УДК 51(09)

Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика

Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
Россия, 309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42
E-mail: mukhiny@mail.ru
Поступила в редакцию 27.04.2018, принята к публикации 29.05.2018

Цель. Целью работы является изучение научного наследия А.М. Ляпунова с позиций нелинейной физики. Фундаментальной важности вклад Ляпунова определяется не только созданными им методами, которые вошли в основу математического аппарата при изучении нелинейных явлений. Его идеи и введенные им понятия способствовали формированию концепций и принципов нелинейной динамики. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ Ляпунова с привлечением имеющейся литературы, касающейся его творчества. **Результаты.** Творчество Ляпунова тесно переплетается с деятельностью А.Пуанкаре, среди многих других фундаментальных достижений которого особое значение имеет качественная теория, составившая концептуальную основу нелинейной динамики. Ляпунов явился ближайшим продолжателем Пуанкаре в области качественной теории. Качественной по своей сути является теория устойчивости Ляпунова, одно из крупнейших достижений математики XIX в. С этих позиций Ляпунов подходит к самой постановке задачи устойчивости, выделяя невозмущенное и возмущенное движение. Он разработал методы решения задач устойчивости, предложив и строго обосновав конкретные алгоритмы. Одной из труднейших проблем математики и механики уже в течение нескольких столетий является проблема фигур равновесия вращающейся жидкости. Она имеет многочисленные приложения, стимулировала появление новых идей и целых направлений исследований. В решение проблемы фигур равновесия Ляпунов вместе с Пуанкаре внес определяющий вклад. Ляпунов подробно и совершенно строго исследовал серии новых фигур равновесия, их бифуркации и устойчивость. При этом он создал новые аналитические методы исследования, в частности, работы Ляпунова и Пуанкаре дали мощный импульс развитию теории нелинейных интегральных уравнений. Важное общенаучное значение имеет дальнейшее развитие результатов Ляпунова. Фундаментальное значение для нелинейной динамики приобрели показатели Ляпунова. В основе их использования лежит мультипликативная эргодическая теорема. Показатели Ляпунова связаны с другой важнейшей величиной, также являющейся мерой хаотичности и неустойчивости – энтропией Колмогорова–Синая. **Обсуждение.** Введенные Ляпуновым понятия и созданные методы имеют непреходящее значение, они не только составили математический аппарат, но в значительной степени формируют концепции и принципы нелинейной динамики.

Ключевые слова: нелинейные системы, качественные методы, устойчивость и неустойчивость, фигуры равновесия, бифуркации, показатели Ляпунова, энтропиия Колмогорова–Синая.

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120

Образец цитирования: Мухин Р.Р. Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 95–120. https://doi.org/ 10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120

Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics

R. R. Mukhin

Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch)
of National University of Science and Technology «MISiS»
42, mkr Makarenko 309516 Stary Oskol, Belgorod region, Russia
E-mail: mukhiny@mail.ru
Received 27.04.2018, accepted for publication 27.04.2018

Aim. The aim of the work is to study the scientific heritage of A.M. Lyapunov from the standpoint of nonlinear physics. Fundamental importance Lyapunov's contribution is determined not only by the methods he created, which became the basis of the mathematical apparatus in the study of nonlinear phenomena, but his ideas and concepts introduced by him contributed to the formation of concepts and principles of nonlinear dynamics. **Method.** The study is based on an analysis of Lyapunov's original works with the involvement of existing literature on his scientific heritage. **Results.** Lyapunov's creativity is closely intertwined with the works of A. Poincaré, among many other fundamental achievements of which the qualitative theory that formed the conceptual basis of nonlinear dynamics is of particular importance. Lyapunov was the closest successor to Poincare in the field of qualitative theory. Qualitative in its essence is the Lyapunov stability theory, one of the greatest achievements of mathematics of the XIX century. From these positions Lyapunov approaches the very formulation of the stability problem, singling out the unperturbed and disturbed motion. He developed methods for solving stability problems by proposing and rigorously justifying specific algorithms. One of the most difficult problems of mathematics and mechanics for several centuries is the problem of the equilibrium figures of a rotating liquid. It has numerous applications, stimulated the emergence of new ideas and whole research directions. To solving the problem of the figures of equilibrium, Lyapunov together with Poincare made a decisive contribution. Lyapunov studied in detail and quite rigorously a series of new equilibrium figures, their bifurcations and stability. At the same time he created new analytical methods of research, in particular, the works of Lyapunov and Poincaré gave a powerful impetus to the development of the theory of nonlinear integral equations. An important general scientific value is the further development of Lyapunov's results. The Lyapunov exponents have become fundamental for nonlinear dynamics. Their use is based on the multiplicative ergodic theorem. The Lyapunov exponents are related to another most important quantity, also a measure of randomness and instability – the Kolmogorov–Sinai entropy. **Discussion.** The concepts introduced by Lyapunov and the methods created have an enduring significance, they have not only formed a mathematical apparatus, but to a great extent form the concepts and principles of nonlinear dynamics.

Key words: nonlinear systems, qualitative methods, stability and instability, equilibrium figures, bifurcations, Lyapunov exponents, Kolmogorov–Sinai entropy.

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120

References: Mukhin R.R. Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 95–120. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120

> For a physicist mathematics is not just a tool by means of which phenomena can be calculated, it is the main source of concepts and principles by means of which new theories can be created.
>
> *Freeman Dyson.* Mathematics in the Physical Sciences

Введение. В этом году исполняется сто лет со дня трагической гибели Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918) и, полагаю, надлежит не только воздать должное памяти человека, являющегося гордостью отечественной науки, но и постараться вспомнить о его вкладе в формирование современной нелинейной физики.

Творчеству Ляпунова уделено немало места в историко-научной литературе (см., например, [1–19 и др.]). Если даже ограничиться наследием Ляпунова в теории устойчивости – оно имело огромное воздействие на развитие теории дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальных и эволюционных уравнений в банаховых пространствах, нелинейных параболических уравнений, теории хаоса, дискретных динамических систем, разностных уравнений, в механике, теории регулирования, математической биологии, динамике популяций, экономике [16]. Из всего этого неисчерпаемого многообразия в данной работе внимание концентрируется на наследии Ляпунова с позиций нелинейной физики. Приведенные выше слова Ф. Дайсона как нельзя лучше характеризуют место и значение наследия Ляпунова. Введенные им понятия и созданные методы составляют не только математический аппарат, это способ думать и видеть.

Качественные методы. Говорить о творчестве Ляпунова невозможно без упоминания Анри Пуанкаре (1854–1912) – одной из крупнейших фигур в науке за всю ее историю – так тесно переплелась деятельность обоих математиков. С зарождения качественных методов в работах Пуанкаре и Ляпунова следует начать отсчет появления нелинейной динамики как отдельной области знания.

Одной из насущных задач математики XIX–XX вв. являлось интегрирование дифференциальных уравнений. Во многом здесь питательной средой служили задачи механики и физики. Несмотря на известные успехи, возможности проинтегрировать уравнения в квадратурах оставались весьма ограниченными. Здесь наметилось несколько путей. С одной стороны, разрабатывались практические методы, когда с помощью разложения в бесконечные ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений можно было получить решения с требуемой степенью точности. Другой подход был предложен Софусом Ли на основе теории непрерывных групп преобразований, которая, как он сам видел, должна была стать аналогом теории Галуа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Как видел Пуанкаре подходы к вопросам интегрирования уравнений, он писал в составленном им самим «Аналитическом резюме» своих работ:

«Можно задаться целью выразить интегралы посредством разложений, справедливых *всегда* и более не ограниченных какой-либо частной областью. При этом приходят к введению в науку новых трансцендентностей; и это введение необходимо, так как старые известные функции позволяют интегрировать лишь небольшое число дифференциальных уравнений» [20, с. 583].

Этот путь, пролегающий через аналитическую теорию дифференциальных уравнений, и самим Пуанкаре активно разрабатывавшийся применительно к линейным дифференциальным уравнениям, привел его к открытию автоморфных функций. Но Пуанкаре предложил для интегрирования уравнений и совершенно другой подход, исходя из качественной теории. Ее основы были им заложены в серии четырех мемуаров *«Mémoire sur les courbes définies par une équations differentielle»* (*«О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями»*), выходившими в 1881–1886 гг. [21]. Русский перевод под редакцией А.А. Андронова появился в 1947 г. [22]. В начале первого мемуара Пуанкаре четко формулирует проблему:

«В громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям» [22, с. 11].

«Именно с качественной части должно начинаться исследование всякой функции, и поэтому проблема, которая в первую очередь встает перед нами, – это *построение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. Это качественное исследование, когда оно будет полностью выполнено, будет очень полезно для вычисления значений искомой функции. <…> С другой стороны, это качественное исследование и само по себе представляет первостепенный интерес. К нему могут быть сведены различные, исключительно важные вопросы анализа и механики» [22, с. 12–13].

Качественные методы выявляют топологию всего множества решений, упор производится на решения как единого целого, а не на индивидуальные решения, выражаемые конкретными функциями. В постановке задачи и разработке качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений у Пуанкаре практически не было предшественников. Такое положение можно объяснить господством аналитических методов, где основные заслуги принадлежат школам О.Л. Коши и К. Вейерштрасса. Изучение проводилось переходом в комплексную область, и рассматривалось в окрестности отдельной точки, то есть носило, в отличие от качественного подхода, *локальный* характер. Фактически, качественной является теория Ш. Штурма об осцилляциях решений линейного дифференциального уравнения второго порядка (1836). Однако такие единичные случаи находились вне русла развития вопросов интегрирования [18, с. 163]. Можно отметить связь теоретико-функциональных идей Б. Римана с качественной теорией, в которой геометрия стала способом рассуждений. Создание качественной теории явилось революционным шагом, сами основатели качественной теории не осознавали в полной мере разрыв с традициями классической математики, это была новая математика и для нее открылось целое поле приложений. Оказалось, что математика может быть иной, чем только исследование аналитических структур. Такое понимание пришло лишь десятилетия спустя. Пожалуй, лучше всего о значении качественных методов сказал П.С. Александров в своем выступлении на торжественном заседании в честь столетия со дня рождения Пуанкаре на XI Международном конгрессе математиков (Гаага, 1954):

«Пуанкаре открыл для математики и целый мир новых проблем – проблем “качественного”, т.е. именно топологического характера, целый мир, по своему существу недоступный не только методам, но и самому, если так можно выразиться, мировоззрению “классической” математики, в центре которой находились формула и вычисление (т.е. техника оперирования с формулами). Таким образом, величайший представитель классической математики Пуанкаре, как никто другой “взорвал изнутри” ее традиции и открыл доступ в нее не только новым методам исследования, но, что может быть еще важнее, и новым способам видеть вещи и интересоваться ими» [23, с. 809–810].

Ляпунов был в конце XIX в. одним из немногих, кто проникся идеями качественных методов, и они в его трудах получили значительное дальнейшее развитие.

Теория устойчивости. Теория устойчивости является важнейшей и очень значительной частью качественной теории, и определяющее значение имели работы Пуанкаре и Ляпунова.

Бельгийский математик Ж. Мовен отнес 1892 год к «*annus mirabilis*» («*чудесный год*») [8] – так обозначают годы, отмеченные необычайно важными и позитивными событиями. Тогда вышел первый том «*Новых методов небесной механики*» Пуанкаре и главный труд Ляпунова по теории устойчивости «*Общая задача об устойчивости движения*» [24] – одно из самых значительных достижений математики XIX в. Идеи об устойчивости восходят еще к античности, и в науке Нового времени вопросы устойчивости постоянно находились в поле зрения. Такой интерес был обусловлен фундаментальной проблемой устойчивости Солнечной системы, прочности конструкций, устойчивости гидродинамических течений и т.д. История устойчивости до Пуанкаре и Ляпунова описывалась неоднократно (см., например, [7, 25, 26]). Коснемся лишь некоторых моментов, связанных с последующим изложением. Первая строгая постановка задачи об устойчивости была дана Л. Эйлером (1744), рассмотревшим вопрос устойчивости упругого стержня под действием продольных сил [27]. Ж.Л. Лагранж дал определение устойчивости и достаточное условие равновесия консервативной механической системы в небольшой заметке 1798 г. [28], позже включенное им во второе издание «*Аналитической механики*» (1811) [29, p. 97]. На современном языке это достаточное условие формулируется следующим образом: система находится в положении устойчивого равновесия, если в этом состоянии потенциальная энергия имеет строгий минимум. Эта важнейшая теорема механики была доказана Лагранжем с помощью разложения потенциальной энергии в ряд с точностью до второго порядка. Недостаток подхода Лагранжа был очевиден и в последующем в значительной степени восполнен П.Г. Лежен-Дирихле (1846), который указал, что могут вносить вклад также четвертый и более высокие порядки, но значение минимума потенциальной энергии по-прежнему сохраняется [30; 31].

Пуанкаре первым отметил, что используемое понятие устойчивости является неоднозначным. Он различает устойчивость по Лагранжу и устойчивость по Пуассону. Понятие устойчивости не является интуитивно ясным и нуждается в точном определении. Пуанкаре дал такое определение для некоторых частных случаев [22, с. 106–110; 32, с. 130–131]. Укажем также на забытую работу Н.Е. Жуковского, который дал строгое понятие орбитальной устойчивости и сформулировал для этого случая общие теоремы для нелинейных систем (1882) [33; 34, с. 324–325]. Концепция Жуковского согласуется с подходом Пуанкаре в случае равновесия или периодических движений. Идеи Пуанкаре оказали значительное влияние и явились источником вдохновения для Ляпунова, что он и отмечает в своем труде [24, с. 28–29].

Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad s = 1, 2, ..., n.$$

Далее он рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$.

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть *невозмущенным*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [24, с. 28–29].

Здесь сразу бросается в глаза отход от традиционного подхода в исследовании дифференциальных уравнений. Сам подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях всего множества траекторий посредством привлечения возмущенного движения. Рассмотрим главную идею подхода Ляпунова к устойчивости:

«Пусть $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ суть какие-либо данные непрерывные вещественные функции величин

$$q_1, q_2, ..., q_k, q_1', q_2', ..., q_k'.$$

Для невозмущенного движения они обратятся в некоторые известные функции t, которые означим соответственно через $F_1, F_2, ..., F_n$. Для возмущенного движения они будут некоторыми функциями величин

$$t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k, \varepsilon_1', \varepsilon_2', ..., \varepsilon_l'.$$

Когда все величины $\varepsilon_j, \varepsilon_j'$ равны нулю, величины

$$Q_1 - F_1, Q_2 - F_2, ..., Q_n - F_n$$

будут равны нулю для всякого t. Но если постоянные $\varepsilon_j, \varepsilon_j'$, будучи нулями, предполагаются все же все бесконечно малыми, то является вопрос, можно ли назначить такие бесконечно малые пределы для величин $Q_s - F_s$, которых последующие никогда не превзошли бы по численным значениям?

Решение этого вопроса, который составит предмет наших изысканий, зависит как от характера рассматриваемого невозмущенного движения, так и от выбора функций $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ и момента времени t_0. При определенном выборе последних ответ на этот вопрос будет, следовательно, характеризовать в известном отношении невозмущенное движение, определяя собой то свойство последнего, которое будем называть *устойчивостью*, или противоположное ему, которое будем называть *неустойчивостью*» [24, с. 34].

На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех векторов $\mathbf{x}(t)$ таких, что $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$, при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \varepsilon$. Кроме того, Ляпунов вводит очень важное понятие асимптотической устойчивости: при $t \to \infty$ $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t_0)| \to 0$.

Отметим концептуальную важность введенных понятий *устойчивости* и *неустойчивости*. Особое внимание обратим на понятие неустойчивости, которое обрело первостепенное значение и содержательность в целом ряде научных направлений и было понято лишь в XX в., в отличие от науки XIX в., которую можно отнести к «эпохе устойчивости». Ляпунову принадлежит и терминология теории устойчивости, применяемая до настоящего времени. Определение Ляпунова является исходным пунктом всех последующих исследований, где используется понятие устойчивости, и с его работы [24] берет свое начало современная теория устойчивости, и не только в контексте механики. В последующем для определенных классов задач разными авторами использовались различные модификации теории устойчивости Ляпунова.

Для решения задач устойчивости Ляпунов разработал два метода. Первый метод основан на том, что удается каким-либо образом проинтегрировать дифференциальные уравнения возмущенного движения. В работах его предшественников для этого обычно использовали разложения правых частей уравнений в ряды по степеням $\mathbf{x}$, а поскольку рассматривались решения при малых начальных значениях $\mathbf{x}$, то ограничивались линейным приближением, которое восходит еще к XVIII–началу XIX в. (Лагранж, Лаплас, Пуассон) и широко использовалось следующим поколением исследователей (У. Томсон и П. Тэт [35], Э. Раус [36, 37], Н.Е. Жуковский [33] и др.). Но это уже была совсем другая задача, сведение нелинейной задачи к линейной не всегда корректно. Это ясно сейчас, но в то время такое утверждение не укладывалось в рамки господствовавших воззрений. Еще далеко было до принципов «нелинейного мышления» Л.И. Мандельштама [38]: нелинейные задачи являются самостоятельным объектом исследования и должны рассматриваться сами по себе, а не как поправки к линейным случаям. Движение неустойчивой системы в линейном приближении может быть устойчивым и наоборот. Оставалось неясным, когда такое линейное приближение является справедливым. Ляпунов дал совершенно строгое решение этой задачи. Не будем касаться других результатов, полученных с помощью первого метода: сомнительные случаи применимости линейного приближения, исследование уравнений с постоянными, с периодическими коэффициентами и др.

Перейдем ко второму методу решения задач устойчивости. Ляпунов указывает:

«К другой [категории. – *Р.М.*] мы причислим все те, которые основываются на принципах, не зависящих от разыскания каких-либо решений дифференциальных уравнений возмущенного движения. Таков, например, известный способ исследования устойчивости равновесия в случае существования силовой функции» [24, с. 46–47].

Здесь Ляпунов имеет в виду теорему Лагранжа–Дирихле, когда устойчивость равновесия следует из максимума силовой функции. Совокупность методов решения задач устойчивости без решения уравнений возмущенного движения составляет *второй метод Ляпунова*. В этом случае строится вспомогательная функция $V(t, \mathbf{x})$ (функция Ляпунова). На ее основе Ляпунов построил очень эффективный и обладающий большой общностью математический аппарат, позволяющий простым и единообразным способом решать самые разные задачи устойчивости. Главная здесь трудность заключается в удачном выборе функция Ляпунова. Второй метод Ляпунова является важнейшим продвижением в качественной теории после Пуанкаре, в полной мере соответствующим самому духу качественного подхода. Первый и второй метод дополняют друг друга, но второй метод вследствие своей общности стал основным для приложений. Теория устойчивости Ляпунова непосредственно связана с глубинными вопросами гидродинамики, теории автоматического регулирования, стала неотъемлемой частью физики, небесной механики, биологии, других естественных наук, экономики, некоторых социальных наук, многих инженерных дисциплин. С 1950-х гг. теория устойчивости Ляпунова стала общепризнанной во всем мире.

Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Бифуркации. Теперь коснемся еще одной стороны наследия Пуанкаре и Ляпунова, также имеющего первостепенное научное значение, в том числе и для нелинейной физики. Речь идет о большой серии работ обоих математиков по фигурам равновесия вращающейся жидкой массы. А. Эддингтон говорил, что одна из самых глубоких загадок Вселенной заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов [11]. С этих позиций становится ясной актуальность задачи о фигурах равновесия. Эта задача восходит еще к И. Ньютону, который первым осознал значение сил тяготения для формы небесных тел. В книге III «*Начал*» при рассмотрении гравитационного равновесия вращающейся однородной жидкой массы Ньютон установил, что даже при медленном вращении фигура может приобрести небольшую сплюснутость у полюсов. Далее он отметил, что при равновесии должна иметь место пропорциональность между сжатием фигуры вращения и причиной этого сжатия, определяемого отношением центробежного ускорения на экваторе и гравитационным ускорением на поверхности [39, с. 531–537]. Проблема фигур равновесия вращающейся жидкой массы остается труднейшей и очень важной задачей математики и механики до настоящего времени и, видимо, она не имеет общего решения. Трудности здесь того же рода, что и для любой многочастичной задачи. В такой системе для описания состояния любой частицы требуется информация о её взаимодействии с другими частицами, а это взаимодействие, в свою очередь, зависит от состояния частиц. В задачах о фигурах равновесия требуется знание формы поверхности, в каждой точке которой равнодействующая сил гравитации и центробежных сил будет перпендикулярна этой поверхности. Между тем, гравитационное взаимодействие между частицами само зависит от формы поверхности. Эта задача продолжает стимулировать поиски новых аналитических методов и новых подходов для своего решения, допускает нетривиальные обобщения, лежит в основе целых направлений современной астрофизики, таких как, например, теория вращающихся звезд [40]. Место и значение этой задачи в науке XVIII–XIX вв. видно уже из того, кто ею занимался: помимо Ньютона, это А. Клеро, К. Маклорен, Т. Симпсон, П.Л. Мопертюи, Ж. Даламбер, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Риман, В. Томпсон (Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев. История этой задачи до XIX в. хорошо описана в книге И. Тодхантера [41]. Маклорен (1742) [42] уточнил и обосновал результаты Ньютона, и фигуры равновесия, представляющие эллипсоиды вращения, получили название эллипсоидов Маклорена. Совершенно новый и неожиданный результат в 1834 г. получил Якоби [43]. Он показал, что трехосный эллипсоид с тремя неравными осями также может быть фигурой равновесия. Это было совершенно неожиданно, противоречило интуиции – фигура равновесия, не являющаяся телом вращения! Такие эллипсоиды получили название эллипсоидов Якоби, и они привели к новому направлению исследований. Значение эллипсоидов Маклорена и Якоби заключается в том, что они представляют собой решения модельных задач, которые используются в качестве первого приближения при описании формы небесных тел. При этом другие фигуры равновесия можно рассматривать как возмущения этих эллипсоидов.

Задача о фигурах равновесия попала в поле зрения Чебышева, возможно, под воздействием Лиувилля, с которым он находился в дружеских отношениях. Проблему фигур равновесия Чебышев предлагал и своим ученикам, в том числе и Ляпунову. Вот как вспоминает об этом сам Ляпунов во вступительной лекции курса «*О форме небесных тел*», читавшегося им осенью 1918 г. незадолго до смерти в Новороссийском (Одесском) университете. Это воспоминание интересно еще тем, что ясно показывает видение Чебышевым (и вообще Петербургской математической школы) научной деятельности:

«В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит, и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос.

"Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов". При этом он прибавил: "Вот если бы вы разрешили этот вопрос, на вашу работу сразу обратили бы внимание".

Впоследствии я узнал, что этот же самый вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софии Ковалевской.

Не знаю, пробовали ли решить этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения» [44, с. 368–369].

Никто до Чебышева не ставил задачу о фигурах равновесия таким образом, и она стала для Ляпунова делом всей жизни. Он дал точную постановку задачи об устойчивости фигур равновесия и решил ее в первом приближении, придя к следующим заключениям. С ростом момента импульса при некотором критическом значении J_1 эллипсоиды Маклорена теряли устойчивость и переходили в эллипсоиды Якоби. С дальнейшим ростом J при $J = J_2$ эллипсоиды Якоби становились неустойчивыми и переходили в новые фигуры, которые впоследствии были названы грушевидными. Эти результаты Ляпунова вошли в его магистерскую диссертацию (1884) [45]. Непреодолимые тогда трудности, о которых говорил Ляпунов, заключались в получении следующих приближений. К задаче Чебышева он вернулся лишь спустя почти два десятилетия. Но раньше появляется фигура Пуанкаре.

Задача о фигурах равновесия находится в давних традициях французской математики. Из серии работ Пуанкаре по данному вопросу для наших целей наибольший интерес представляет его объемистый мемуар (1885) [46]. В этой работе было введено понятие о бифуркациях и появляется сам термин:

«Les forms l'équilibre du systéme consideré sont données par les n équations:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = ... = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-memes d'une façon continue de maniére a former diverses series linéaires de forms d'équilibre.

I1 pourra d'ailleurs arriver qu'une meme forme d'équilibre appartienne á la fois a deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation*. On peut en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond a cette forme, trouver deux formes d'équilibre qui différent infiniment peu de la forme de bifurcation.

II peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier y, á se confondre, puis á disparaitre, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite*» [46, p. 49–50].

Перевод:

«Формы равновесия рассматриваемой системы задаются n уравнениями:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = ... = \frac{dF}{dx_n} = 0,$$

которые будут иметь ряд реальных решений, и когда y [переменный параметр. – *Р.М.*] будет меняться непрерывным образом, эти решения сами будут меняться непрерывно, формируя различные линейные ряды равновесных форм.

Кроме того, может случиться, что одна и та же форма равновесия принадлежит двум или более линейным рядам. Тогда мы скажем, что это *форма бифуркации*. Действительно, при значении y, бесконечно близком к значению, соответствующему этой форме, можно найти две формы равновесия, которые бесконечно мало отличаются от формы бифуркации.

Также может случиться, что при изменении y существуют два линейных ряда действительных форм равновесия, которые начинают смешиваться, а затем исчезают, потому что корни уравнений равновесия становятся мнимыми. Соответствующая форма равновесия будет тогда называться *предельной формой*».

Под линейной серией понимается непрерывное семейство фигур равновесия, зависящее от одного или нескольких параметров (в данном случае от угловой скорости). Такие серии образуют эллипсоиды Маклорена и эллипсоиды Якоби. При изменении параметра эти эллипсоиды претерпевают бифуркации, переходя в новые, неэллипсоидальные фигуры равновесия. Понятие бифуркации приобрело сейчас ключевое значение не только в нелинейной динамике, а в общенаучном смысле. Но еще в 1970-е гг., почти через столетие введения этого понятия, оно являлось относительно малоупотребительным. Чаще говорили о бифуркации как о раздвоении (бронхи, русла рек и т.д., см., например, БСЭ [47]). Именно развитие нелинейной динамики привело к распространению понимания бифуркации как разделения качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. Понятие бифуркации сегодня проникло не только в разные области науки, но и в политический лексикон и даже в обыденную речь.

Ляпунов вернулся к проблеме фигур равновесия после переезда из Харькова в Петербург (1902), когда он был избран в Академию наук и, оставив педагогическую работу, смог полностью отдаться научной деятельности. Фигуры равновесия стали главным предметом его интересов до конца жизни. Возвращению к задаче Чебышева Ляпунова подталкивали два обстоятельства. Первое – незавершенность работы 1884 г. [45], когда ему не удалось продвинуться дальше первого приближения. Второе обстоятельство заключалось в том, что в 1902 г. в небольшой заметке при рассмотрении грушевидных форм равновесия Пуанкаре дал в общей форме решение задачи во втором приближении [48]. Однако вопрос устойчивости грушевидных форм оставался открытым. Результаты Пуанкаре непосредственного ответа на него не давали, хотя, по его словам, грушевидные фигуры, по всей вероятности, должны быть устойчивы. Но прямое доказательство требовало длинных и трудоемких вычислений. Работа Пуанкаре вследствие постановки новых проблем и его высочайшего авторитета имела значительный резонанс в научном мире и, в том числе, привлекла внимание Джорджа Дарвина (сын Чарльза Дарвина), известного астрофизика, президента Лондонского королевского астрономического общества, который, используя результаты Пуанкаре [48], провел трудоемкие расчеты до второго приближения и пришел к выводу об устойчивости грушевидных форм [49; 50]. Устойчивость грушевидных фигур являлась краеугольным камнем развиваемой Дарвиным космогонической теории. Согласно этой теории, эволюция и распад грушевидных фигур на две или несколько частей могла объяснить образование двойных звезд и планет со спутниками и вообще происхождение двойных систем во Вселенной. Выводы Дарвина лишь на основе второго приближения совершенно не удовлетворили Ляпунова, и он провел основательное и строгое исследование этой сложнейшей задачи, потребовавшее значительных усилий. Свои результаты он опубликовал в серии мемуаров (1905–1914) [51–54]. Строгий подход Ляпунова привел к выводу о неустойчивости грушевидных форм. Развернувшаяся полемика утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учетом третьего приближения и подтвердил результаты Ляпунова о неустойчивости грушевидных форм (1917) [55]. К сожалению, ни Пуанкаре, ни Дарвин об этом уже не узнали, к тому времени их обоих не было в живых. Не совсем обоснованные, исходящие лишь из эвристических рассуждений, выводы Пуанкаре могут создать негативное впечатление от его подхода. Объяснение следует искать в особенностях стиля работы Пуанкаре, в его нетерпении, когда он «дойдя до вершины, не возвращался назад» [3, с. 171]. Такое не так уж редко встречается в творчестве крупнейших фигур в науке, когда их переполняют новые идеи, неудержимо влекущие их вперед. Вспомним А.Н. Колмогорова, которому неинтересно было дальше развивать проблему, когда принципиальная сторона была ясна. Вместо этого он предпочитал сосредоточиться на получении новых результатов. Отметим еще стиль работы Пуанкаре и Ляпунова. Для Пуанкаре был характерен подход с явным акцентом на геометрический образ мышления, Ляпунов же был аналитиком в полном смысле этого слова.

Хочется еще остановиться на подходе Ляпунова к применению математики для прикладных задач. Для Петербургской математической школы (представителем которой был и Ляпунов) являлось характерным отрицательное отношение к общим абстрактным схемам, предпочтение отдавалось конкретным задачам, которые доводились до алгоритма. В своей работе «Об одной задаче Чебышева» [56] Ляпунов полемизирует с Пуанкаре по поводу нестрогих рассуждений в проблеме фигур равновесия:

«Это не есть доказательство, это есть скорее обобщение по аналогии, и сам Пуанкаре, видимо, признается в этом, когда говорит: ”можно было бы сделать много возражений, но нельзя требовать в механике той же строгости, как в чистом анализе, во всем, что касается бесконечности”. Но я не придерживаюсь такого мнения. Я думаю, что если в некоторых случаях и допустимо пользоваться неясными рассмотрениями, когда желают установить новый принцип, <...> однако же невозможно так поступать, когда надо решать определенную задачу (механики или физики), которая поставлена математически совершенно точно. Эта задача становится тогда проблемой чистого анализа и должна быть решаема как таковая» [56, с. 209].

Здесь затронут очень важный вопрос о взаимодействии математики и физики. Я уже высказывался по этому поводу [57, с. 46], в связи с настоящей работой подчеркну лишь основные моменты. В физических задачах применение математического аппарата чаще всего ограничивается «физическим уровнем строгости», который обычно весьма далек от канонов строгости и доказательности, принятых в математике. Такой подход вполне правомерен, поскольку строгое математическое рассмотрение, требующее значительных дополнительных усилий, часто добавляет лишь какие-то детали. Более того, строгий математический подход может на сегодняшний день даже оказаться невозможным. Так, квантовый аналог теории КАМ еще ждет своего создания. Однако имеется класс физических задач, в которых без строгого подхода не обойтись, в противном случае мы рискуем прийти к поверхностным и сомнительным выводам. К этому классу относятся и многие задачи нелинейной физики. Они, как правило, очень трудны в математическом отношении. После своей постановки такие задачи смещаются в математическую плоскость, приводится в действие весь арсенал методов, находящихся на переднем крае математической науки. Как легко прийти к ошибочному заключению, показывает пример об устойчивости грушевидных фигур, когда даже интуиции Пуанкаре оказалось недостаточно.

Вернемся к работам Ляпунова о задаче Чебышева [51–54]. Здесь был им получен целый ряд важных побочных результатов, касающихся интеграла Стилтьеса, сферических функций и др., но наибольшее значение имело исследование нелинейных интегральных уравнений. Тогда, на рубеже веков интегральные уравнения являлись новым предметом для математики, до этого они встречались лишь как единичные примеры. Теория интегральных уравнений, и то только линейных, еще создавалась, главным образом, в трудах Э.И. Фредгольма, В. Вольтерры и Д. Гильберта. Развитие науки обычно идет по пути рассмотрения сначала наиболее простых задач, лишь затем переходя к более сложным. Так произошло, например, с теорией колебаний. Ко второй половине XIX в. была создана теория линейных колебаний, итогом стала «*Теория звука*» Дж.У. Рэлея (1877–1878) [58]. Лишь в XX в. нелинейные колебания стали предметом самостоятельного изучения. С интегральными уравнениями привычная логика развития была нарушена: нелинейные интегральные уравнения стали изучаться одновременно с линейными. Причина была вызвана потребностями прикладных задач.

Уже в работе [51] Ляпунов получил фундаментальное для теории фигур равновесия вращающейся жидкости нелинейное интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи о неэллипсоидальных фигурах равновесия. В серии последующих объемных и богатых результатами работ [52–54] Ляпунов во всех деталях изучил бифуркации, установил сходимость применяемых разложений и со всей строгостью доказал существование эллипсоидальных фигур равновесия, от которых могут отделяться новые неэллипсоидальные фигуры. Надо сказать, что открытие Пуанкаре и Ляпуновым нового класса фигур равновесия произвело огромное впечатление в научном мире. Нелинейные интегральные уравнения как отдельная область теории интегральных уравнений впервые появляются в работах ученика Гильберта Э. Шмидта (1907) [59; 60]. Шмидт упоминает связь развиваемой им теории с проблемой фигур равновесия и рассматривает появление бифуркаций в окрестности некоторых фигур, но без ссылки на Ляпунова. Обширный класс нелинейных интегральных уравнений, рассмотренных Шмидтом, к которому принадлежит и уравнение Ляпунова, сейчас называют уравнениями Ляпунова–Шмидта [61].

Немного о том, как научное сообщество познакомилось с трудами Ляпунова. Работы Ляпунова, выходившие сначала на русском языке, стали известны во Франции прежде всего благодаря рефератам во французских журналах и сразу привлекли внимание крупнейших ученых [62]. Реферат его магистерской диссертации (1884) появился через год, и это повлекло за собой переписку между Пуанкаре и Ляпуновым в 1885–1886 гг. [63], сама диссертация была переведена на французский язык в 1904 г. В 1896–1900 гг. Ляпунов публиковал свои статьи по теории устойчивости и другим вопросам в *Comptes rendus* и *Journal des mathématiques pures et appliquées*, а в дальнейшем – в изданиях Академии наук, но почти все на французском языке [62; 64]. Реферат главного труда Ляпунова по теории устойчивости (1892) [24] появился в том же году. Изданный на русском языке в Харькове этот труд в ограниченном качестве был доступен за рубежом из-за языкового барьера. Все же ввиду важности изложенных в нем идей некоторые математики, как, например, Т. Леви-Чивита, смогли ознакомиться с основным содержанием. Широкую известность труд Ляпунова получил после перевода E. Davaux на французский язык в 1907 г. [65]. Этот перевод был воспроизведен в 1947 г. в Принстоне [66]. На английском языке труд Ляпунова был издан в год столетия его создания (1992) [67].

Признание Ляпунова в научном мире еще при его жизни характеризует тот факт, что в 1916 г. он был избран членом-корреспондентом Французской Академии наук [62]. Значение этого события можно оценить из того факта, что на предыдущую вакансию в 1911 г. был избран Давид Гильберт.

Показатели Ляпунова. Фундаментальное значение для нелинейной физики имеют характеристические числа (показатели) Ляпунова. Он их ввел в своем труде «*Общая задача об устойчивости движения*» для исследования устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений, исходя из идеи, что качественно различные решения должны отличаться некоторыми специальными свойствами.

Пусть для функции $\mathbf{x}(t)$ существуют два вещественных числа λ_1 и λ_2 таких, что функция $\mathbf{x}(t)e^{\lambda_1 t}$ будет исчезающей, то есть $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)e^{\lambda_1 t} = 0$, а функция $\mathbf{x}(t)e^{\lambda_2 t}$ будет неограниченной. Тогда можно найти такое вещественное число λ, что для любого положительного ε функция $\mathbf{x}(t)e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ будет неограниченной, а функция $\mathbf{x}(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ – исчезающей

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbf{x}(t)|e^{(\lambda+\varepsilon)t} = \infty, \quad \lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0. \tag{1}$$

Число λ, удовлетворяющее условиям (1), Ляпунов назвал *характеристическим числом* функции $\mathbf{x}(t)$ [24, с. 48–49]. На современном языке идея характеристических чисел заключается в том, что рост нормы $|\mathbf{x}(t)|$ решения системы $\mathbf{x}(t)$ при $t\to\infty$ определяется по шкале ростов, заданной семейством функций действительного переменного (в данном случае $e^{\lambda t}$) и тем самым данному решению приписывается определенная числовая характеристика (характеристическое число λ). Таким образом, семейство решений получает упорядочение по шкале ростов [13, с. 10]. Другими словами, производится сравнение асимптотического поведения решений $\mathbf{x}(t)$ с асимптотическим поведением некоторой монотонной функции $f(t)$. Для оценки характеристических чисел λ Ляпунов установил связь между ними и арифметическими операциями. Результаты Ляпунова и содержащиеся в них идеи продолжают активно разрабатываться. Коснемся лишь некоторых из них, непосредственно связанных с нелинейной динамикой.

Немецкий математик О. Перрон дал эквивалентное определение показателей Ляпунова (1930) [68], которое в настоящее время является общепринятым [13, с. 10]

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|. \tag{2}$$

Характеристические показатели были введены Ляпуновым для определения устойчивости одной траектории. Фундаментальное значение показателей Ляпунова в нелинейной физике заключается в том, что они характеризуют устойчивость почти всех (по мере) траекторий на аттракторе. В основе использования показателей Ляпунова лежит мультипликативная эргодическая теорема о существовании и конечности множества возможных значений показателей, которую доказали ученик Я.Г. Синая В.И. Оселедец и ученик А.Н. Колмогорова М.Д. Миллионщиков [69; 70]. Мультипликативная эргодическая теорема позволяет обобщить показатели Ляпунова на совокупность траекторий и дает строгое обоснование для их вычисления.

Показатели Ляпунова связаны с важнейшей характеристикой систем со сложным поведением – метрической энтропией или энтропией Колмогорова–Синая (КС-энтропия) [71–74]. КС-энтропия является мерой хаотичности и неустойчивости. Статистические свойства динамических систем являются предметом эргодической теории, и до появления работ Колмогорова (1958–1959) [71; 72] она, в основном, пользовалась функционально-аналитическими представлениями. В этих работах Колмогорова происходит явное смещение акцентов с функционально-аналитического подхода в эргодической теории на вероятностные представления. Однако продолжало существовать убеждение, что динамические системы в теории вероятностей с метрической точки зрения совершенно отличны от динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В дальнейшем выяснилась глубокая внутренняя связь теории динамических систем с теорией вероятностей. Яков Григорьевич Синай, один самых ярких учеников Колмогорова, вспоминал, что впервые о метрической энтропии Колмогоров рассказал на одной из лекций своего спецкурса по динамическим системам [75]. Колмогоров ввел важное и плодотворное понятие «квазирегулярных систем», названных позже К-системами (в честь Колмогорова) и определил для них понятие энтропии [71; 72]. К-системы соответствуют процессам с наиболее слабыми свойствами регулярности. Синай стал изучать вопрос, как можно применить энтропию к общим динамическим системам и предложил несколько другое определение энтропии, применимое к любым динамическим системам [73]. В дальнейшем было показано, что оба определения эквивалентны [76]. Небезынтересно отметить (полагаю, это особенно актуально для молодого поколения), какими критериями руководствовались в школе Колмогорова и вообще в Московской математической школе в подходе к научной деятельности. Я.И. Синай вспоминал:

«Я был уже аспирантом, когда принёс статью об энтропии своему научному руководителю А.Н. Колмогорову и он сказал: “Наконец вы можете соперничать с другими моими учениками”» [77, с. 53].

Заметим, что речь идет вообще о второй научной работе Синая, работе, в значительной степени определившей присуждение Синаю премии Абеля (эту премию, наряду с другой высшей наградой для математиков – медалью Филдса, рассматривают как своего рода Нобелевскую премию по математике). Соответствующие же требования предъявлялись вообще в вопросах подготовки к научной деятельности, в частности, к сдаче кандидатского минимума. Вот что говорит другой ученик Колмогорова – В.А. Успенский:

«Сейчас центральным экзаменом минимума является экзамен по более или менее узкой математической специальности – той самой специальности, по которой и происходит обучение в аспирантуре. Тогда такого экзамена не было. Считалось, что свою-то специальность аспирант должен знать и безо всякого экзамена, просто потому, что ею занимается – или, во всяком случае, должен заниматься – на должном уровне. Когда я явился к Колмогорову, чтобы он указал мне тему моих предстоящих экзаменов, он отнесся к проблеме очень серьезно. Немного подумав, он назвал высшую алгебру (по двухтомнику ван дер Вардена “Современная алгебра”; экзамен я вспоминаю как один из самых трудных в моей жизни, а принимали его Колмогоров и Курош на университетской квартире Колмогорова). В качестве второго экзамена были названы уравнения математической физики – по “Методам математической физики” Гильберта и Куранта и “Уравнениям математической физики” С.Л. Соболева. Надо сказать, что сюжеты обоих экзаменов, в особенности же второго, были весьма далеки от моих собственных математических интересов. Колмогоров это, конечно, понимал, но хотел сделать из меня образованного человека. Поэтому, говоря об уравнениях математической физики, он прибавил: “И уж, пожалуйста, с численными методами. А математическую логику Вы и так должны знать”. По-видимому, что-то отразилось на моем лице, потому что Колмогоров меня пожалел и объявил, что в качестве третьего экзамена назначит нечто близкое к логике. В качестве такого близкого была выбрана теория релейно-контактных схем по незадолго до того вышедшей книге М.А. Гаврилова. Я уже писал, что эта книга относилась к жанру технических, а не математических наук и что мне нелегко было сквозь нее продраться <...> Кроме иностранного языка, философии и трех математических экзаменов, полагалось еще сдать три отчета. В качестве одного из них мне было велено перевести на русский язык книгу Рожи Петер “Рекурсивные функции” (первую в мире книгу на эту тему), вышедшую на немецком языке в Будапеште в 1951 г. Я не решился сказать Колмогорову, что не знаю немецкого языка. К счастью, Рожа Петер была венгеркой, и ее немецкий был не слишком сложен. К тому же в книге было много формул. Все это способствовало тому, что я успешно сдал отчет, и русский перевод книги вышел в Издательстве иностранной литературы в 1954 г.» [78, с. 1110–1111].

Другое свидетельство – о начале аспирантской жизни известного воронежского математика В.И. Соболева. Вспоминает один из его учеников:

«Помню рассказ Владимира Ивановича о том, как он в Москве начинал работать с Л.А. Люстерником. Л.А. сказал ему на одной из первых встреч: “Володя, ты кончал провинциальный университет и курс алгебры там, без сомнения, читался слабо. Вряд ли тебе это потребуется [Соболев специализировался по функциональному анализу. – *Р.М.*], но сдай-ка ты экзамен по книге Ван дер Вардена”. Не знаю, видел ли кто-нибудь из нынешних студентов или аспирантов этот первый фундаментальный учебник по абстрактным алгебраическим структурам, содержащий более 500 страниц, только появившийся в то время. Л.А. продолжал: "Володя, ты учил в университете английский язык, но в математике трудно без французского, поэтому кандидатский экзамен ты сдай по французскому языку. Кроме того, сейчас очень популярна квантовая механика, поэтому сдай экзамен и по этой дисциплине"» [79, с. 52–53].

Надеюсь, эти отступления не покажутся неуместными. Они свидетельствуют о высочайшем уровне отечественной науки еще не так давно. Вспомним о приведенном немного выше видении Чебышевым научной деятельности при постановке Ляпунову задачи магистерской диссертации. Работы Ляпунова являются здесь эталонными. Силу Ляпунова-аналитика, глубину его проникновения в сущность сложных проблем можно видеть из следующего факта. В 1954 г. В.И. Смирнов обнаружил в архиве Ляпунова рукопись неизвестной его работы, написанной не позднее 1893 г. [80]. Оказалось, что к моменту опубликования (1963) содержащиеся в [80] результаты были еще совершенно не известными, никем не переоткрытыми и не перекрытыми. И это при том, что те результаты находились в средоточии активно разрабатывавшейся в течение 60 лет области исследований [18, с. 179]. Хочется верить, что тот уровень российской науки не полностью утерян и в настоящее время.

Вернемся к КС-энтропии. Энтропия измеримого разбиения A пространства M с мерой μ на конечное или счетное число множеств A_1, A_2,... дается выражением

$$H(A) = -\sum_k \mu(A_k)\log\mu(A_k),$$

где сумма берется по всем элементам разбиения, имеющим положительную меру. Далее рассматриваются разбиения $\xi_T^n = V_{k=0}^n T^k A$, где $\xi V \eta$ представляет разбиение, элементами которого являются пересечения разбиений ξ и η; T – автоморфизм пространства M. Для любого конечного разбиения существует (конечный или бесконечный) предел [81]

$$H(T,\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi_T^n). \quad (3)$$

Синай предложил определить энтропию $h(T)$ как верхнюю грань $h(T\xi)$ на множестве измеримых разбиений [73]

$$h(T) = \sup h(T\xi).$$

Если выбрать в качестве энтропии функцию $h(T\xi)$, то возникают сложности с проблемой изоморфизма, то есть имеет место зависимость от разбиения ξ. При определении (3) энтропия является инвариантом, но появляются трудности с ее вычислением. Положительность энтропии, в противоположность системам с нулевой энтропией, отражает разделение динамических систем на стохастические и регулярные. Таким образом, КС-энтропия привела к пониманию того, что случайные явления и классические динамические системы можно описывать *на одном и том же языке*.

Характеристические показатели Ляпунова решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривают как количественную меру степени стохастичности. Энтропийное направление изучения динамических систем исследует характеристики, имеющие экспоненциальный рост. Ясно, что должна существовать связь энтропии со средней скоростью экспоненциальной расходимости близких траекторий, описываемых показателями Ляпунова. Через несколько лет после появления работ Колмогорова и Синая, определивших энтропийное направление эргодической теории, Я.Б. Песиным была выдвинута гипотеза о равенстве энтропии интегралу суммы положительных характеристических показателей Ляпунова. Эта гипотеза обсуждалась на Школе по эргодической теории в Хумсане (около Ташкента, 1965). Г.А. Маргулисом была получена точная оценка сверху, а Я.Б. Песиным и А.Б. Катком – точная оценка снизу. В основополагающей работе Песина [82] был получен главный результат: для диффеоморфизма f многообразия M, сохраняющего меру ν, энтропия $h(f)$ равна

$$h(f) = -\int\int\sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x)\chi_i d\nu(x), \tag{4}$$

где $q_i(x)$ – кратность соответствующего значения χ_i, $k(x)$ – число различных отрицательных значений показателя. Энтропия динамической системы гораздо труднее вычислима, чем показатели Ляпунова. Выражение (4) дает возможность рассчитывать энтропию, исходя из показателей Ляпунова.

Во второй половине XX в. пришло понимание того, что для описания устройства мира недостаточно классической физики и квантово-релятивистской физики. Нелинейность явилась еще одним измерением, приведя к новой парадигме физико-математических наук. При этом открывается целое поле необычных явлений, не только обогащая существующую картину мира, но и значительно меняя наше понимание природы. Фундаментальной важности вклад Ляпунова явился одним из оснований новой нелинейной науки. Место Ляпунова в мировой науке характеризует, например, тот факт, что в обстоятельном сборнике «*Landmark writings in western mathematics, 1640–1940*» под редакцией А. Граттан-Гиннеса [83] основной труд Ляпунова по теории устойчивости [24] находится в одном ряду с такими классическими сочинениями его современников, как «*К проблеме трех тел и уравнения динамики*» А. Пуанкаре, «*Основания геометрии*» Д. Гильберта, «*Теория электронов*» Г.А. Лоренца.

Библиографический список

1. *Стеклов В.А.* Александр Михайлович Ляпунов // Ляпунов А.М. Работы по теории потенциала. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 9–32.
2. *Смирнов В.И.* Александр Михайлович Ляпунов // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 5–15.
3. *Цыкало А.Л.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Наука, 1988. 244 с.
4. *Смирнов В.И.* Очерк научных трудов А.М. Ляпунова // Ляпунов А.М. Избр. труды. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 341–450.
5. *Шибанов А.С.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Мол. гвардия, 1985. 336 с.
6. *Демидов С.С., Козлов В.В.* К 150-летию Александра Михайловича Ляпунова // Ляпунов А.М. Избр. труды: работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 7–26.

7. *Leine R.I.* The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability // Nonlinear Dyn. 2010. Vol. 59. Pp. 173–182.
8. *Mawhin J.* Nonlinear oscillations: one hundred years after Liapunov and Poincare // Zeitschrift für Angenwandte Mathematik und Mechanik. 1993. B. 73. S. 54–62.
9. *Bountis T.* Stability of motion: from Lypunov to the dynamics of N-degree of freedom Hamiltonian system // Nonlinear phenomena in complex systems. 2006. Vol. 9, no. 3. Pp. 209–239.
10. *Grattan-Guinnes I.* The Norton History of the Mathematical Sciences. N.Y.: W.W. Norton and Com., 1997. 832 pp.
11. *Iurato G.* The dawning of the theory of equilibrium figures // archive: 1409.1823.
12. *Jardetzky W.S.* Theories of figures of selestial bodies. N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1985. 208 pp.
13. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.Н., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. *Литтлтон Р.А.* Устойчивость вращающихся масс жидкости. Москва; Ижевск: РХД, 2001. 240 с.
15. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252 с.
16. *Mawhin J.* Alexandr Mikhailovich Liapunov. The general problem of the stability of motion // Landmark writings in western mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elseiver, 2005. Pp. 664–676.
17. *Mawhin J.* The centennial legacy of Poincare and Liapunov in ordinary differential equations // Rendiconti Circolo Matematico di Palermo. 1994. Suppl. Ser. II, no. 34. Pp. 9–46.
18. *Демидов С.С., Петрова С.С., Симонов Н.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX в. М.: Наука, 1987. С. 80–183.
19. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov // Russian Mathematicians in 20$^{\text{th}}$ Century/ Ya. Sinai ed. N.Y.; L.: World Scientific, 2003. P. 1–16.
20. *Пуанкаре А.* Аналитическое резюме // А. Пуанкаре. Избр. труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 580–655.
21. *Poincaré H.* Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. math. pures et appl. Sér. 3. 1881. Vol. 7. Pp. 375–422; 1882. Vol. 8. Pp. 251–296; Sér. 4. 1885. Vol. 1. Pp. 167–244; 1886. Vol. 2. Pp. 151–217.
22. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
23. *Александров П.С.* Пуанкаре и топология // УМН. 1972. Т. 27. В. 1. С. 147–158.
24. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Ляпунов А.М. Избр. труды: Работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 27–298.
25. *Моисеев Н.Д.* Очерки развития теории устойчивости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 664 с.
26. История механики с конца XVIII до середины XX века. М.: Наука, 1972. 417 с.
27. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук. М.; Л.: ГТТИ, 1934. 603 с.

28. *Lagrange J.L.* Sur le principe des vitesse virtuelles // Oeuvres de Lagrange. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321.
29. Mécanique analiytique, par J.L. Lagrange. T. Premiere. Paris, 1811. 422 p.
30. *Lejeune-Dirichlet P.G.* Über die Stabilität des Gleichgewichts // CRELLE, J. Reine Angew. Math. 1846. B. 32. S. 85–88.
31. *Лежен-Дирихле П.Г.* Об устойчивости равновесия // Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 537–540.
32. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // А. Пуанкаре. Избр. труды. Т. II. М.: Наука, 1972. 998 с.
33. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения // Учен. записки Москов. ун-та. Отдел физ.-мат. наук. 1882. Т. 4. С. 10–21.
34. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications. Vol. 357. Kluwer Academic, Dordrecht. 1996. 403 p.
35. *Thomson W.* Treatise on Natural Philosophy. Vol. 1.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879. 508 p.
36. *Routh E.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: Macmillan and Co., 1877. 129 p.
37. *Routh E.* The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: Macmillan and Co., 1860. 588 p.
38. *Мандельштам Л.И.* Предисловие к кн.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. С. 9–13.
39. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // В кн.: Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 703 с.
40. *Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.
41. *Todhunter I.* A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace. L.: Macmillan and Co., 1873. V. I. XVIII + 474 p.
42. *Maclauren C.* Traite des Fluxions. Edinburgh, 1742. 574 p.
43. *Jacobi C.G.* Über die Figur des Gleichgewichts // Ann. Phys. u. Chem. 1834. B. 33. S. 229–233; Gesammelte Werke. T. 2. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.
44. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 361–374.
45. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–113.
46. *Poincaré H.* Sur l’équilibre d’un masse fluide animée d’un mouvement de rotation // Acta. Math. 1885. T. 7. P. 259–380; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. P. 40–140.
47. Большая Советская энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, 1970. 640 с.
48. *Poincaré H.* Sur la stabilité d’équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide animée en rotation // Proc. Roy. Soc. London. 1901. Vol. 69. Pp. 148–149.

49. *Darwin G.* The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid // Phyl. Transactions. 1903. Vol. 200. Ser. A. Pp. 251–314.
50. *Darwin G.* Further consideration of the stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid // Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London. 1908. Vol. 208. Ser. A. Pp. 1–19.
51. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du probléme // St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1906. IV+225 p.
52. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figure d'équilibre derivée des ellipsoides de Maclaurin // St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1909. IV+203 p.
53. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figure d'équilibre derivée des ellipsoides de Jacobi. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1912. IV+228 p.
54. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre // St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1914. IV+112 p.
55. *Jeans G.* The motion of tidally-distorted masses with special reference of cosmogony // Memories of the Royal Astron. Soc. 1917. Vol. 62. Pp. 1–48.
56. *Ляпунов А.М.* Об одной задаче Чебышева // Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд. 1905. 8 сер. Т. 17. № 3. С. 1–32; А.М. Ляпунов. Собр. Соч. Т. 3. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–236.
57. *Мухин Р.Р.* Динамический хаос: трудный путь открытия // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. № 4. С. 43–54.
58. *Rayleigh J.W.* The theory of sound. L.: MacMillan and Co. In two volumes. 1877. Vol. I. 326 p.; 1878. Vol. II. 315 p.
59. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkurlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // Math. Ann. 1907. B. 63. S. 433–476.
60. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflosung der allgemeinen linearen Integralgleichung // Math. Ann. 1907. B. 64. S. 161–174.
61. *Хведелидзе Б.В.* Уравнение Ляпунова–Шмидта // Матем. Энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, 1982. С. 473–474.
62. *Юшкевич В.И.* А.М. Ляпунов и Академия наук Института Франции // Ист.-матем. исслед. 1965. № 16. С. 375–388.
63. *Смирнов В.И., Юшкевич В.И.* Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом // Ист.-матем. исслед. 1985. № 29. С. 265–284.
64. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография / Составитель А.М. Лукомская, под ред. В.И. Смирнова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1953. 268 с.
65. *Liapounoff A.* Probléme générale de la stabilité du mouvement // Annales de la faculté des science de Toulouse, 2-serié, № 9. 1907. P. 203–474.
66. *Lyapunov A.M.* Probléme Générale de la Stabilité du Mouvement. Princeton, N.Y.:

Princeton Univ. Press, 1947. 375 pp.

67. *Lyapunov A.M.* The general problem of the stability of motion // Int. J. Control. 1992. Vol. 55, no. 3. Pp. 521–790.
68. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differential gleichungs systeme // Mathem. Zeitschr. 1930. B. 31. S. 748–766.
69. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. общества. 1968. Т. 19. С. 179–210.
70. *Миллионщиков М.Д.* Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами // Мат. сб. 1969. Т. 78, № 2. С. 179–202.
71. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119, № 5. С. 861–864.
72. *Колмогоров А.Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 4. С. 754–755.
73. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамических систем // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 4. С. 768–771.
74. *Мухин Р.Р.* Развитие Колмогоровым энтропийного направления эргодической теории // Истор.-матем. исслед. 2003. серия. В. 8 (43). С. 18–26.
75. *Синай Я.Г.* Письменное сообщение 26.03.2007.
76. *Рохлин В.А.* Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22. В. 5. С. 3–56.
77. *Рауссен М., Скау К.* Интервью с Я.Г. Синаем, абелевским лауреатом 2014 года // Матем. просвещение. Третья серия, вып. 19. М.: изд-во МЦНМО, 2015. С. 52–69.
78. *Успенский В.А.* Колмогоров, каким я его помню // Труды по НЕматематике. Т. 2. М.: ОГИ, 2002. С. 1068–1163.
79. *Каменский М.И.* Некоторые не записанные вовремя рассказы Владимира Ивановича // Владимир Иванович Соболев в воспоминаниях коллег и учеников. Воронеж: НАУКА-ЮНИПРЕСС, 2014. С. 50–53.
80. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. 117 с.
81. *Хинчин А.Я.* Об основных теоремах теории информации // УМН. 1956. Т. 11. В. 1. С. 17–75.
82. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // УМН. 1977. Т. 32. В. 4. С. 55–112.
83. Landmark writings in western mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elseiver, 2005. 1022 p.

References

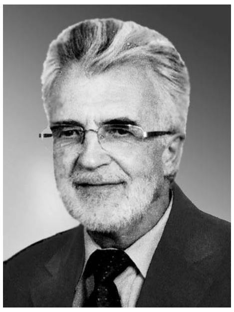
1. Steklov V.A. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Works on the Theory of Potential. M.; L.: GITTL, 1949, pp. 9–32 (in Russian).
2. Smirnov V.I. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Academician A.M. Lyapunov. Coll. of works. T. I. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1954, pp. 5–15 (in Russian).
3. Tsykalo A.L. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Moscow: Nauka, 1988, 244 p. (in Russian).
4. Smirnov V.I. Essay on the scientific works of A.M. Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Select. Works. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1948, pp. 341–450 (in Russian).
5. Shibanov A.S. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Moscow: Mol. Gvardia, 1985, 336 p. (in Russian).
6. Demidov S.S., Kozlov V.V. To the 150^{th} anniversary of Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Select. Works: Works on the Theory of Stability. Moscow: Nauka, 2007, pp. 7–26 (in Russian).
7. Leine R.I. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability. *Nonlinear Dyn*., 2010, vol. 59, pp. 173–182.
8. Mawhin J. Nonlinear oscillations: one hundred years after Liapunov and Poincare. *Zeitschrift für Angenwandte Mathematik und Mechanik*, 1993, B. 73, s. 54–62.
9. Bountis T. Stability of motion: from Lypunov to the dynamics of N-degree of freedom Hamiltonian system. *Nonlinear phenomena in complex systems*, 2006, vol. 9, no. 3. pp. 209–239.
10. Grattan-Guinnes I. The Norton History of the Mathematical Sciences. N.Y.: W.W. Norton and Com., 1997. 832 p.
11. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures. *archive*: 1409.1823.
12. Jardetzky W.S. Theories of Figures of Celestial Bodies. N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1985, 208 p.
13. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.N., Nemytsky V.V. The Theory of Lyapunov Exponents and its Applications to Stability Problems. Moscow: Nauka, 1966, 576 p. (in Russian).
14. Littleton R.A. The stability of rotating liquid masses of liquid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953. 171 p.
15. Liechtenstein L. Gleichgewichtsfiguren Rotierender Flussigkeiten. Berlin: Verlag von J. Springer, 1933, 174 s.
16. Mawhin J. Alexandr Mikhailovich Liapunov. The general problem of the stability of motion. In: Landmark writings in western mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elseiver, 2005, pp. 664–676.
17. Mawhin J. The centennial legacy of Poincare and Liapunov in ordinary differential equations. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 1994, Suppl. Ser. II, no. 34, pp. 9–46.
18. Demidov S.S., Petrova S.S., Simonov N.N. Ordinary differential equations. In: Mathematics of XIX century. M.: Nauka, 1987, pp. 80–183 (in Russian).
19. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. In: Russian Mathematicians in 20^{th} Century. Ed. Ya. Sinai. N.Y.; L.: World Scientific, 2003, pp. 1–16.

20. Analyse de ses travaux scientific, par H. Poincaré. *Acta Mathem*. 1921, Vol. 38, pp. 36–135.
21. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle. *J. math. pures et appl*., sér. 3, 1881, vol. 7, pp. 375–422; 1882, vol. 8, pp. 251–296; sér. 4, 1885, vol. 1, pp. 167–244; 1886, vol. 2, pp. 151–217.
22. Poincaré H. Sur les Courbes Définies par des Équations Différentielles. Moscow: GITTL, 1947, 392 p. (in Russian).
23. Aleksandrov P.S. Poincaré and topology. *Russian Mat. Survey*, 1972, vol. 27, iss. 1, pp. 147–158 (in Russian).
24. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. In: Lyapunov A.M. Select. Works: Works on the Stability of Motion. Moscow: Nauka, 2007, pp. 27–298 (in Russian).
25. Moiseyev N.D. Essais on the Developement of the Theory of Stability. M.; L.: GITTL, 1949, 664 p. (in Russian).
26. The History of Mechanics from the Late Eeighteenth to the Middle of the Twentieth Century. Moscow: Nauka, 1972, 417 p. (in Russian).
27. The Method of Finding Curves of Lines with the Properties of a Maximum or a Minimum, or the Solution of an Isoperimetric Problem, Taken in the Broadest Sense of Leonard Euler, a Royal Professor and a Member of the Imperial Petersburg Academy of Sciences. M.; L.: GTTI, 1934, 603 p. (in Russian).
28. Lagrange J.L. Sur le Principe des Vitesse Virtuelles. Oeuvres de Lagrange. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877, pp. 317–321.
29. Mécanique Analiytique, par J.L. Lagrange. T. Premiere, Paris, 1811, 422 p.
30. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts. CRELLE, *J. Reine Angew. Math*., 1846, B. 32, s. 85–88.
31. Lejeune-Dirichlet P.G. On the Stability of Equilibrium. In: Lagrange J. Analytical Mechanics. T. 1. M.; L.: GITTL, 1950, pp. 537–540 (in Russian).
32. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Tome 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899. 410 p.
33. Zhukovsky N.E. On the strength of motion. *Scholar notes of Moscow University. Department of Physics and Mathematics. Sciences*, 1882, vol. 4, pp. 10–21 (in Russian).
34. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications, vol. 357. Kluwer Academic, Dordrecht, 1996, 403 p.
35. Thomson W., Treatise on Natural Philosophy. V. 1.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879, 508 p.
36. Routh E. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: Macmillan and Co., 1877, 129 p.
37. Routh E. The Elementary part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: Macmillan and Co., 1860, 588 p.
38. Mandelshtam L.I. Foreword to: Andronov AA, Witt AA, Khaikin S.E. Theory of oscillations. Moscow: Fizmatlit, 1959, pp. 9–13 (in Russian).

39. Newton I. Mathematical Principles of Natural Philosophy. N.Y.: Daniel Adee, 1846, 575 p.
40. Tassul J.-L. The Theory of Rotating Stars. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978, 524 p.
41. Todhunter I. A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to That of Laplace. L.: Macmillan and Co., 1873, Vol. I, XVIII + 474 p.
42. Maclauren C. Traité des Fluxions. Edinburgh, 1742, 574 p.
43. Jacobi C.G. Über die Figur des Gleichgewichts. *Ann. Phys. u. Chem.* 1834, B. 33, S. 229–233; Gesammelte Werke. T. 2. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1882–1891, S. 17–22.
44. Lyapunov A.M. On the Form of Celestial Bodies. In: Academician A.M. Lyapunov. Coll. op. T. III. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 361–374 (in Russian).
45. Lyapunov A.M. On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating fluid. In: Academician A.M. Lyapunov. Coll. op. T. III. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 5–113 (in Russian).
46. Poincaré H. Sur l'équilibre d'un masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math*. 1885. T. 7. P. 259–380; Oeuvres de Henri Poincaré. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952, pp. 40–140.
47. Great Soviet Encyclopedia. T. 3. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1970, 640 p. (in Russian).
48. Poincaré H. Sur la stabilité d'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide animée en rotation. *Proc. Roy. Soc. London*, 1901, vol. 69, pp. 148–149.
49. Darwin G. The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London,* 1903, vol. 200, ser. A, pp. 251–314.
50. Darwin G. Further consideration of the stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London*, 1908, vol. 208, ser. A, pp. 1–19.
51. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du probléme. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1906. IV+225 p.
52. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figure d'équilibre derivée des ellipsoides de Maclaurin. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1909. IV+203 p.
53. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figure d'équilibre derivée des ellipsoides de Jacobi. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1912. IV+228 p.
54. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoids d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1914. IV+112 p.

55. Jeans G. The Motion of Tidally-distorted Masses with special Reference of Cosmogony. *Memories of the Royal Astron. Soc.*, 1917, vol. 62, pp. 1–48.
56. Lyapunov A.M. On a problem of Chebyshev. *Notes of Acad. Sciences in Phys. and Math. Dep.* 1905. 8 ser. T. 17. no. 3. pp. 1–32; A.M. Lyapunov. Coll. works. T. 3. Moscow-Leningrad: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 207–236 (in Russian).
57. Mukhin R.R. Dynamic chaos: a difficult path of discovery. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2014, no. 4, pp. 43–54 (in Russian).
58. Rayleigh J.W. The Theory of Sound. L.: MacMillan and Co. In two volumes: 1877, vol. I. 326 p.; 1878, vol. II. 315 p.
59. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkurlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann., 1907, B. 63, s. 433–476.
60. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflosung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Math. Ann., 1907, B. 64, s. 161–174.
61. Khvedelidze B.V. The Lyapunov–Schmidt equation. Mat. Encyclopedia. T. 3. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1982. S. 473–474 (in Russian).
62. Yushkevich V.I. A.M. Lyapunov and the Academy of Sciences of the Institute of France. *Histor.-mat. research,* 1965, no. 16, pp. 375–388 (in Russian).
63. Smirnov V.I., Yushkevich V.I. Correspondence A.M. Lyapunov with A. Poincaré and P. Duhem. *Histor.-mat. research*, 1985, no. 29, pp. 265–284 (in Russian).
64. Alexander Mikhailovich Lyapunov. Bibliography. Compiled by A.M. Lukomsky, ed. V.I. Smirnov. Moscow-Leningrad: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1953, 268 p. (in Russian).
65. Liapounoff A. Probléme générale de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des science de Toulouse*, 2- serié, no. 9, 1907, pp. 203–474.
66. Lyapunov A.M. Probléme Générale de la Stabilité du Mouvement. Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1947, 375 p.
67. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Control*, 1992, vol. 55, no. 3, pp. 521–790.
68. Perron O. Die ordnungszahlen linearer differential gleichungs systeme. *Mathem. Zeitschr.*, 1930, B. 31, s. 748–766.
69. Oseledets V.I. The multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems. *Proceedings of Moskow mat. society*, 1968, vol. 19, pp. 179–210 (in Russian).
70. Millionshchikov M.D. A stability criterion for the probability spectrum of linear systems of differential equations with recurrent coefficients and a criterion for almost reducibility of systems with almost periodic coefficients, *Mat. collection*, 1969, T. 78, no. 2, pp. 179–202 (in Russian).
71. Kolmogorov A.N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, pp. 119, no. 5, pp. 861–864 (in Russian).
72. Kolmogorov A.N. On entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms.

Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, vol. 124, no. 4. pp. 754–755 (in Russian).
73. Sinai Ya.G. On the concept of the entropy of dynamical systems. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1959, vol. 124, no. 4, pp. 768–771 (in Russian).
74. Mukhin R.R. Kolmogorov's development of the entropy direction of the ergodic theory. *Histor.-mat. research*, 2003, Series B. 8 (43), pp. 18–26 (in Russian).
75. Sinai Ya.G. Written communication on 26.03.2007.
76. Rokhlin V.A. Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure. *Russian Mat. Survey*, 1967, T. 22, v. 5. S. 3–56 (in Russian).
77. Raussen M., Scow K. Interview with Ya.G. Sinai, an Abelian laureate of 2014. *Mat. education*. Series 3, issue. 19, Moscow: MCNMO Publishing House, 2015, pp. 52–69 (in Russian).
78. Uspensky V.A. Kolmogorov, how do I remember him. Proceedings of NONmathematics. T. 2. Moscow: OGI, 2002, pp. 1068–1163 (in Russian).
79. Kamenskiy M.I. Some of the stories of Vladimir Ivanovich not written in time. In: Vladimir Ivanovich Sobolev in the memoirs of colleagues and students. Voronezh: SCIENCE-UNIPRESS, 2014, pp. 50–53 (in Russian).
80. Lyapunov A.M. Study of One of the Special Cases of the Problem of Stability of Motion. Leningrad: Leningrad State University, 1963, 117 p. (in Russian).
81. Khinchin A.Ya. On the main theorems of information theory. *Russian Mat. Survey*, 1956, T. 11, v. 1, pp. 17–75 (in Russian).
82. Pesin Ya.B. Lyapunov characteristic exponents and a smooth ergodic theory. *Russian Mat. Survey*, 1977, T. 32, v. 4, pp. 55–112 (in Russian).
83. Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elseiver, 2005, 1022 p.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail:mukhiny@mail.ru