

**ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ**

С. О. Хрисанфова, Е. Ю. Кадина, Е. В. Губина, Л. В. Коган, Г. В. Осипов

Институт информационных технологий, математики и механики,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23

E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com, gubinael@mail.ru, elena.kadina@itmm.unn.ru,
lyudmila.kogan@itmm.unn.ru, grosipov@gmail.com

В работе исследовалась динамика двух упруго связанных между собой маятников одинаковой массы, находящихся под действием разных постоянно действующих внешних вращательных моментов. Исследование мотивировано многочисленными физическими и биологическими приложениями рассматриваемой модели. Такие системы входят в число базовых физических моделей и представляют широкий научный интерес. На сегодняшний день существует немало работ, изучающих маятниковые ансамбли более высокого порядка. Представляется важным подробно и полно изучить динамику системы двух маятников, нелинейно связанных друг с другом, как базу для понимания поведения более сложных ансамблей фазовых осцилляторов. При изучении динамики двух нелинейно связанных маятников наибольший интерес представляет рассмотрение режима синхронизации, являющегося одним из основных режимов, наблюдаемых при взаимодействии нескольких осцилляторов в природе. Также в работе описываются и другие режимы, характеризующие динамику системы. Цель исследования состоит в изучении динамики системы в зависимости от параметров. Рассмотрены периодический и квазипериодический режимы колебаний, синхронизация и режим отсутствия колебаний. В работе получены оригинальные результаты, касающиеся аналитической оценки границы области синхронизации в плоскости $\{d, \alpha\}$, где d – сила связи между осцилляторами, а α – параметр синхронизации. Для получения вышеуказанной оценки были проведены элементы качественного анализа систем нелинейно связанных уравнений Адлера. Аналитическая оценка была подтверждена результатами прямого численного моделирования системы. В работе использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка с контролем локальной погрешности. Были построены бифуркационные диаграммы в плоскости $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ для различных значений параметра связи. Исследовано влияние параметров системы на существующие в ней режимы.

Ключевые слова: Синхронизация, осциллятор, нелинейная динамика.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-4-20

Ссылка на статью: Хрисанфова С.О., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В. Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 4–20.

Введение

Изучение динамики систем связанных маятников является важной задачей, имеющей множество практических приложений. Такие системы входят в число базовых физических моделей и представляют широкий научный интерес. На сегодняшний день существует немало работ, посвящённых исследованию осцилляторов, связанных друг с другом разнообразно устроенными связями [1–9]. Следует отметить тот факт, что, кроме стандартного приложения маятниковых систем, в таком разделе физики, как механика, системы связанных осциллирующих элементов маятникового типа позволяют адекватно описывать процессы в электрических цепях, полупроводниковых структурах, в молекулярной биологии [10–12]. Они активно используются при изучении явления сверхпроводимости. К примеру, при теоретическом рассмотрении связанных джозефсоновских контактов [13–18] и гранулированных сверхпроводников [19]. Не меньшую важность представляет приложение результатов исследования динамики систем связанных осциллирующих объектов к объектам живых систем. Так, можно провести аналогию между движением маятников и вращательными колебаниями оснований молекул ДНК [12] при изучении так называемых открытых состояний [20–22], являющихся важным и необходимым элементом функционирования такой молекулы [23].

Представляется важным подробно и полно изучить динамику системы двух маятников, нелинейно связанных друг с другом, как базу для понимания поведения более сложных ансамблей фазовых осцилляторов, интерес к которым вызван большим количеством физических приложений, использующих, в том числе, модель Френкеля–Конторовой и ее модификации [11, 24, 25]. Рассмотрение цепочек взаимодействующих спинов в ферромагнетиках [26–28] и исследование процесса скручивания цепочек в полимерных кристаллах [29–31], к примеру, можно назвать в числе областей, использующих результаты, полученные в ходе изучения динамики маятниковых ансамблей. При изучении динамики двух нелинейно связанных маятников наибольший интерес представляет рассмотрение режима синхронизации, являющегося одним из основных режимов, наблюдаемых при взаимодействии нескольких осцилляторов в природе [10]. Поэтому в данной работе наше внимание будет уделяться рассмотрению синхронизации. Также будут освещены и другие режимы, характеризующие динамику системы.

1. Модель

В работе рассматривается система уравнений, описывающая динамику двух упруго связанных между собой математических маятников одинаковой массы, находящихся под действием разных внешних вращательных моментов

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + \lambda \dot{\phi}_1 + \beta \sin \phi_1 = \gamma_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \ddot{\phi}_2 + \lambda \dot{\phi}_2 + \beta \sin \phi_2 = \gamma_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что осцилляция маятников в поле силы тяжести происходит лишь в одной плоскости, перпендикулярной линии подвеса. Колебания маятников происходят в сильно вязкой среде (коэффициент затухания $\lambda \gg 1$, то есть диссипация

сильна). Здесь ϕ_1 и ϕ_2 отвечают за фазы, $\gamma_1, \gamma_2 \in [-2, 2]$ и отражают действие вращательных моментов на каждый маятник, а d – величина связи между маятниками. Коэффициент β влияет на динамику каждого маятника в отдельности, внося асинхронность в их вращения. Сделав замену времени $t = \tau/\lambda$ и вводя малый параметр $\mu = 1/\lambda^2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = y_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = y_2, \\ \mu \frac{dy_1}{dt} = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 - y_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \mu \frac{dy_2}{dt} = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 - y_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (2)$$

Система медленных движений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = y_1, \\ \dot{\phi}_2 = y_2, \\ -f(\phi_1, y_1) = y_1 - \gamma_1 + \beta \sin \phi_1 - d \sin(\phi_2 - \phi_1) = 0, \\ -f(\phi_2, y_2) = y_2 - \gamma_2 + \beta \sin \phi_2 - d \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Легко показать, что медленные движения являются устойчивыми по отношению к быстрым. Действительно, записывая систему быстрых движений

$$\begin{cases} \mu \frac{dy_1}{dt} = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 - y_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \mu \frac{dy_2}{dt} = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 - y_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \phi_1 = \phi_1^0 = \text{const}, \\ \phi_2 = \phi_2^0 = \text{const}, \end{cases} \quad (4)$$

можно увидеть, что $f'_y < 0$. Таким образом, будем рассматривать лишь устойчивые, медленные, движения системы. Поскольку $\phi_{1,2} \in [0; 2\pi]$, можно рассмотреть систему на торе $T = S^1 \times S^1$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_2 = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (5)$$

2. Динамика независимо колеблющихся маятников

При нулевой связи d каждое из уравнений системы легко сводится к классическому уравнению Адлера [32] при помощи замены времени $\tilde{t} = t/\beta$ и введения нового параметра $\tilde{\gamma} = \gamma/\beta$

$$\dot{\phi} = \tilde{\gamma} - \sin \phi. \quad (6)$$

Существует несколько режимов поведения решения в зависимости от $\tilde{\gamma}$.

1. При $\tilde{\gamma} > 1$ в системе может существовать периодический режим. Решение в этом случае записывается следующим образом:

$$\phi(t) = 2 \arctan \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1} \tan \left(C + \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}}{2} t \right) \right) \right).$$

2. При $\tilde{\gamma} = 1$ появляется полуустойчивое состояние равновесия. В этом случае решением уравнения Адлера является функция $\phi(t) = 2 \operatorname{arccot} (2/(t + C) + 1)$.
3. При $\tilde{\gamma} < 1$ наблюдается режим отсутствия осцилляций. В уравнении существует два состояния равновесия: устойчивое и неустойчивое, соответственно. Координаты этих состояний

$$\phi^1 = \arcsin \tilde{\gamma},$$

$$\phi^2 = \pi - \arcsin \tilde{\gamma}.$$

3. Режим синхронизации

Итак, в данной работе исследовалась система двух связанных фазовых осцилляторов (5). Наличие параметра β не позволяет ожидать постоянной разницы фаз при синхронизации маятников [33].

На рис. 1 показаны диаграммы различных режимов, наблюдаемых в системе. Так, существует область S_{11} , где наблюдается синхронизация 1 : 1, то есть выполняется условие $|\phi_1 * 1 - \phi_2 * 1| < \text{const}$. Также в зависимости от величины параметра β возникает различное число других областей синхронизации. В сравнительно небольших областях S_{nm} наблюдается синхронизация $n : m - |\phi_1 * m - \phi_2 * n| < \text{const}$.

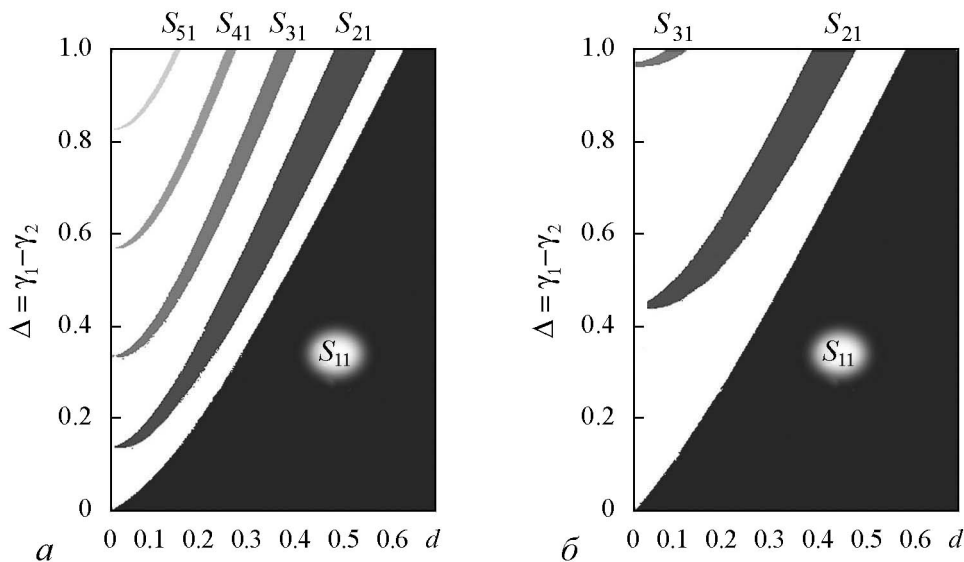


Рис. 1. Диаграммы различных режимов синхронизации при $\gamma_2 = 1$ и различных значениях β : $a - 0.95$; $\bar{b} - 0.80$. Здесь: d – сила связи между маятниками; S_{11} – область синхронизации 1 : 1; S_{nm} – область синхронизации $n : m$

С увеличением β область синхронизации $1:1$ уменьшается, в то время как появляется больше областей синхронизации $n:m$.

На рис. 1 видно, что область S_{11} является наибольшей областью синхронизации. К тому же, она представляется единственной областью синхронных движений, стабильно наблюдаемой на фазовых диаграммах при изменении β . Крайне узкие области синхронизации $n:m$ трудны для физической реализации. Прогнозирование поведения системы в таких режимах становится менее полезным. Таким образом, сосредоточимся в дальнейшем именно на синхронизации $1:1$.

Оценим границы области этой синхронизации. Поскольку ненулевой коэффициент β не позволяет получить стабильную разность фаз при синхронизации, воспользуемся критерием ограниченности разности фаз константой: $|\Theta| = |1 * \phi_1 - 1 * \phi_2| \leq \text{const}$. Введём *параметр синхронизации* α , $|\Theta| \leq \alpha$. Данный параметр должен быть сравнительно небольшим (в работе считаем его не превышающим полрадиана), что представляется довольно естественным. Запишем разность двух уравнений системы (5)

$$\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 = \gamma_2 - \gamma_1 - \beta(\sin \phi_2 - \sin \phi_1) - 2d \sin(\phi_2 - \phi_1). \quad (7)$$

Обозначая $\Theta = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta = \gamma_2 - \gamma_1$, получим

$$\dot{\Theta} = \Delta - 2\beta \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} - 4d \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}, \quad (8)$$

или

$$\dot{\Theta} = \Delta - 2 \sin \frac{\Theta}{2} \left(\beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2} \right). \quad (9)$$

Поскольку рассматривается оценка границ синхронизации, полагаем $\dot{\Theta} = 0$. Получим

$$\Delta - 2 \sin \frac{\Theta}{2} \left(\beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\Delta}{2 \sin(\Theta/2)} = \beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2}, \quad (11)$$

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \frac{\Delta}{4d \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2d} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}. \quad (12)$$

Так как $|\cos(\Theta/2)| \leq 1$, то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{1}{d} \left(\frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) \right| \leq 1. \quad (13)$$

Считая коэффициент d положительным, получим следующее неравенство:

$$-d \leq \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \leq d. \quad (14)$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} d \geq \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)}, \\ d \geq \frac{\beta}{2} - \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)}. \end{cases} \quad (15)$$

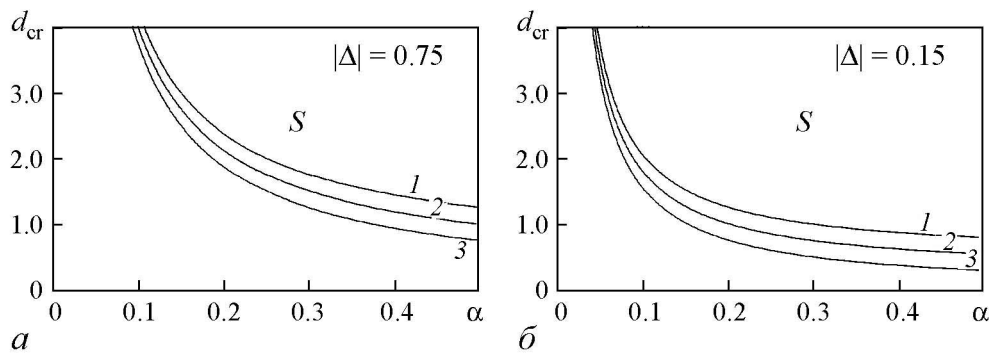


Рис. 2. Зависимость от параметра синхронизации α минимального значения параметра связи d_{cr} , необходимого для установления синхронизации для различных значений параметра β : 1 – 1.0, 2 – 0.5, 3 – 0 и $\gamma_{1,2}$: $a - \gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.0$; $b - \gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.60$. Здесь S – область синхронизации

Неравенства (15) должны выполняться при любой расстройке фаз в пределах указанного диапазона $|\Theta| \leq \alpha$, определяемого параметром синхронизации. Соответственно они должны выполняться и при наибольшей расстройке $|\Theta| = \alpha$

$$d \geq \frac{\beta}{2} + \frac{|\Delta|}{4 \sin(\alpha/2)}. \quad (16)$$

Таким образом, в плоскости (α, d) можно нарисовать оценку границы синхронизации (рис. 2) для различных значений параметров β и Δ . В области S , то есть выше кривой

$$d = \frac{|\beta|}{2} + \frac{\Delta}{4 \sin(\alpha/2)}, \quad (17)$$

осцилляторы гарантированно находятся в синхронном режиме с параметром синхронизации α . Можно проследить, как меняется оценка этой границы в зависимости от параметра β . Такое сравнение проиллюстрировано кривыми 1–3. Заметим, что чем более точную синхронизацию осцилляторов необходимо получить, тем большее значение параметра связи d требуется для этого. Это представляется довольно естественным. Проанализируем зависимость величины области синхронизации S от параметра β . Увеличение β приводит к большей асинхронности поведения отдельных элементов системы. Таким образом, площадь области синхронизации уменьшается при увеличении параметра β . Зависимость величины области синхронизации от Δ будет рассмотрена позднее.

Для подтверждения полученных закономерностей было проведено прямое численное интегрирование системы при различных значениях параметров $\gamma_{1,2}$ и d . Сравнение результатов, полученных численно и аналитически, показано на рис. 3. Численная граница

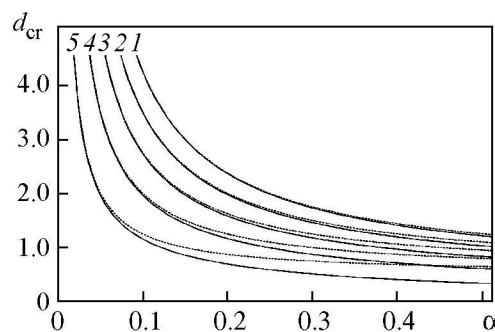


Рис. 3. Зависимость от параметра синхронизации α минимального значения параметра связи d_{cr} , необходимого для установления синхронизации при $|\phi_1 - \phi_2| < \alpha, \beta = 1.0$: 1 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.0$; 2 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.15$; 3 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.30$; 4 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.45$; 5 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.60$. Сплошные линии – численные результаты, пунктирные линии – аналитическая оценка (17)

области синхронизации получена путём нахождения минимального значения α , $|\phi_1 - \phi_2| < \alpha$ для точек пространства параметров $\gamma_{1,2}$, d , удовлетворяющих критерию синхронизации $|\phi_1 - \phi_2| < \text{const}$. В расчётах использовался эквивалентный критерий $\langle \dot{\phi}_1 \rangle / \langle \dot{\phi}_2 \rangle = 1$. Аналитическая оценка довольно точно аппроксимирует границу области синхронизации, полученную в результате численных экспериментов. Наибольшую точность оценка достигает при небольших значениях параметра синхронизации α . Наблюдается увеличение разницы между аналитическими и численными результатами при уменьшении величины $\Delta = \gamma_1 - \gamma_2$. Это происходит вследствие того, что при получении аналитического приближения границы области синхронизации S оценки проводились по наихудшему случаю. Однако небольшая разница между вращательными моментами благоприятствует синхронизации. Поэтому, реальная граница области S в этом случае оказывается ниже прогнозируемой.

Для более полного и подробного изучения области синхронизации были построены бифуркационные диаграммы данной системы в плоскости (γ_1, γ_2) при различных значениях параметра связи d (рис. 4). В областях D_s происходят вращательные движения по обоим переменным. Эти области соответствуют синхронизации, а фазовый портрет системы в этом случае представлен на рис. 5, *г*. На рис. 4 видно, что увеличение связи d между маятниками приводит к расширению ряда областей, в том числе и области синхронизации. Влияние параметра связи на другие области бифуркационной диаграммы будет рассмотрено ниже.

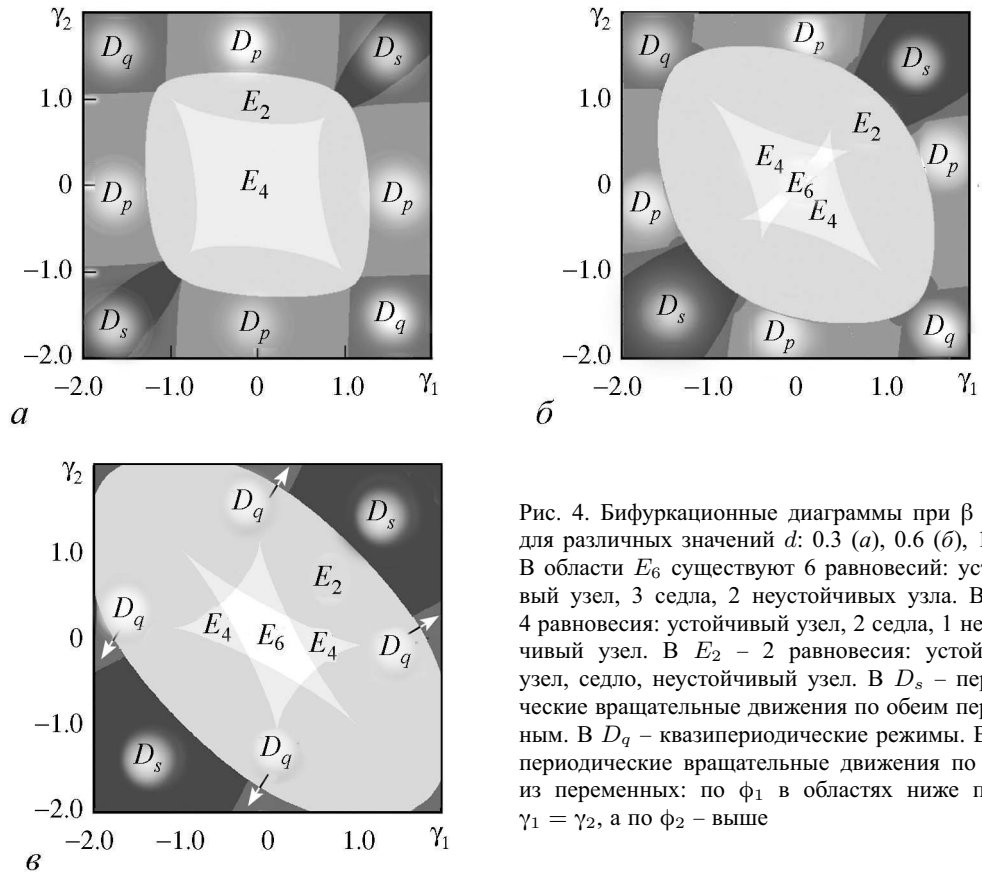


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы при $\beta = 1.0$ для различных значений d : 0.3 (*а*), 0.6 (*б*), 1.1 (*г*). В области E_6 существуют 6 равновесий: устойчивый узел, 3 седла, 2 неустойчивых узла. В E_4 – 4 равновесия: устойчивый узел, 2 седла, 1 неустойчивый узел. В E_2 – 2 равновесия: устойчивый узел, седло, неустойчивый узел. В D_s – периодические вращательные движения по обоим переменным. В D_q – квазипериодические режимы. В D_p – периодические вращательные движения по одной из переменных: по ϕ_1 в областях ниже прямой $\gamma_1 = \gamma_2$, а по ϕ_2 – выше

3.1. Другие режимы активности, наблюдаемые в системе

3.1.1. Квазипериодические режимы. С областями синхронизации на бифуркационных диаграммах в плоскости (γ_1, γ_2) непосредственно граничат области D_q (см. рис. 4), где наблюдаются квазипериодические режимы. Типичный фазовый портрет показан на рис. 5, *e*. Следует отметить, что внутри этих областей существуют небольшие подобласти, где происходит синхронизация $n:m$. Однако они крайне малы и не рассматривались в данной работе подробно.

3.1.2. Периодические движения. В системе наблюдаются вращательные периодические движения разных типов. В областях D_s (см. рис. 4) происходят вращательные движения по обоим переменным, соответствующие синхронизации. В областях D_p бифуркационных диаграмм происходит вращательное периодическое движение лишь по одной переменной. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 5, *д*. Для областей D_p , находящихся выше оси симметрии $\gamma_1 = \gamma_2$, вращательное периодическое движение соответствует вращениям по переменной ϕ_1 ; в областях D_p , находящихся ниже оси симметрии $\gamma_1 = \gamma_2$, происходит вращательное периодическое движение по переменной ϕ_2 .

3.1.3. Режим отсутствия колебаний. Основную часть бифуркационных диаграмм занимают области $E_i, i \in \{2, 4, 6\}$, соответствующие режиму отсутствия осцилляций. Данный режим наблюдается в системе довольно часто, поэтому представляется важным рассмотреть эти области подробнее. Для этого была сделана замена временной переменной $\tilde{t} = t/\beta$ и введены новые параметры $\gamma_{1,2}/\beta$. Полученная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \gamma_1 - \sin \phi_1 + d(\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \cos \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 = \gamma_2 - \sin \phi_2 + d(\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \cos \phi_1). \end{cases} \quad (18)$$

Запишем систему уравнений, из которой находятся координаты состояний равновесия,

$$\begin{cases} \gamma_1 - \sin \phi_1^* + d(\sin \phi_2^* \cos \phi_1^* - \sin \phi_1^* \cos \phi_2^*) = 0, \\ \gamma_2 - \sin \phi_2^* + d(\sin \phi_1^* \cos \phi_2^* - \sin \phi_2^* \cos \phi_1^*) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Приведем значения собственных чисел, соответствующих возможным состояниям равновесия,

$$\begin{aligned} D &= 4d^2 \cos(\phi_2^* - \phi_1^*)^2 + (\cos \phi_1^* - \cos \phi_2^*)^2, \\ \lambda_{1,2} &= -d \cos(\phi_2^* - \phi_1^*) - \frac{\cos \phi_1^* + \cos \phi_2^*}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь D – дискриминант характеристического уравнения системы (19)). Заметим, что дискриминант D не может быть отрицательным. Значит, если в системе (18) существует состояние равновесия, и $\lambda_{1,2}$ суть собственные числа, соответствующие

ему, то $\lambda_{1,2} \in \text{Re}$. Таким образом, состояний равновесия типа фокус не может быть в данной системе.

Проведём в (19) стандартную тригонометрическую замену переменных $\tan(\phi_1/2) = x_1$, $\tan(\phi_2/2) = x_2$, $\phi_1, \phi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, получим

$$\begin{cases} \gamma_1 - \frac{2x_1}{1+x_1^2} + d \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - d \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} = 0, \\ \gamma_2 - \frac{2x_2}{1+x_2^2} - d \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} + d \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Эквивалентная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \gamma_1(1+x_1^2)(1+x_2^2) - 2x_1(1+x_2^2) + 2dx_2(1-x_1^2) - 2dx_1(1-x_2^2) = 0, \\ \gamma_2(1+x_1^2)(1+x_2^2) - 2x_2(1+x_1^2) - 2dx_2(1-x_1^2) + 2dx_1(1-x_2^2) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для решения данной системы уравнений, запишем результат полиномиальных выражений, стоящих в левых частях. Результат есть многочлен от коэффициентов двух полиномов, равный нулю в том и только в том случае, когда у этих полиномов имеется общий корень. Приравнявая результат к нулю и решая это уравнение относительно переменной x_2 , можно найти решения системы (22)

$$\begin{aligned} & (\gamma_2 + d(\gamma_1 + \gamma_2))^2 - 4(1+d)(\gamma_2 + d(\gamma_1 + \gamma_2))x_2 + \\ & + (4 + 3\gamma_2^2 + 3d^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 2d(4 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2))x_2^2 - \\ & - 8(\gamma_2 + d^2(\gamma_1 + \gamma_2))x_2^3 + (4 + 3\gamma_2^2 + 3d^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - \\ & - 2d(4 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2))x_2^4 - 4(-1+d)(-\gamma_2 + \\ & + d(\gamma_1 + \gamma_2))x_2^5 + (\gamma_2 - d(\gamma_1 + \gamma_2))^2 x_2^6 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Обобщающие диаграммы по исследованию состояний равновесия системы (18) в зависимости от параметра связи d представлены на рис. 4. Рассмотрим диаграмму с наибольшим числом областей (рис. 4, б). Состояния равновесия существуют во всех областях E . В областях D их нет. В области E_6 существует шесть состояний равновесия: глобально устойчивый узел, три седла и два неустойчивых узла (рис. 5, а). При переходе в область E_4 (рис. 5, б) вместо неустойчивых узлов и одного из седел остаётся неустойчивое состояние равновесия типа узел и остаётся четыре состояния равновесия. При переходе в область E_2 (рис. 5, в), где существует лишь два равновесия – устойчивый узел и седло, слияние седла и неустойчивого узла рождает неустойчивое периодическое движение. При выходе из области E_2 равновесия сливаются через седлоузловую бифуркацию, образуя устойчивое движение.

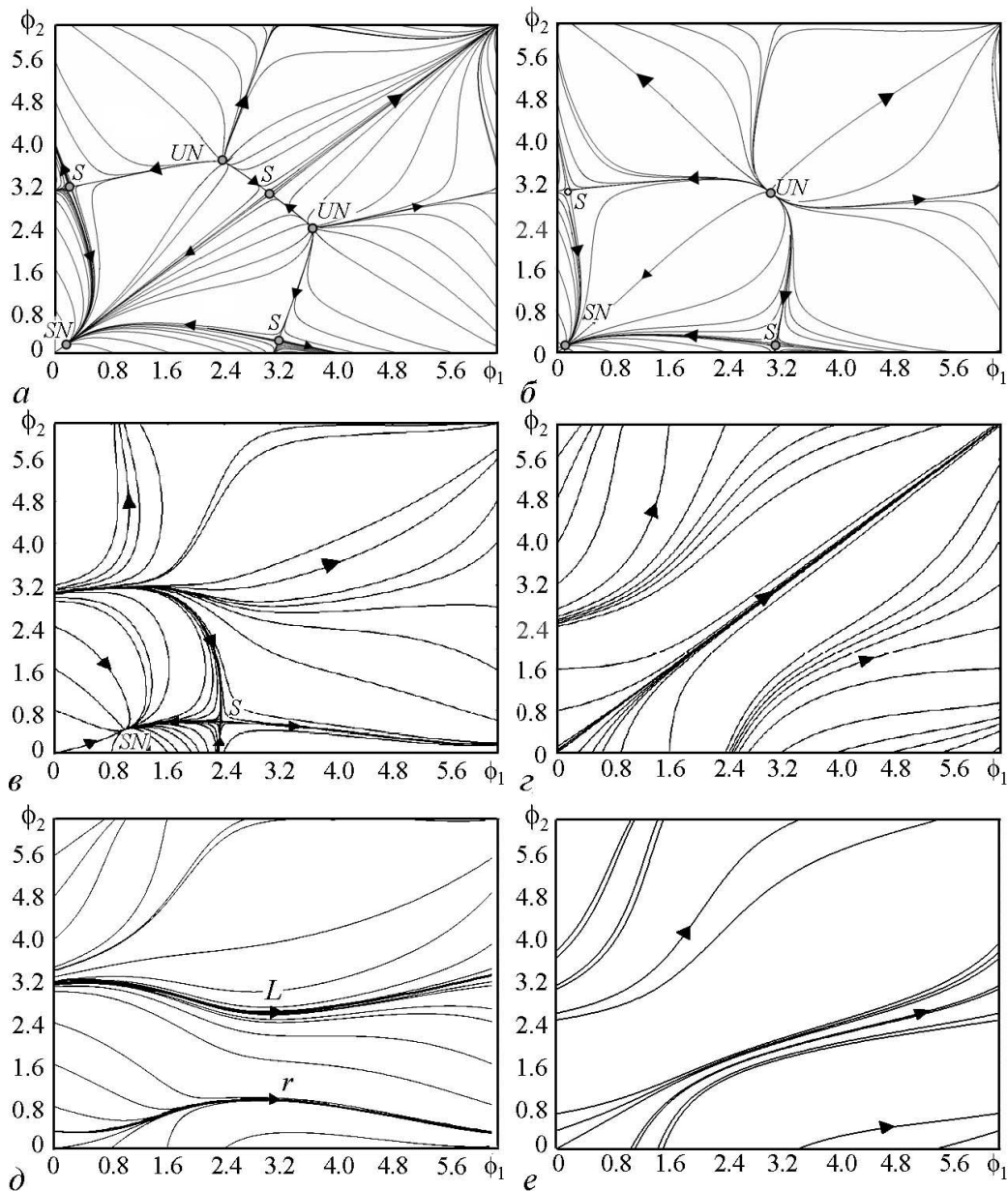


Рис. 5. Фазовые портреты системы (18) при $d = 0.6$ и $\gamma_{1,2}$ из различных областей пространства параметров: $a - E_6$, $b - E_4$, $v - E_2$, $z - D_s$, $d - D_p$, $e - D_q$

Исследуем аналитически границу, отделяющую область E_2 от областей без состояний равновесия. Рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Координаты состояния равновесия находятся из уравнения

$$\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2\gamma. \quad (24)$$

Рассмотрим симметричный случай, когда система полностью симметрична относительно фаз. В этом случае решение будет лежать на прямой $\phi_1^* = \phi_2^* = \phi$, а собственные числа характеристического уравнения системы имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -d - \cos \phi \pm d. \quad (25)$$

Легко видеть, что при $\gamma > 0$ существует лишь один симметричный случай, когда состояния равновесия одно. Это происходит на внешней границе области E_2 в точке $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ при этом $\phi = \pi/2$. Одно из собственных чисел, соответствующих данному состоянию равновесия, нулевое, другое – отрицательное. Таким образом, состояние равновесия, найденное нами аналитически, действительно образовалось путём седлоузловой бифуркации из седла и устойчивого узла, что подтверждает численные результаты.

Остановимся более подробно на влиянии параметра связи d на области бифуркационных диаграмм на рис. 4. При увеличении связи между элементами системы область E_2 заметно расширяется. Таким образом, при сильной связи d режим отсутствия колебаний становится преобладающим в системе. В то же время область E_4 заметно уменьшается. Появившаяся область E_6 не достигает больших размеров по сравнению с доминирующей E_2 . Это означает, что относительно непростое поведение системы при переходе в единственное устойчивое равновесное состояние наблюдается всё реже по мере увеличения параметра связи d .

Заключение

В рамках данного исследования была рассмотрена система уравнений, описывающая динамику двух упруго связанных между собой математических маятников одинаковой массы в сильно вязкой среде, находящихся под действием внешнего вращательного момента.

- Исследовано влияние параметров системы на существующие в ней режимы активности. Так, возрастание параметра β , вносящего асинхронность во вращения маятников, приводит, с одной стороны, к уменьшению области синхронизации $1 : 1$ (основной области синхронизации), а с другой – к появлению большого количества полос в плоскости (Δ, d) , в которых наблюдается синхронизация $n : m$.

- Получена аналитическая оценка границы основной области синхронизации в плоскости (d, α) , где α – параметр синхронизации, ограничивающий разность фаз осцилляторов.

- Кроме непосредственного вывода об уменьшении области синхронизации при увеличении β , было отмечено расширение этой области при меньшем расхождении вращательных моментов, действующих на маятники. При помощи прямого численного моделирования была показана адекватность аналитической оценки.

- Построены бифуркационные диаграммы системы в плоскости (γ_1, γ_2) для различных значений параметра связи d . Таким образом, была получена зависимость областей, в которых наблюдаются квазипериодический, периодический режимы и режим отсутствия осцилляций, от действия вращательных моментов на каждый из маятников и величины связи между ними.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00811).

Библиографический список

1. *Матросов В.В.* Динамика двух фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления, связанных через нелинейный элемент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15.
2. *Bhansali P., Roychowdhury J.* Gen-Adler: The generalized Adler's equation for injection locking analysis in oscillators // Proceedings of the Design Automation Conference. 2009. P. 522–527.
3. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O.V., Tass P.A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82, № 3. P. 036208. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.036208>
4. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, № 6. P. 060901. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.060901>
5. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022911. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022911>
6. *Xie J., Knobloch E., Kao Hsien-Ching.* Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022919. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022919>
7. *Смирнов Л.А., Крюков А.К., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Осипов Г.В.* Вращательная динамика системы из двух связанных маятников // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, № 4. С. 425.
8. *Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D. 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295–310.
9. *Guckenheimer J., Khibnik A.* Torus maps from weak coupling of strong resonances / In book: «Methods of qualitative theory of differential equations and related topics» // American Mathematical Society. 2000. P. 205–218.
10. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / Series «The Cambridge nonlinear science series». Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
11. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2004. P. 491.
12. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. Wiley-VCH, 2004. P. 207.
13. *Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P.* Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291–1294.
14. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladders // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190–2195.
15. *Kim B.J., Kim S., Lee S.J.* Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462–8466.
16. *Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J.* Dynamics of Josephson junction ladders // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459–464.

17. *Denniston C., Tang C.* Phases of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930-3933.
18. *Qjan M., Weng J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // *Annals of Physics.* 2008. Vol. 323. P. 1956-1962.
19. *Fishman R.S., Stroud D.* Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 290-296.
20. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications.* 2009. P. 879-886.
21. *Якушев Л.В.* Биомеханика ДНК: Вращательные колебания оснований // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2011. Т. 3, № 3. С. 319-328.
22. *Аврейцев Я., Млынарска С., Якушев Л.* О нелинейных колебаниях пар оснований ДНК // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, № 4. P. 392-400.
23. *Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.* Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091-3099.
24. *Takeno S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140-163.
25. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51-61.
26. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 181-1203.
27. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361-2374.
28. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640-643.
29. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990-6006.
30. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
31. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280-12293.
32. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // *Proceedings of the IRE.* 1946. Vol. 34, № 6. P. 351-357.
33. *Osipov G., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.

Поступила в редакцию 14.04.2016
После доработки 17.05.2016

THE DYNAMICS OF TWO NONLINEARLY COUPLED OSCILLATORS

S. Khrisanfova, E. Kadina, E. Gubina, L. Kogan, G. Osipov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University

Prospect Gagarina, 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com, gubinael@mail.ru, elena.kadina@itmm.unn.ru,

lyudmila.kogan@itmm.unn.ru, grosipov@gmail.com

In this paper the dynamics of two elastically coupled pendulums is studied. The pendulums oscillate under the influence of external rotational moments, their masses are considered to be equal. The current work is motivated by multiple applications in physics and biology that the model has. Due to the fact that most of the previous studies focused on similar systems of higher order, we believe that the current research can serve as a basis for understanding the functioning of more complex oscillatory ensembles. It is, therefore, vital to provide a complete study of the system dynamics for different parameter values. Throughout the study different regimes of the system activity are examined. Thus, non-oscillatory mode, synchronization, periodic and quasi-periodic regimes are discussed in the paper. Synchronization is often considered to be one of the most important forms of interaction between oscillatory elements of various nature. For this reason the synchronization domain is thoroughly investigated in this paper. The main results of the current research are as follow. An analytical approximation of the synchronization domain border is obtained in (d, α) parameter plane. Here d denotes the coupling strength, whereas α is the synchronization parameter. By means of numerical integration methods the approximation is also shown to be accurate. In order to provide better understanding of the regimes that exist in the system for various parameter values, bifurcation diagrams for several values of the coupling parameter in (γ_1, γ_2) plane are drawn.

Keywords: Coupled pendulums, nonlinear coupling, synchronization.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-4-20

Paper reference: Khrisanfova S., Kadina E., Gubina E., Kogan L., Osipov G. The dynamics of the two nonlinearly coupled oscillators // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 4–20.

References

1. *Matrosova V.V.* Dynamics of two phase locked loop system coupled through the phase discriminator // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 15, № 3. P. 15 (in Russian).
2. *Bhansali P., Roychowdhury J.* Gen-Adler: The generalized Adler's equation for injection locking analysis in oscillators // *Proceedings of the Design Automation Conference*. 2009. P. 522–527.
3. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O.V., Tass P.A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 82, № 3. P. 036208. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.036208>
4. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89, № 6. P. 060901. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.060901>
5. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022911. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022911>

6. Xie J., Knobloch E., Kao Hsien-Ching. Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022919. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022919>
7. Smirnov L.A., Kryukov A.K., Kadina E.Yu., Gubina E.V., Osipov G.V. Rotational dynamics in a pair of coupled // *J. The Problems of Strength and Plasticity*. 2015. Vol. 77, № 4. P. 425 (in Russian).
8. Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K. Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*. 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295–310.
9. Guckenheimer J., Khibnik A. Torus maps from weak coupling of strong resonances / In book: «Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics» // American Mathematical Society. 2000. P. 205–218.
10. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / Series «The Cambridge nonlinear science series». Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
11. Braun O., Kivshar Yu.S. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer, 2004. P. 491.
12. Yakushevich L.V. Nonlinear Physics of DNA. Wiley-VCH, 2004. P. 207.
13. Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P. Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291–1294.
14. Ryu S., Yu W., Stroud D. Dynamics of an underdamped Josephson junction ladders // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190–2195.
15. Kim B.J., Kim S., Lee S.J. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson junction ladders under magnetic frustration // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462–8466.
16. Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J. Dynamics of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459–464.
17. Denniston C., Tang C. Phases of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930–3933.
18. Qjan M., Weng J.-Z. Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // *Annals of Physics*. 2008. Vol. 323. P. 1956–1962.
19. Fishman R.S., Stroud D. Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B*. 1988. Vol. 38, № 1. P. 290–296.
20. Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J. Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications*. 2009. P. 879–886.
21. Yakushevich L.V. Biomechanics of DNA: Rotational oscillations of bases // *J. Computer Research and Modeling*. 2011. Vol. 3, № 3. P. 319 (in Russian).
22. Awrejcewicz J., Mlynarska S., Yakushevich L.V. Non-linear oscillations of DNA base pairs // *J. Appl. Math. Mech.* 2013. Vol. 77, № 4. P. 392 (in Russian).
23. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M. Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091–3099.

24. *Takeo S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140–163.
25. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51–61.
26. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 1181–1203.
27. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361–2374.
28. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640–643.
29. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, №10. P. 5990–6006.
30. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
31. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280–12293.
32. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // *Proceedings of the IRE.* 1946. Vol. 34, № 6. P. 351–357.
33. *Osipov G., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.



Хрисанфова Светлана Олеговна – родилась в Нижнем Новгороде (1993). В 2014 году получила диплом бакалавра прикладной математики и информатики в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2014 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Прикладная математика и информатика» в Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ. Выполняет исследования по проекту «Фазовая динамика осцилляторных сред». Полученные результаты были представлены на Всероссийских и Международных конференциях, опубликовано 4 тезиса.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
 E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com



Губина Елена Васильевна – родилась в Горьком (1952). Окончила механико-математический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1970), кандидат физико-математических наук. Доцент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: gubinael@mail.ru



Кадина Елена Юрьевна – родилась в Горьком (1973). Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1996), ассистент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
E-mail: elena.kadina@itmm.unn.ru



Коган Людмила Владимировна – родилась в Горьком (1941). Окончила Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1963), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: lyudmila.kogan@itmm.unn.ru



Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 году. Заведующий кафедрой теории управления и динамики машин- доктор с 2006 года Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Читал лекции по общим курсам «Классическая механика» и «Теория колебаний», ведет практические и лабораторные занятия, руководит курсовыми и дипломными работами студентов. Разработал специальные курсы «Синхронизация, структуры и хаос в нелинейных дискретных средах», «Численные методы в исследовании нелинейных систем» и «Возбудимые среды: динамика и управление». Опубликовал более 120 научных работ, а за последние 5 лет – 30 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах и в сборниках материалов нескольких международных конференций, на которых выступал с докладами в качестве приглашенного лектора. В 2004 году защитил докторскую диссертацию по теме «Синхронизация в неоднородных ансамблях локально диффузионно связанных регулярных и хаотических осцилляторов». За последние пять лет участвовал в выполнении двух международных (INTAS) и пяти российских (РФФИ) научных проектов (в трех из них – в качестве руководителя). Работал по приглашениям, в том числе как приглашенный профессор, зарубежных университетов в Дармштадте, Леувене, Тайбее, Потсдаме, Вене, Гонконге, Ланкастере и Бостоне.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: grosipov@gmail.com