Изв. вузов «ПНД», т. 20, № 1, 2012 УДК 53.081.5(075.2)

ДВЕ ЛЕКЦИИ. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ ИЛИ РАЙСКАЯ ЖИЗНЬ В ФИЗИКЕ

Д.И. Трубецков

В двух лекциях, прочитанных на школе для старшеклассников «Нелинейные дни в Саратове для молодых», изложены основные определения и положения теории размерности и подобия, а также некоторые специальные приемы решения конкретных задач, в частности, использование π-теоремы и дополнения Хантли. Приведены решения задач из различных областей физики.

Ключевые слова: Размерность, подобие, модели.

Введение

Лекции посвящены, как следует из названия, анализу размерностей и его применению в физике. Вторая часть названия заимствована из статьи В. Вайскопфа «Современная физика в элементарном изложении», который писал:

«...Я буду вычислять только порядки физических величин. Используемый в расчетах знак равенства поэтому будет означать вовсе не “равно”, а “такого порядка величины”. Численными множителями, например, 2π и т.д. я буду пренебрегать. Райская жизнь!».

В его слова включается метод оценок (в большей степени) и анализ размерностей, о чем мы и будем говорить.

Тому же Вайскопфу принадлежит статья об удивительной эффективности математики в физике (замечу, что не только в физике). Мы привыкли к чуду абстрактных чисел, например, к их сложению: когда числа абстрактные, то все равно, что складывается, фрукты или галоши. Но ситуация меняется, если вы знаете, к какому объекту относится число. Вспомним детские стишки: «И вышло у меня в ответе два землекопа и две трети». В данной конкретной ситуации число $2\frac{2}{3}$ недопустимо, хотя в арифметике – допустимо.

Естественный вопрос: «Если мы имеем дело с размерными величинами, то что делать? И вообще, есть ли какая-нибудь наука на сей счет»? Да, есть, и ее называют анализом размерности или теорией размерности. Наука небольшая, но ее и возможные ошибки из-за ее неумелого использования должен знать, по-моему, любой школьник, изучающий естественные науки.

О предсказаниях и моделях

В основе теории любого процесса или явления лежит модель, справедливая лишь в определенных пределах. В каких именно, мы узнаем чаще всего тогда, когда она перестает описывать реальность. Нужно либо поправлять модель, либо искать новую. В этот период ломки модели и важна теория размерности. Чем бы вы ни занимались – теорией или экспериментом, важно не только поставить задачу (создать теоретическую модель или придумать постановку эксперимента), но и попробовать представить себе, что должно получиться в результате вашей работы. Вот несколько мнений на эту тему.

Английский физик-экспериментатор Г. Липсон пишет: «Находятся люди, которые считают, что у ученого не должно быть никакой предвзятой идеи относительно исхода его эксперимента; ученый – говорят они – должен быть совершенно объективным. Это вздор. Настоящий ученый почти всегда ставит эксперименты с целью проверить ожидаемые результаты. Он испытывает удовольствие, обнаружив то, что ожидал, и разочарование, когда результаты эксперимента не совпадают с ожидаемыми. Если же ученый ничего не ожидает получить, то он не может быть вполне уверен в значимости своих результатов».

А вот мнение выдающегося ученого и педагога Джона Уилера – учителя Ричарда Фейнмана, которое получило название «правило Уилера»: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее: ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску».

Повторюсь, что тому, кому придется серьезно заниматься физикой, нужно прежде всего научиться делать оценки, которые часто подсказывают и сам путь более точного решения задачи. Именно это помогает делать анализ размерностей – самый распространенный метод физических оценок. По мнению одного из самых выдающихся физиков XX столетия Энрико Ферми, «в физике нет места для путаных мыслей... действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности».

А что значит – понимать природу того или иного явления? Это означает – создать его модель.

Модель (от лат. modulus – мера, образец, норма) – в широком смысле в науке – аналог, «заместитель» оригинала (фрагмента действительности), который при определенных условиях воспроизводит интересующие исследователя свойства оригинала. Модель – карикатура на изучаемое явление, но зато одну и ту же модель можно использовать для описания широкого круга явлений.

Иногда модели рассматривают как «картины», соотносящиеся с чем-то.

Академик Н.Н. Моисеев считал, что модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации, причем модель кодирует ту информацию, которую люди раньше не знали. В этом заключена предсказательная способность модели.

Создание модели – главный момент исследований с помощью анализа размерностей.

Основные определения теории размерностей

1. *Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные, называется размерностью.*
2. *Размерность любой физической величины может быть только произведением возведенных в степень величин, принятых за основные.*
3. *Размерности обеих частей равенства, выражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.*
4. *Безразмерные комплексы размерных величин, представляющие собой произведение различных степеней этих величин, называются критериями подобия; их обычно обозначают как* $\Pi = \mathrm{idem}$.

В этих достаточно прозрачных определениях неясным остается одно: какие величины принять за основные. Дадим ответ на этот вопрос.

Когда-то не считалось неудобным, что разные длины измерялись по-разному. Вот, к примеру, старорусские меры длины:

1 вершок –	4.445 см,
1 аршин – 16 вершков –	0.7112 м,
1 сажень – 3 аршина –	2.1336 м,
1 верста – 500 саженей –	1.0668 км,
1 десятина –	10.954 км^2.

И только во времена Великой французской революции была разработана и принята метрическая система мер. Первый эталон метра – доля длины парижского меридиана, равного $40 \cdot 10^6$м.[1] Измерение меридиана, необходимое для создания метрической системы, велось с восьмидесятых годов восемнадцатого века и длилось много лет. Самой яркой фигурой в этой измерительной эпопее был, несомненно, французский ученый и человек удивительной судьбы Доминик Франсуа Араго. В замечательной книге Даниила Александровича Гранина «Сад камней»[2] есть «Повесть об одном ученом и одном императоре», посвященная Араго. Начинается она так: «Имя Араго хранилось в моей памяти со школьных лет. Щетина железных опилок вздрагивала, ершилась вокруг проводника... Стрелка намагничивалась внутри соленоида. Красивые, похожие на фокусы опыты, описанные во всех учебниках...».

Думаю, что и вы помните эти опыты.

Но в жизни Араго кроме науки были переодевания, побеги, рабство, пираты... По Гранину, Араго – «...молодой француз, немножко д'Артаньян, немножко хитроумный Одиссей, влюбчивый, неприступный, любознательный и легкомысленный...», благополучно выходящий из самых невероятных ситуаций. Я не могу и не хочу пересказы-

[1] В настоящее время метр есть длина, равная 1650763.73 длины волны (в вакууме) излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86. До 1960 года за метр было принято расстояние между двумя штрихами, нанесенными на платиноиридиевом стержне, который находился в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа.

[2] Гранин Д.А. Сад камней. М.: Современник, 1972, с. 125–177.

вать повесть. Прочитайте ее. Еще только одна цитата из повести Гранина, имеющая отношение к нашей теме.

«У меридиана были свои законы. Участок, измеренный Лакайлем, давно слился с отрезком, измеренным Кассини, а тот – с отрезком, измеренным Мешеном, теперь к ним добавится дуга, измеренная Араго.

На меридиане не пишут имен, на нем не будут обозначены три года жизни Араго, его скитания, свист пуль, чума, там будут лишь градусы, минуты, секунды».

Наряду с единицей длины была введена и единица измерения времени – секунда[3] – доля звездного (сидерического) года, который равен $3.1557 \cdot 10^7$ с. Метра и секунды оказалось достаточно, чтобы измерять то, что называют пространством-временем. Следовательно, кинематика по сути дела совпадает с геометрией пространства-времени. Напомню, что в школьных учебниках кинематику определяют как раздел физики, в котором изучается механическое движение тел без выяснения причин, вызвавших это движение. Если есть взаимодействие тел, то это уже динамика, и для изучения ее законов необходимо ввести понятие силы, а также связать силу, действующую на тело, с ускорением, которое приобретается телом, или связать силу тяготения с массой, которая порождает гравитационное поле.

Появилась «двуликая масса»: в одних построениях она была инертной, в других – гравитационной. Однако Галилей своими опытами доказал, что все тела падают с одинаковым ускорением. Масса оказалась только одна: «двуликость» исчезла, поскольку гравитационная и инертная масса совпали. (Впрочем, мы позднее вернемся к «двуликости», используя ее при решении одной из задач.) В этом совпадении состоит великий принцип эквивалентности. Массу стали определять как некоторую величину, характеризующую реакцию тела на заданную силу, как меру инертности. Был создан рукотворный эталон, равный 1 кг.

Так появилась система единиц длина–масса–время (LMT). Указанные размерности независимые (из них нельзя составить безразмерную комбинацию) и именно их в анализе размерностей чаще всего принимают за основные. Исходя из физических законов, можно было все новые и новые единицы сводить к основным. Действительно, обозначая размерность любой величины квадратными скобками, получим, например, для скорости $[v] = LT^{-1}$, для ускорения $[a] = LT^{-2}$, для силы $[F] = LMT^{-2}$, для энергии $[\mathcal{E}] = ML^2T^{-2}$, исходя из закона Кулона для заряда $[q] = L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ и т.д.

Как указывает Я. Смородинский[4], в возможности создания эталонов – единственных на весь мир – скрыто глубокое удивительное свойство природы: при установлении эталонов длины, массы и времени человек использовал важное свойство нашего физического мира – свойство однородности пространства по расстояниям, по времени и по массе. Впрочем, последнее не совсем верно даже на Земле, поскольку 1 кг ведет себя по-разному на разных широтах.

Давайте теперь, следуя Я. Смородинскому, введем в изложение некоторую детективную интригу. Пусть случилась катастрофа: Парижская лаборатория мер и весов погибла. А нам нужно определить период малых колебаний маятника. Что делать? Вот здесь и поможет анализ размерностей, поэтому обратимся к определениям,

[3]Секунда – единица измерения времени, равная 1/31556925.9747 доли тропического года для момента 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени (31 декабря 1899 г., полдень).

[4]Смородинский Я.А. Подобие в природе и фундаментальные постоянные // Наука и жизнь, 1977, № 8, с. 79–85.

которые мы сформулировали раньше. Уже из этих утверждений следует рецепт решения задач методом размерности.

- Выпишите группу N физических величин, между которыми, как вам кажется, есть какая-то взаимосвязь; это – самый важный и ответственный этап – этап создания модели, на котором нельзя не учесть главного в описываемом явлении, но нельзя ввести и лишние величины.
- Не забудьте рядом с ними поставить их размерности, выраженные через $K \leq N$ размерностей величин, принятых за основные.
- Попытайтесь составить из выписанных величин безразмерные произведения; некоторые величины при этом, возможно, придется возвести в какие-то степени. Часто не так уж просто составить такие произведения без использования формальных приемов, поэтому можно воспользоваться определением 2 (это основная формула метода размерности), составив матрицу размерностей – таблицу, в которой по горизонтали расположены выбранные вами для решения задачи величины (a_1, a_2 ... a_n), а по вертикали – величины, выбранные как основные; в клеточках матрицы ставятся показатели степеней, в которые нужно возвести основные величины, чтобы получить размерности (a_1, a_2 ... a_n).
- Если $N - K = 1$, то безразмерное произведение будет единственным и, приравняв его безразмерной константе, вы получите искомую закономерность.

Вернемся к задаче о маятнике и на примере ее решения используем описанный выше рецепт.

Рассмотрим для простоты математический маятник – тяжелую материальную точку массой m, подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити длиной l. Поскольку маятник движется к положению равновесия под действием силы тяжести, его период τ может зависеть от ускорения силы тяжести g, от массы m маятника и его длины l. Ограничим совокупность возможных движений маятника условием, что они плоские. Будем считать, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды колебаний, то есть ограничимся малыми колебаниями около положения равновесия. Пренебрежем затуханием колебаний (в число определяющих величин не войдут вязкость и температура воздуха), не будем также учитывать ускорение точки подвеса маятника вместе с Землей (в число определяющих величин не войдет скорость вращения Земли). Тогда для периода колебаний можно записать формулу

$$\tau = f(l, m, g). \tag{1}$$

Выберем в качестве основной систему LMT. Поскольку $N = 4$, а $K = 3$, то $N - K = 1$ и безразмерное произведение будет единственным. В данном случае легко сообразить, что безразмерная комбинация имеет вид: $\Pi = \sqrt{\tau^2/(l/g)}$ или $\tau = \Pi\sqrt{l/g}$. Однако решим задачу и формальным образом. Составим матрицу размерностей, исходя из того, что $[\tau] = T^1$; $[l] = L^1$; $[m] = M^1$; $[g] = L^1 T^{-2}$. Тогда

$$\begin{array}{ccccc} & \tau & l & m & g \\ L & 0 & 1 & 0 & 1 \\ M & 0 & 0 & 1 & 0 \\ T & 1 & 0 & 0 & -2. \end{array}$$

Используя определение 2 и формулу (1), имеем

$$\tau = \Pi l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}, \tag{2}$$

где α, β и γ – не известные нам показатели степеней. На основе положения 3, из формулы (2) получим

$$L^0 M^0 T^1 = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}. \tag{3}$$

Приравнивая показатели степеней в формуле (3) при одинаковых основаниях, приходим к системе уравнений

$$\alpha + \gamma = 0, \quad 1 = -2\gamma, \quad \beta = 0,$$

из которой следует, что

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\tau = \Pi l^{1/2} g^{-1/2} = \Pi\sqrt{l/g}.$$

Согласно определению 4, мы получили критерий подобия

$$\Pi = \frac{\tau g^{1/2}}{l^{1/2}} \quad \text{или} \quad \bar{\Pi} = \Pi^2 = \frac{\tau^2 g}{l}. \tag{4}$$

Дадим еще одно определение.

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные величины $\Pi_i (i = 1, 2, ...m)$ *совпадают.*

Применительно к нашей задаче о маятнике закон подобия говорит, что, если мы увеличим длину маятника в n раз, то отношение длины нового маятника к квадрату его периода остается неизменным, поскольку $l_1/\tau_1^2 = l_2/\tau_2^2 = g/\bar{\Pi}$, а $g = \mathrm{const}$. Таким образом, если существует хоть один маятник, для которого известна величина l/τ^2, то мы можем найти периоды маятников любой длины.

В большинстве случаев, прежде чем приступить к изготовлению какого-либо дорогостоящего и крупного сооружения, например, корабля или самолета, для получения его характеристик в предстоящих условиях работы прибегают к испытаниям на моделях – к моделированию. При этом надо знать, как пересчитать результаты опыта на модели на натуру. Если этого не знать, моделирование бесполезно. Для рационального моделирования основным является понятие подобных явлений и, следовательно, установление критериев подобия.

Разумеется, закон подобия, как и любые другие законы природы, должен иметь ограниченную область применения. Очевидно, что маятник, длина которого сравнима с радиусом R Земли, будет качаться не так, как маятник обычных размеров l, потому что натяжение, обусловленное силой тяжести, будет существенно меняться вдоль его длины.

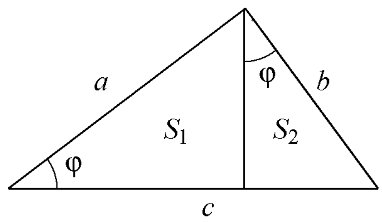
Таким образом, закон подобия для маятника будет справедлив только в том случае, если $l \ll R$. Следовательно, геометрического подобия в гравитационном поле нет.

Мы уже упоминали, что Галилей открыл закон подобия для свободно падающих тел (а мы его использовали для маятника, считая $g = \mathrm{const}$). Но по иронии судьбы он же отметил, что некоторые законы не остаются неизменными при изменении масштабов. Вот его размышления над прочностью костей. Животное вдвое большей длины, ширины и высоты должно весить в 8 раз больше. Однако его вдвое более широкие кости имеют лишь вчетверо большее поперечное сечение, а значит, способны выдерживать лишь вчетверо больший вес. Это означает, что для выдерживания полного веса тела поперечный размер костей должен был бы увеличиться более чем в 2 раза. Такое отклонение от простого подобия вводит естественный масштаб в строение тела как сухопутных, так и водных животных: при некоторых предсказуемых в общих чертах размерах диаметр костей начинает увеличиваться быстрее, чем остальные части тела, разрушая тем самым подобие, но сохраняя в живых животных (на эту тему есть интересная книга: Дж.Б.С. Холдейн «Как важно быть нужного размера»[5]).

Перейдем теперь к решению разных задач.

Примеры различных задач, решаемых методами размерности и подобия

Доказательство теоремы Пифагора. Историки науки считают, что развитию математических способностей Эйнштейна способствовал его дядя Якоб – инженер по образованию. Он давал мальчику математические задачи, и тот испытывал удовольствие от их решения. В 1891 году Эйнштейн приобрел, по его словам, «священную книгу по геометрии» – геометрию Эвклида. Изучая ее, он почувствовал, что некоторые доказательства в книге неоправданно сложны. Вот одно из возможных доказательств теоремы Пифагора, сделанное одиннадцатилетним Эйнштейном. Площадь прямоугольного треугольника S определяется величиной его гипотенузы c и, для определенности, меньшим из острых углов φ, то есть $S = f(c, \varphi)$. Очевидно, что анализ размерности дает $S = c^2\phi(\varphi)$.



Из рисунка видно, что сумма площадей треугольников S_1 и S_2 равна S. Тогда

$$c^2\phi(\varphi) = a^2\phi(\varphi) + b^2\phi(\varphi) \quad \text{и}$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Определение гравитационного радиуса Земли. Начнем с, казалось бы, абстрактной задачи на технику решения с помощью анализа размерностей.

Попробуем составить из гравитационной постоянной G, входящей в закон всемирного тяготения $F = G(m_1 m_2)/r^2$ (считаю, что вы его знаете), массы m и скорости света c величину, имеющую размерность длины. Обозначая ее R, имеем

$$R = f(G, m, c) \to R = \Pi G^{\alpha} m^{\beta} c^{\gamma}. \tag{5}$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT

$$\begin{array}{ccccc} & R & G & m & c \\ L & 1 & 3 & 0 & 1 \\ M & 0 & -1 & 1 & 0 \\ T & 0 & -2 & 0 & -1, \end{array}$$

[5]Haldane J.B.S. On being the right size. L.: Oxford University Press, 1928.

из которой с учетом формулы (5) следует:

$$L^1 M^0 T^0 = L^{3\alpha} M^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} T^{-\gamma}.$$

Тогда $1 = 3\alpha+\gamma$, $0 = -\alpha+\beta$, $0 = -2\alpha-\gamma$ и, следовательно, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -2$. Таким образом, $R = \Pi(Gm/c^2)$. Если $m = M_З$ – массе Земли, то $R_{гр} = \Pi(GM_З/c^2)$ – гравитационный радиус Земли. Важное замечание: величину П, которая присутствует во всех задачах, решаемых методом размерности, в рамках метода определить нельзя (вспомните Вайскопфа: «Я буду вычислять только порядки физических величин...»). Эта величина может быть определена либо из строгой теории, либо из эксперимента. В нашей задаче $\Pi = 2$, поэтому $R_{гр}$ Земли получается примерно равным 0.4 см, $R_{гр}$ Солнца – около 3 км, $R_{гр}$ пульсаров – порядка размеров Земли.

Для тела массой m, лежащего на поверхности Земли, $mg = G(mM_З/r^2)$, поэтому $g = R_{гр}\, c^2/(2r^2)$, то есть гравитационное поле само характеризуется постоянной $R_{гр}$, имеющей размерность длины. Вот почему в гравитационном поле нет геометрического подобия, и короткий и длинный маятники колеблются по-разному.

Задача для будущих президентов. В студенческой или школьной аудитории я всегда задаю вопрос: «Кто хочет стать президентом страны?» И всегда находятся претенденты. Недавно появилась любопытная книга Ричарда А. Мюллера «Физика для будущих президентов»[6], в которой автор пытается ответить на вопрос: «Зачем президенту знать физику?». Ответ в том, что именно с физикой связано множество проблем, с которыми ему придется столкнуться (терроризм, энергетические проблемы, ядерные технологии, космос, глобальное потепление), и еще потому, что физика в наши дни становится главной наукой – наукой, открывающей человечеству двери в будущее. Естественно, что одна из проблем – ядерное оружие.

Поэтому – вот одна важная задача, которую с помощью анализа размерностей может решить президент, даже недолюбливающий физику. Решим задачу о сильном точечном взрыве, под которым понимают взрыв заряда, имеющего малый размер и массу, но обладающего большой энергией. Именно к таким взрывам и относится ядерный взрыв. Эту задачу решали почти одновременно Дж. Тэйлор в Англии, фон Нейман в США и академик Л.И. Седов в СССР. Вот изящное и простое решение, которое предложил Л.И. Седов.

Пусть в течение очень короткого времени в атмосфере выделилась настолько большая энергия $\mathcal{E}$, что при дальнейшем распространении ударной волны можно пренебречь атмосферным давлением за ударной волной. Найдем закон движения ударной волны, то есть ее расстояние r от центра взрыва в момент времени t. Масштабы явления должны зависеть от мгновенно выделившейся энергии $\mathcal{E}$ и инерционных свойств атмосферы – плотности ρ. Матрица размерности в системе LMT имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} & r & \mathcal{E} & \rho & t \\ L & 1 & 2 & -3 & 0 \\ M & 0 & 1 & 1 & 0 \\ T & 0 & -2 & 0 & 1\,. \end{array}$$

[6] Мюллер Р.А. Физика для будущих президентов. М.: АСТ: Астрель: Полиграфиздат, 2011, 411 с.

Будем искать зависимость $r = f(\mathcal{E}, \rho, t)$. Тогда, согласно основной формуле теории размерностей (определению 2), $r = \Pi\mathcal{E}^{\alpha}\rho^{\beta}t^{\gamma}$. Используя матрицу размерностей, находим

$$L^1M^0T^0 = (L^2MT^{-2})^{\alpha}(ML^{-3})^{\beta}T^{\gamma},$$

откуда $1 = 2\alpha - 3\beta$, $0 = \alpha + \beta$, $0 = -2\alpha + \gamma$ и $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = 2/5$. Таким образом, закон движения ударной волны имеет вид

$$r = \Pi\left(\frac{\mathcal{E}}{\rho}\right)^{1/5} t^{2/5}. \tag{6}$$

Соотношение (6) оказалось весьма полезным, поскольку экономило усилия и средства экспериментаторов. Действительно, достаточно произвести единственный взрыв с известными $\mathcal{E}$ и ρ, измерить, до какого r дойдет ударная волна за время t, – и можно определить безразмерную постоянную П. После чего соотношение (6) можно использовать для определения энергии взрыва $\mathcal{E}$, если во время взрыва измерять $r(t)$ и ρ. Разумеется, постоянная П (критерий подобия), должна быть одинаковой для всех взрывов, то есть взрывы должны быть однотипными.

В логарифмических переменных $(5/2)\lg r$, $\lg t$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2}\lg r = \frac{5}{2}\lg\left(\Pi\,\mathcal{E}^{1/5}\rho^{-1/5}\right) + \lg t, \tag{7}$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний Дж. Маком. Из более строгих расчетов следует, что $\Pi \approx 1$. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта ударной волны от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины (она оказалась примерно равной 10^{14} Дж) вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.

Проблема пульсации звезд и π-теорема. Пока у нас задачи решались легко, поскольку $N - K = 1$. А что делать, если $N - K > 1$? В теории размерности и подобия есть π-теорема, впервые сформулированная и доказанная, по-видимому Бэкингемом. Ее можно изложить следующим образом.

Пусть существует физическая закономерность $a = f(a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n)$, выраженная в виде зависимости некоторой, вообще говоря, размерной величины от размерных же определяющих ее параметров.

Эта зависимость может быть представлена в виде $\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{n-k})$ некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями (параметров, принятых за основные). Рассмотрим пример использования теоремы в астрофизике.

Для классификации звезд используют интенсивность их блеска. В 1784 году Джон Гудрайтис установил, что звезда в созвездии Цефея, которой в астрономических каталогах присвоена буква δ (δ-Цефея), периодически изменяет блеск с периодом 5.366341 суток (порядка 130 часов). Ее диаметр изменяется в пределах от 40 до 45 диаметров Солнца. δ-Цефея дала имя целому классу звезд – цефеид. Цефеиды – переменные звезды-сверхгиганты, периодически изменяющие свою светимость и яркость. Причиной переменности служат колебания радиуса и температуры фотосферы (пульсации), возникающие из-за нарушения баланса между силами гравитации, стремящимися сжать звезду, и силами горячего газа и излучения, стремящимися звезду расширить. Существование связи между периодом и средней светимостью звезды установила в 1908 году Генриетта Суон Левит. В 1925–1926 годах, применив полученные Левит результаты к цефеидам, обнаруженным в туманности Андромеды, Эдвин Пауэлл Хаббл смог определить расстояние до нее и установить, что она расположена далеко за границами Млечного пути и является самостоятельной галактикой.

Как сформулировать задачу о пульсациях и какие величины выбрать в качестве определяющих?

Предположим, что пульсации звезд – их сжатия и разрежения – имеют строго выраженный радиальный характер. Амплитуду пульсаций будем считать малой. В качестве определяющих величин, следуя книге Э.А. Дибая и С.А. Каплана «Размерности и подобие астрофизических величин»[7], выберем массу звезды $\mathcal{M}$, светимость $\mathcal{L}$ и радиус $\mathcal{R}$. Светимость – одна из важнейших единиц астрофизики. Под светимостью понимают количество энергии, излучаемой небесным телом за единицу времени, поэтому в системе LMT $[\mathcal{L}] = L^2MT^{-3}$. Заметим, что $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ имеют независимые размерности, то есть из этих трех величин нельзя составить безразмерный комплекс. Кроме указанных определяющих величин следует добавить гравитационную постоянную $\mathcal{G}$, поскольку сжатие звезды при пульсации вызвано полем тяготения звезды. Наконец, при малых амплитудах пульсации определяются только периодом $\mathcal{P}$. При этом отброшены такие «тонкости», например, как зависимость периода пульсаций от структуры звезды и ее химического состава, роль ионизации в поверхностных слоях, конвекция и т.п. Все эти факторы, конечно, влияют на период пульсаций, но это уже более высокое приближение в решаемой задаче.

Запишем на этот раз искомую физическую зависимость в неявной форме

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{P}) = 0. \tag{8}$$

Число независимых размерностей равно трем. Согласно π-теореме, должны быть два критерия подобия, Π_1 и Π_2, а уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$f_1(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT.

$$\begin{array}{cccccc} & \mathcal{M} & \mathcal{L} & \mathcal{R} & \mathcal{G} & \mathcal{P} \\ L & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ M & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ T & 0 & -3 & 0 & -2 & 1. \end{array}$$

[7]Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. М.: Наука, 1976, 399 с.

Используя матрицу размерности и основную формулу размерности, найдем два безразмерных комплекса, в один из которых входит $\mathcal{P}$, а в другой – $\mathcal{G}$.

$$\frac{[\mathcal{P}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha}[\mathcal{M}]^{\beta}[\mathcal{R}]^{\gamma}} = 1, \qquad \frac{T}{L^{2\alpha+\gamma}M^{\alpha+\beta}T^{-3\alpha}} = 1,$$

$$2\alpha + \gamma = 0,\ \alpha + \beta = 0,\ 1 + 3\alpha = 0, \quad \alpha = -1/3,\ \beta = 1/3,\ \gamma = 2/3.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 = \frac{(\mathcal{L}\mathcal{P})^{1/3}}{(\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2)^{1/3}}. \tag{9}$$

Есть ли какой-либо физический смысл у этого критерия подобия? Оказывается, что удобнее интерпретировать величину Π_1^3, которая есть отношение энергии $\mathcal{L}\mathcal{P}$, излученной звездой за один период колебаний, к величине, характеризующей механическую энергию колебаний звезды $\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2$.

Аналогичным образом будем отыскивать и второй критерий подобия, который обозначим пока $\Pi_2^{'}$. Итак,

$$\frac{[\mathcal{G}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha_1}[\mathcal{M}]^{\beta_1}[\mathcal{R}]^{\gamma_1}} = 1, \qquad \frac{L^3M^{-1}T^{-2}}{L^{2\alpha_1+\gamma_1}M^{\alpha_1+\beta_1}T^{-3\alpha_1}} = 1,$$

$$2\alpha_1 + \gamma_1 = 3, \alpha_1 + \beta_1 = -1, 3\alpha_1 = 2; \quad \alpha_1 = -2/3, \beta_1 = -5/3, \gamma_1 = 5/3$$

и, следовательно,

$$\Pi_2^{'} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{L}^{-2/3}}{\mathcal{M}^{-5/3}\mathcal{R}^{5/3}}.$$

Образуем критерий подобия

$$\Pi_2^2 = \Pi_2^{'}\Pi_1^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{G}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^3}.$$

Тогда

$$\Pi_2 = \mathcal{P}\mathcal{G}^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{R}^{-3/2}. \tag{10}$$

Критерий Π_2 определяет период колебаний звезды, которые являются механическими. Вот почему мы используем вместо $\Pi_2^{'}$ критерий Π_2, который не содержит светимость звезды. Для средней плотности звезды можно написать соотношение $\bar{\rho} = \mathcal{M}/((4/3)\pi\mathcal{R}^3)$. С учетом этого выражения из формулы (10) получим

$$\mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \frac{\Pi_2}{\sqrt{(4/3)\pi\mathcal{G}}}. \tag{11}$$

Если считать правую часть формулы (11) постоянной, то (11) выражает хорошо известное в астрофизике соотношение «период–плотность» для пульсирующих звезд. А в чем физический смысл безразмерного комплекса Π_2?

Вспомним формулу Гюйгенса для периода колебаний математического маятника (формула (4) при $\Pi = 2\pi$) и применим ее к пульсациям звезд, считая, что «длина» маятника l равна радиусу звезды $\mathcal{R}$. Кроме того, положим ускорение силы тяжести равным его значению на поверхности звезды, а именно $g = \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-2}$. Тогда

$$\mathcal{P} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{\mathcal{M}\mathcal{G}}}$$

или с учетом выражения для $\bar{\rho}$

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}\bar{\rho}}}, \quad \mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}}}. \tag{12}$$

Легко видеть, что соотношения (12) и (11) совпадают, если $\Pi_2 = 2\pi$. Откуда такая близость численных значений критериев подобия и их приближенное постоянство для объектов столь разных масштабов – маятника и звезды? Все дело в физической общности явлений, приводящих к малым пульсациям звезд и малым колебаниям маятника. И в том и в другом случае сущность одна и та же – механическое движение в поле тяжести, соответствующее небольшим отклонениям от положения равновесия.

Конечно, во многом сравниваемые явления различны. Они подобны только по одному критерию подобия (такое подобие явлений называется ограниченным). Более того, критерий подобия Π_1 не может считаться постоянным, он разный для разных звезд и всегда много меньше единицы.

Повторю еще раз, что численные значения критериев подобия из анализа размерности нельзя найти. Но очень часто они не отличаются от единицы. Почему? Одно из объяснений состоит в следующем: если анализируемая система находится в равновесном состоянии, то это значит, что два противоположно действующих эффекта (существенных для данной задачи) примерно компенсируют друг друга.

Дополнение Хантли

У формул размерности есть некоторые неудовлетворительные особенности. Например, угловая скорость и частота имеют одинаковую размерность. Формула размерности скорости изменения момента количества движения в системе LMT имеет вид L^2MT^{-2}, что совпадает с формулой размерности для энергии. Подобные примеры можно найти в книге Г. Хантли «Анализ размерностей»[8].

Уже из двух приведенных примеров следует определенная двусмысленность системы единиц LMT. Таким образом, если каждой физической величине можно приписать лишь одну вполне определенную формулу размерности, то обратное утверждение не верно: существуют некоторые формулы размерности, справедливые для более чем одной физической величины. Последнее приводит к неполному решению задачи, когда число независимых физических величин превышает число основных величин на два и более, поскольку в этом случае число неизвестных показателей степени превышает число уравнений, связывающих их друг с другом. В этом случае приходится выражать некоторые показатели через другие. Следовательно, было бы разумно увеличить число основных размерностей.

Рассмотрим следующую простую задачу. *Пуля выпущена с начальной скоростью v_0 в горизонтальном направлении на высоте h от земной поверхности. Определить дальность R горизонтального полета пули.* Очевидно, что $R = f(v_0, h, g)$.

[8] Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970, 175 с.

Тогда $R = \Pi v_0^{\alpha} h^{\beta} g^{\gamma}$; в системе LMT имеем $L = (LT^{-1})^{\alpha} L^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma}$ и $1 = \alpha + \beta + \gamma$; $0 = -\alpha - 2\gamma$. Из двух последних уравнений $\gamma = -\alpha/2$, $\beta = 1 - \alpha/2$ и, следовательно,

$$R = \Pi h \left(\frac{v_0}{\sqrt{gh}}\right)^{\alpha}, \tag{13}$$

то есть решение неполное.

Дополнение Хантли состоит во введении векторных единиц длины с различающимися индексами, соответствующими декартовой системе координат, то есть L_x, L_y, L_z. Этим способом система LMT превратилась в систему $L_x L_y L_z$MT, в которой пять основных единиц вместо трех. В нашей задаче пуля обладает равномерной горизонтальной скоростью $L_x T^{-1}$ и равномерным вертикальным ускорением $L_z T^{-2}$. Используемый прием не только увеличивает число независимых основных размерностей, что дает возможность найти неизвестные показатели степени (в нашем случае α), но и устраняет путаницу в формулах размерности, когда одна и та же формула справедлива для двух и более физических величин.

Очевидно, что формулы площади $L_x L_y$, $L_x L_z$, $L_y L_z$ лучше, чем L^2.

Формулу, например, для давления $L^{-1} M T^{-2}$ лучше преобразовать, вспомнив, что давление равно силе, действующей на единицу площади, то есть $(M L_z T^{-2})/(L_x L_y)$. Примеры можно продолжить.

Решим задачу о пуле заново, используя дополнение Хантли и считая, что $[R] = L_x$, $[v_0] = L_x T^{-1}$, $[g] = L_z T^{-2}$, $[h] = L_z$. Тогда $R = \Pi \cdot v_0^{\alpha} h^{\beta} g^{\gamma}$ и $L_x = (L_x T^{-1})^{\alpha} L_z^{\beta} (L_z T^{-2})^{\gamma}$, что дает $1 = \alpha$, $0 = -\alpha - 2\gamma$, $0 = \beta + \gamma$ и, следовательно, $\gamma = -1/2$, $\beta = 1/2$. Таким образом,

$$R = \Pi v_0 \sqrt{\frac{h}{g}}. \tag{14}$$

Подставляя $\alpha = 1$ в (13), также получим формулу (14).

С введением векторной величины длины все разумно и понятно, а можно ли разделить понятие массы? Ведь мы ранее, восхищаясь Галилеем, провозгласили принцип эквивалентности – масса одна. Но я обещал вернуться к этому вопросу. Следуя Хантли, решим такую задачу.

Определить массовый расход вязкой жидкости, протекающей через трубу круглого поперечного сечения радиусом r и длиной l. Массовый расход m – это масса жидкости, протекающей в единицу времени, то есть $[m] = MT^{-1}$. Так как течение жидкости поддерживается за счет разности давлений на концах трубы $P_1 - P_2$, то изменение давления на единицу длины (градиент давления) $\mathcal{P} = (P_1 - P_2)/l$ и $[\mathcal{P}] = MT^{-2}/L^2$. Вязкость жидкости η (динамическую) применительно к потоку, параллельному неподвижной поверхности, определяют как силу, действующую на единицу площади (которая перпендикулярна поверхности потока), и деленную на градиент скорости, который имеет место в направлении, перпендикулярном поверхности. Таким образом, в системе LMT $[\eta] = L^{-1} M T^{-1}$. Тогда уравнение задачи имеет вид: $m = f(\mathcal{P}, \rho, \eta, r)$, где ρ – плотность жидкости, и, следовательно, в системе LMT определяющих величин пять при трех основных.

Хантли предлагает вопреки общей теории относительности различать массу как количество вещества M_μ и как меру инерции M_i, то есть считать, что $[m] = M_\mu T^{-1}$, $[\mathcal{P}] = L^{-2}M_iT^{-2}$, $[\rho] = M_\mu L^{-3}$, $[\eta] = [L^{-1}M_iT^{-1}]$, $[r] = L$. Используя эти соотношения и формулу $m = \Pi\mathcal{P}^\alpha\rho^\beta\eta^\gamma r^\delta$, получим

$$L^0M_\mu T^{-1}M_i^0 = (L^{-2}M_iT^{-2})^\alpha(L^{-3}M_\mu)^\beta(L^{-1}M_iT^{-1})^\gamma L^\delta$$

и $0 = -2\alpha - 3\beta - \gamma + \delta$, $\beta = 1$, $-1 = -2\alpha - \gamma$, $0 = \alpha + \gamma$. Откуда $\alpha = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 4$, и окончательно приходим к закону Пуазейля

$$m = \Pi\frac{\mathcal{P}\rho r^4}{\eta}. \qquad (15)$$

Задачу можно однозначно решить и в системе LMT, если вместо m ввести объемный расход жидкости V. Получится

$$V = \Pi\frac{\mathcal{P}r^4}{\eta}. \qquad (16)$$

Если умножить (16) на ρ, то получится формула (15).

Задача Рэлея. Почему небо голубое? Тиндаль первым наблюдал, что белый свет при рассеянии становится синеватым и высказал мысль, что голубой цвет неба связан с рассеянием солнечного света на частичках пыли, которые всегда есть в достаточном количестве в атмосфере Земли. Не будь рассеяния света, небо было бы совершенно черным, и на нем ярко выделялись бы звезды и другие светила даже днем. Таким и видят небо космонавты в своих полетах. Но небо голубое... Вслед за Тиндалем Рэлей считал, что рассеяние света атмосферой объясняется наличием в ней взвешенных капелек жидкости, мелких пылинок и твердых частичек, размеры которых малы по сравнению с длиной световой волны. Он показал, что количественный результат можно получить, основываясь на анализе размерностей в сочетании с известными законами оптики. Решение Рэлея весьма поучительно и с точки зрения использования анализа размерностей. Приведем его. Рэлей формулирует задачу следующим образом.

Пусть частица с линейным размером l рассеивает солнечный свет с длиной волны λ и амплитудой A. Амплитуда рассеянной волны уменьшается с увеличением расстояния от частицы. Пусть она равна S на расстоянии r от частицы. Требуется определить зависимость S от остальных переменных величин. Вся информация о сформулированной задаче собрана в таблице (используется система единиц LMT).

Таблица

Физические величины и их размерности (к задаче Рэлея)

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности
Амплитуда волны рассеянного света	S	L
Амплитуда падающей волны	A	L
Линейный размер частицы	l	L
Расстояние от частицы	r	L
Длина волны света	λ	L

По правилам теории размерностей выразим S как произведение остальных переменных, возведенных в ту или иную степень. Тогда получим, что

$$S = \Pi A^{\alpha} l^{\beta} r^{\gamma} \lambda^{\delta}. \tag{17}$$

Из формулы (17) получается весьма необычное уравнение для размерностей

$$[L] = [L]^{\alpha}[L]^{\beta}[L]^{\gamma}[L]^{\delta},$$

из которого следует, что

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1. \tag{18}$$

Если теперь не дополнить анализ размерностей физическими представлениями, то задачу не решить. Вспомним, что амплитуда волны рассеянного света пропорциональна амплитуде падающего света, поэтому $\alpha = 1$; амплитуда волны рассеянного света обратно пропорциональна расстоянию от частицы, то есть $\gamma = -1$.

Следовательно, возвращаясь к соотношениям (17) и (18), находим

$$\delta = 1 - \beta, \quad S = \Pi \frac{A}{r} l^{\beta} \lambda^{1-\beta}$$

или

$$S = \Pi \frac{A\lambda}{r} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^{\beta}. \tag{19}$$

Далее Рэлей отмечает: «Судя по динамике явления, N (отношение амплитуд волн падающего и рассеянного света) изменяется пропорционально V (объем рассеивающей частицы)». Таким образом, следует считать, что $N = S/A \sim l^{\beta} \sim V \sim l^3$ и $\beta = 3$. Окончательно из формулы (19) имеем

$$S = \frac{\Pi A l^3}{r\lambda^2}.$$

По определению, интенсивность I рассеянного света пропорциональна квадрату его амплитуды S, поэтому

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4} \sim \omega^4, \tag{20}$$

где ω – круговая частота световой волны.

Если принять, что $\lambda_{\text{красная}} \approx 1.5\lambda_{\text{синяя}}$, то $I_{\text{синяя}} \approx 5I_{\text{красная}}$, то есть синий цвет рассеивается намного сильнее, чем красный.

Хантли заключает изложение решения Рэлея следующими словами: «Читатель может заметить, что в этом примере в большей мере использованы физическая интуиция и знание законов физики, чем анализ размерностей. С этим приходится согласиться, но верно также и то, что использование обоих источников привело простым и изящным образом к интересному результату, который невозможно получить методами элементарного анализа».

Результат Рэлея легко объясняет голубой цвет неба. Действительно, из-за присутствия атмосферы значительная часть солнечного света рассеивается в стороны. Причем, согласно формуле (20), рассеянная часть излучения тем больше, чем короче длина волны. Это значит, что рассеянный свет богат короткими волнами. Отсюда и голубой цвет неба, поскольку максимум интенсивности в рассеянном свете попадает в голубую область спектра.

Все было бы хорошо в этих объяснениях, если бы они были еще и правильными. Ошибка в исходном допущении о загрязнении атмосферы. Ведь по мере поднятия над Землей в воздухе уменьшается содержание посторонних частиц и пыли: воздух чище над океанами, чем в больших городах, он чище в Антарктиде, чем в Москве. Но тогда насыщенность рассеянного света в этих местах должна была бы уменьшаться. Однако научные наблюдения, например, в высокогорных обсерваториях показали, что все обстоит как раз наоборот: чем чище воздух, чем меньше в нем посторонних частиц, тем ярче небесная лазурь, тем богаче излучение неба синими лучами. При этом формула (20) остается справедливой и в этих случаях (закон был количественно подтвержден измерениями интенсивности рассеянного света).

Исходя из подобных фактов, Рэлей позднее понял, что рассеяние вызывается не посторонними частицами, а самими молекулами воздуха. Такое рассеяние света стали называть рэлеевским или молекулярным рассеянием.

Правда, на этом история ответа на вопрос «Почему небо голубое?» не заканчивается, хотя формула (20) сохраняется. Но это – другая история[9].

На этом я заканчиваю лекции, и в заключение приведу цитату из книги Р.А. Мюллера: «Для понимания физики современной жизни важно изменить те свои представления, которые не соответствуют истине. Часто цитируют высказывание, приписываемое Марку Твену: “Неведение не приносит большинству людей никаких неудобств. Проблема в их обширных знаниях, которые таковыми не являются”».

Думаю, что эти лекции пополнили ваши знания.

Тем, кого заинтересовала теория размерности и подобия, могу порекомендовать уже упомянутую мою книгу «Введение в синергетику» (естественно, что в лекцию вошло многое из нее), книгу Хантли, книгу Дибая и Каплана, а также следующие издания:

1. Брук Ю.М., Стасенко А.Л. Как физики делают оценки – метод размерности и порядки физических величин // О современной физике – учителю. М.: Знание, 1975. С. 54–131.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
3. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 148 с.
4. Журнал «Квант» за разные годы.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 24.12.2011

[9]См., например: Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Изд. 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012, глава 5.

TWO LECTURES. DIMENSIONAL ANALYSIS OR PARADISE IN PHYSICS

D.I. Trubetskov

In the two lectures read at school for senior pupils «Nonlinear days in Saratov for youth» the basic definitions of the theory of dimension and similarity are stated, and also some special ways for concrete problems decision, in particular, use Pi-theorem and additions of Huntley are presented. The solutions of problems from different areas of physics are shown.

Keywords: Dimension, similarity, models.

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: TrubetskovDI@nonlin.sgu.ru