демпфирования $s_3 = 0$ происходит затухание волны при $s < 0$ ($\mu_0 > 1/2$) и рост амплитуды волны при $s > 0$ ($\mu_0 < 1/2$).

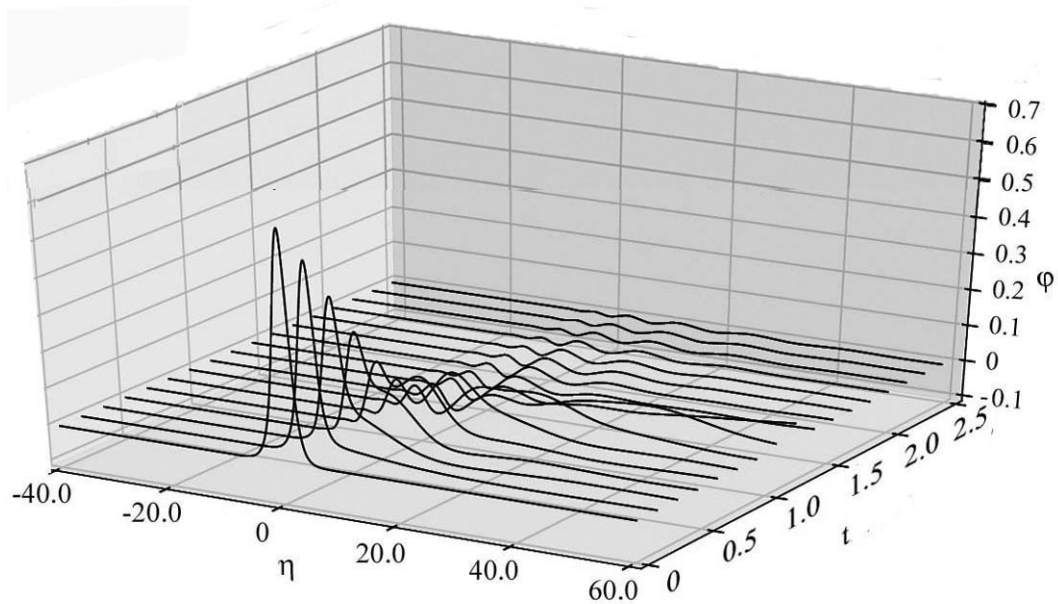


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (24) при $s_3 = 1.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 3. Equations (24) numerical solution graphs under $s_3 = 1.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from the exact solution (26) under $t = 0$

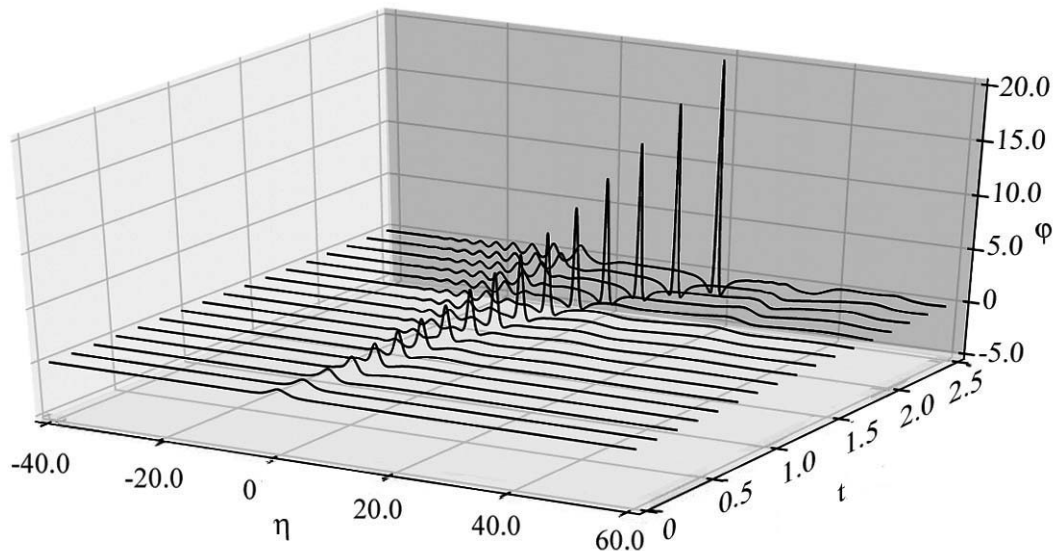


Рис. 4. Графики численного решения уравнений (24) при $s_3 = 0.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 4. Equations (24) numerical solution graphs under $s_3 = 0.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from the exact solution (26) under $t = 0$

Заключение

В представленной работе было проведено исследование модели волновых явлений в нелинейной упругой цилиндрической оболочке типа Кирхгофа–Лява, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость. Выполненные вычислительные эксперименты, позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости и конструкционного демпфирования на распространение нелинейных волн в упругой оболочке, окруженной упругой средой. Наличие упругой среды приводит к увеличению скорости волны.

Библиографический список

1. Клизман Е.П., Клизман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 128–135.
2. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Анализ устойчивости цилиндрических оболочек, содержащих жидкость с осевой и окружной компонентами скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 155–165.
3. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах / Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с. С. 149–171.
4. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник СГТУ. 2007. Т. 3, № 2(27). С. 15–23.
5. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 15–21.
6. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 1991. vol. 5, iss. 2. pp. 127–164. DOI:10.1016/0889-9746(91)90454-W
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 2002. vol. 16, iss. 6. pp. 795–809. DOI:10.1006/jfls.2002.0446
8. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI:10.1017/CBO9780511619694
9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // МТТ. 2004, № 5. С. 179–190.
10. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2010. Т. 3, № 2. С. 24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
11. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, № 2. С. 233–243. DOI:10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
12. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 94–102. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.1.12
13. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. Math. Phys. Sci. 1970. Vol. 4. Pp. 64–73.
14. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. and Appl. 1970. Vol. 32. Pp. 661–667.

15. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2017. Т. 10, № 2. С. 127–137. DOI:10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
16. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
17. *Ерофеев В.И., Клюева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках: Обзор // *Акустический журнал.* 2002. Т. 48, № 6. С. 725–740.
18. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стеснённым вращением // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2009. Т. 2, № 4. С. 67–75. DOI:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
19. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит. 2009. 320 с.
20. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Павлов И.С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2013. Т. 6, № 2. С. 140–150. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
21. *Землянухин А.И., Бочкарёв А.В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191. DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
22. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Непрерывные дробы, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика,* 2016. Т. 24, № 4. С. 71–85. DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
23. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2017. Т. 25, № 1. С. 64–83. DOI:10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
24. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2013. Т. 6, № 3. С. 336–345. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
25. *Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И.* Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // *Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Физика.* 2012. Т. 12, № 2. С. 12–18. DOI:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
26. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // *Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2015. Т. 15, № 2. С. 193–202. DOI:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202
27. *Лойцянский Л.Г.* *Механика жидкости и газа.* М.: Дрофа, 2003. 840 с.
28. *Вольмир А.С.* *Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости.* М.: Наука, 1979. 320 с.
29. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* *Балки, плиты и оболочки на упругом основании.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 490 с.
30. *Михасев Г.И., Шейко А.Н.* О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // *Труды БГТУ. Минск: БГТУ.* 2012. № 6 (153). С. 41–44.

31. Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В. Солитон в стенке нанотрубки и Стоксово течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 18. С. 48–54.
32. Блинков Ю.А., Гердт В.П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34. № 2. С. 67–80.
33. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // CASC. Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5743. Pp. 94–105. DOI:10.1007/978-3-642-04103-7_10
34. Amodio P., Blinkov Yuri, Gerdt V.P., La Scala R. On consistency of finite difference approximations to the Navier–Stokes equations // CASC. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8136. Pp. 46–60. DOI:10.1007/978-3-319-02297-0_4

References

1. Kligman E.P., Kligman, I.E., Matvienko V.P. Spectral problem for shells with fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2005, vol. 46, iss. 6, pp. 876–882. DOI:10.1007/s10808-005-0147-9
2. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability analysis of cylindrical shells containing a fluid with axial and circumferential velocity components. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, iss. 5, pp. 768–776. DOI:10.1134/S0021894412050161
3. Gromeka I.S. To the Theory of Fluid Flow in Narrow Cylindrical Tubes. Moscow: AS USSR, 1952, pp. 149–171 (in Russian).
4. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Mathematical modeling of the interaction of two cylindrical shells with a fluid layer between them in the absence of an outward flow under vibrations. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2007, vol. 3, iss. 2 (27), pp. 15–23 (in Russian).
5. Kondratov D.V., Kondratova N.Yu., Mogilevich L.I. Studies of the amplitude frequency characteristics of oscillations of the tube elastic walls of a circular profile during pulsed motion of a viscous fluid under the conditions of rigid jamming on the butt-ends. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, iss. 3, pp. 229–234. DOI:10.3103/S1052618809030030
6. Paidoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, iss. 2, pp. 127–164. DOI:10.1016/0889-9746(91)90454-W
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, iss. 6, pp. 795–809. DOI: 10.1006/jfls.2002.0446
8. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI:10.1017/CBO9780511619694
9. Mogilevich L.I., Popov V.S. Dynamics of the interaction between an elastic cylinder and a viscous incompressible fluid layer. *Mechanics of Solids*, 2004, iss. 5, pp. 179–190.
10. Bochkarev S.A. Natural vibrations of a rotating circular cylindrical shell containing fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, iss. 2, pp. 24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
11. Lekomtsev S.V. Finite-element algorithms for calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, iss. 2, pp. 233–243. DOI:10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
12. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 1, pp. 94–102. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.1.12

13. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, 64–73.
14. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1970, vol. 32, pp. 661–667.
15. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Inelastic interaction and splitting of deformation solitons propagating in the rod. *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, iss. 2, pp. 127–137. DOI:10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
16. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves of deformations in cylindrical shells. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 1995, iss. 1, pp. 52–58 (in Russian).
17. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates and shells: Review. *Acoustical Physics*, 2002, vol. 48, iss. 6, pp. 643–655. DOI:1063-7710/02/4806
18. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Katson V.M., Sheshenin S.F. Formation of deformation solitons in the Cosserat continuum with constrained rotation. *Computational Continuum Mechanics*, 2009, iss. 4, pp. 67–75. DOI:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
19. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Linear and Nonlinear Waves in Dispersive Continuous Media. Moscow: Fizmatlit, 2009. 320 p. (in Russian).
20. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 2, pp. 140–150. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
21. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, iss. 2, pp. 182–191 (in Russian). DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
22. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, iss. 4, pp. 71–85 (in Russian). DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
23. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25, iss. 1, pp. 64–83. DOI:10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
24. Blinkova A.Y., Blinkov Y.A., Mogilevich L.I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 3, pp. 336–345. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
25. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kovalev A.D., Mogilevich L.I. Mathematical and computer modeling of nonlinear waves dynamics in a physically nonlinear elastic cylindrical shells with viscous incompressible liquid inside them. Proceedings of Saratov University. *New Ser. Ser. Physics*, 2012. vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian). DOI:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
26. Blinkova A.Yu., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I. Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium. *Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 193–202. DOI:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202
27. Loytsiansky L.G. Mechanics of Liquid and Gas. Moscow. Drofa, 2003. 840 p. (in Russian).
28. Volmir A.S. Shells in a Fluid and Gas Flow: Hydroelasticity Problems. Moscow, Science, 1979. 320 p.
29. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. Beams, Plates and Shells on an Elastic Base. Moscow. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1960. 490 p.
30. Mikhasev G.I., Sheiko A.N. On the influence of the elastic nonlocality parameter on the natural

frequencies of vibrations of a carbon nanotube in an elastic medium. *Proceedings of BSTU*. Minsk: BSTU, 2012, iss. 6 (153), pp. 41–44.

31. Popov I.Yu., Rodygina O.A., Chivilikhin S.A., Gusarov V.V. Soliton in a nanotube wall and Stokes current in nanotube. *Technical Physical Letters*, 2010, vol. 36, iss. 9, pp. 852–875, DOI: 10.1134/S1063785010090221.
32. Blinkov Y.A., Gerdt V.P. Specialized computer algebra system GINV. *Programming and Computer Software*, 2008, vol. 34, iss. 2, pp. 112–123. DOI: 10.1134/S0361768808020096
33. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations. *CASC. Lecture Notes in Computer Science*, 2009, vol. 5743, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10
34. Amodio P., Blinkov Yu.A., Gerdt V.P., La Scala R. On consistency of finite difference approximations to the Navier–Stokes equations. *CASC. Lecture Notes in Computer Science*, 2013, vol. 8136, pp. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4



Блинов Юрий Анатольевич родился в Волгоградской области (1965), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1987). После окончания срочной службы в армии по настоящее время работает в СГУ. Заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995, ОИЯИ) и доктора физико-математических наук (2009, РУДН) в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ. Опубликовал 80 научных статей по этим направлениям.

Россия, 410013 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru



Евдокимова Екатерина Владимировна родилась в Саратове (1972), окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1995). В настоящее время работает в Саратовском филиале Самарского государственного университета путей сообщения и является аспирантом кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: eev2106@mail.ru



Могилевич Лев Ильич родился в Саратове (1946), окончил с отличием Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (1969) и аспирантуру СГУ (1972). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972, СГУ) и доктора технических наук в Киевском политехническом институте (1989). Работает профессором кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. Специалист в области математического моделирования нелинейных волн и колебаний в аэродинамике и в упругогидродинамике. Автор более 300 научных работ по этим направлениям.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: mogilevich@sgu.ru