



## ВЗАИМОСВЯЗЬ ОБОБЩЕННОЙ И ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*А.С. Павлов*

Исследовано расположение границы обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов в зависимости от величины расстройки параметров между взаимодействующими системами. Обнаружены особенности поведения границы в области относительно больших значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем. С помощью анализа трансформации спектрального состава сигнала с ведомой системы объяснен характер расположения границы и физические механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации.

*Ключевые слова:* Хаотические осцилляторы, обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация, фазовая когерентность, фурье-спектры.

Синхронизация хаотических колебаний – одно из важнейших нелинейных явлений, привлекающих к себе широкое внимание исследователей [1], имеющих как теоретическое, так и практическое значение (например, в биологических и физиологических задачах, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов, при управлении системами сверхвысокочастотной электроники и т.п.) [2–4]. В настоящее время выявлено несколько типов хаотической синхронизации, среди которых наибольший интерес представляет режим обобщенной синхронизации [5], а также его взаимосвязь с фазовой синхронизацией [6]. Режим обобщенной синхронизации означает, что между состояниями взаимодействующих однонаправленно связанных ведущего  $x_d(t)$  и ведомого  $x_r(t)$  хаотических осцилляторов, существует такая функциональная зависимость  $F[\cdot]$ , что после завершения переходного процесса устанавливается функциональное соотношение  $x_r(t) = F[x_d(t)]$ . Известно несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами – метод ближайших соседей [5,7], метод расчета условных ляпуновских экспонент [8] и метод вспомогательной системы [9]. Фазовая же синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими [6].

В работе [10] было показано, что в связанных хаотических системах Ресслера в зависимости от величины расстройки управляющих параметров эти режимы ведут себя по-разному. Если параметры взаимодействующих систем расстроены относительно слабо, режим обобщенной синхронизации оказывается сильнее фазовой, в то время как при достаточно больших значениях расстройки параметров взаимодействующих систем пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению фазовой синхронизации, существенно превосходит значение, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации. В этом случае пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению обобщенной синхронизации, практически не зависит от величины расстройки между системами [11,12], а возникновение/разрушение фазовой синхронизации сопровождается появлением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора одной из взаимодействующих систем [13,14].

Позднее, в работах [15,16] были объяснены причины такого поведения границ возникновения синхронных режимов и выявлены физические механизмы, приводящие к их установлению. В частности, определено, что в области относительно слабых значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем Ресслера обобщенная синхронизация возникает за счет синхронизации основной спектральной компоненты и ее субгармоник (фазовая синхронизация в данном случае возникает по сценарию захвата собственных частот взаимодействующих систем), в то время как в области относительно больших значений частотной расстройки установление обобщенной синхронизации сопровождается синхронизацией двух спектральных компонент, соответствующих собственной частоте ведущей системы и основной частоте ведомой системы.

В настоящей работе проводится исследование характера расположения границ обобщенной и фазовой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде [13], а также производится аналогичное исследование для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера при изменении параметра, отвечающего за когерентность хаотического аттрактора [14].

Начнем рассмотрение с системы двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде. Данная модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= \omega_d^2 (hx_d + y_d - z_d), \\
 \dot{y}_d &= -x_d, \\
 \dot{z}_d &= (x_d - f(z_d))/\mu, \\
 \dot{x}_r &= \omega_r^2 (h(x_r - \varepsilon(y_d - y_r)) + y_r - z_r), \\
 \dot{y}_r &= -x_r + \varepsilon(y_d - y_r), \\
 \dot{z}_r &= (x_r - f(z_r))/\mu,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где в качестве безразмерной характеристики нелинейного элемента  $f(\xi)$  использовалась зависимость  $f(\xi) = -\xi + 0.002 \operatorname{sh}(5\xi - 7.5) + 2.9$ ;  $h = 0.2$ ,  $\mu = 0.1$  – управляющие параметры;  $\varepsilon$  – параметр связи. Управляющий параметр ведомой системы  $\omega_r = 1.02$ , характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован,

а аналогичный параметр ведущей системы  $\omega_d$  варьировался в диапазоне от 0.85 до 1.12 для того, чтобы задать расстройку взаимодействующих осцилляторов. При указанных значениях управляющих параметров  $h, \mu, \omega_r$  во всем диапазоне значений параметра  $\omega_d$  хаотические аттракторы обеих систем в отсутствие связи являются фазово-когерентными [13].

На рис. 1 показано расположение границы возникновения режима обобщенной синхронизации (GS), фазовой синхронизации (PS) и граница фазовой когерентности (CM) системы двух связанных хаотических осцилляторов (1) на плоскости управляющих параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$ . Линия 1 соответствует границе установления режима фазовой синхронизации, линия 2 – границе установления режима обобщенной синхронизации, а линия 3 – границе возникновения/потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. Порог возникновения обобщенной синхронизации определялся с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент для системы (1) и уточнялся методом вспомогательной системы. Для определения момента потери/возникновения фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы была вычислена мера когерентности [14] при изменении параметра связи. Наличие фазовой синхронизации определялось выполнением условия захвата фаз. Мгновенная фаза хаотического сигнала вводилась традиционным способом как угол поворота на плоскости  $(x, y)$ .

Из рис. 1 видно, что границы возникновения синхронных режимов являются принципиально асимметричными относительно линии  $\omega_d = \omega_r$ , что обусловлено сильным влиянием диссипации в ведомой системе при увеличении параметра связи. В то же самое время, порог возникновения режима обобщенной синхронизации при малых расстройках взаимодействующих систем оказывается существенно выше, чем при больших. Однако такая особенность наблюдается только для значений  $\omega_d > \omega_r$ , в то время как в области  $\omega_d < \omega_r$  имеет место слабая зависимость порогового значения установления синхронного режима от параметра ведущей системы. В области относительно больших значений расстройки собственных частот (и слева, и справа от  $\omega_d = \omega_r$ ) разрушение фазовой синхронизации происходит через потерю фазовой когерентности хаотического аттрактора (см. рис. 1, линия 3). Однако пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению фазовой синхронизации в области относительно больших значений расстройки собственных частот при  $\omega_d < \omega_r$ , оказывается существенно ниже, чем для той же величины расстройки справа от  $\omega_d = \omega_r$ . Оно соответствует тем значениям параметра связи, при которых режим фазовой синхронизации реализуется в области относительно слабых значений частотной расстройки в случае, если  $\omega_d > \omega_r$ .

Объяснить причины такого поведения границ обобщенной и фазовой синхронизации на плоскости параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$  возможно следующим образом. Понятно, что в области относительно слабых значений расстройки собственных частот

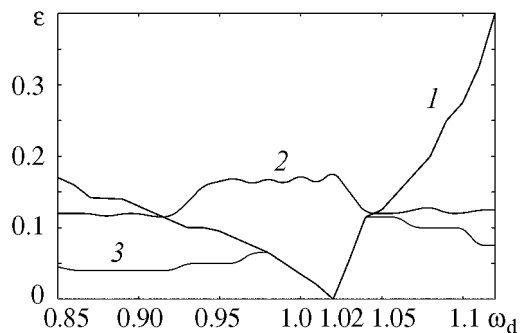


Рис. 1. Границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности для двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) на плоскости управляющих параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$

( $\omega_d \in [0.98, 1.04]$ ), где разрушение фазовой синхронизации происходит без потери фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы фазовая синхронизация возникает за счет захвата основных частотных компонент ведущей и ведомой систем, в то время как режим обобщенной синхронизации обусловлен синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник [15,16]. В области  $\omega_d > 1.04$  в случае относительно больших значений расстройки собственных частот ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы (1) становится фазово-некогерентным, что и приводит к разрушению режима фазовой синхронизации. Кроме того, как нетрудно видеть из рис. 1, граница обобщенной синхронизации в области относительно больших значений расстройки частот и линии возникновения/потери фазовой когерентности хаотического аттрактора оказываются близки друг к другу.

Зафиксируем параметр ведущей системы  $\omega_d = 1.1$ . При выбранных значениях управляющих параметров в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) при увеличении параметра связи происходит следующее: при  $\varepsilon = \varepsilon_{CM} = 0.1$  аттрактор ведомой системы теряет фазовую когерентность, при  $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 0.12$  реализуется режим обобщенной синхронизации, при  $\varepsilon = \varepsilon_{PS} = 0.27$  возникает режим фазовой синхронизации.

На рис. 2 приведены фурье-спектры сигнала с ведомой системы при различных значениях параметра связи. Видно, что интенсивность спектральной компоненты на частоте ведущей системы растёт при увеличении параметра связи  $\varepsilon$ , а амплитуда спектральной компоненты на частоте ведомой системы уменьшается. В фурье-спектре при  $\varepsilon = 0.3$  полностью пропадает спектральная компонента на частоте ведомой системы, остаётся лишь одна четко выраженная спектральная компонента на частоте ведущей системы. В данном случае обобщенная синхронизация возникает за счет синхронизации двух четко выраженных спектральных компонент (на частотах ведущей и ведомой систем), интенсивности которых вблизи порога обобщенной синхронизации примерно совпадают.

Значительно интереснее обстоит дело с областью больших расстроек, где  $\omega_d < 0.98$ . Возникновение/разрушение режима фазовой синхронизации в этом случае по-прежнему связано с появлением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы, в то время как соотношение режимов обобщенной

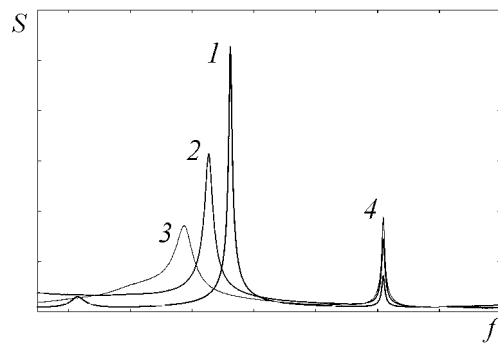


Рис. 2. Фурье-спектры ведомой системы (1) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$ : 0.05 (1); 0.1 (2); 0.12 (3); 0.3 (4). Значение параметра ведущей системы  $\omega_d = 1.1$

и фазовой синхронизации является таким же, как в случае относительно слабых значений расстройки собственных частот. Более того, пороговое значение параметра связи, соответствующее границе обобщенной синхронизации в этом случае примерно в два раза превосходит пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации при  $\omega_d > 1.04$  и практически не зависит от значения  $\omega_d < 0.98$ . Понятно, что механизм возникновения обобщенной синхронизации в данном случае должен быть иным.

Исследуем взаимосвязь между режимами обобщенной и фазовой синхронизации, а также возникновением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора в этой области более детально. Зафиксируем параметр ведущей системы  $\omega_d = 0.96$ . При выбранных значениях управляющих параметров в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) при увеличении параметра связи происходит следующее: при  $\varepsilon = \varepsilon_{CM} = 0.048$  аттрактор ведомой системы теряет фазовую когерентность, при  $\varepsilon = \varepsilon_{PS} = 0.075$  возникает режим фазовой синхронизации, при  $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 0.175$  реализуется режим обобщенной синхронизации.

На рис. 3 приведены фурье-спектры сигнала с ведомой системы при различных значениях параметра связи. Видно, что при увеличении параметра связи интенсивность спектральной компоненты на частоте ведомой системы уменьшается, а на частоте ведущей системы – увеличивается. При этом происходит сдвиг основной частоты колебаний ведомой системы в сторону меньших значений параметра связи, а так как  $\omega_d < \omega_r$ , при некотором значении параметра связи (когда интенсивность спектральной компоненты на частоте ведущей системы в спектре ведомой системы станет значительной) произойдет захват основных частот взаимодействующих систем, а следовательно – установление фазовой синхронизации. Ниже порога возникновения фазовой синхронизации из-за наличия двух спектральных компонент в спектре ведомой системы ее аттрактор будет фазово-некогерентным. Однако возникновение фазовой синхронизации будет реализовано по сценарию, характерному для случая относительно слабых значений расстройки собственных частот. Действительно, уже при  $\varepsilon = 0.1$  в фурье-спектре ведомой системы присутствует одна четко выраженная спектральная компонента на частоте ведущей системы. Понятно, что режим обобщенной синхронизации в данном случае будет возникать также по сценарию, характерному для относительно малых значений расстройки собственных частот: возникновение этого режима обусловлено синхронизацией основной спектральной компоненты ведущей системы и ее субгармоник.

Перейдем к рассмотрению системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера при изменении параметра когерентности [14]. Данная модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\
 \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\
 \dot{z}_d &= 0.1 + z_d (x_d - 8.5), \\
 \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r, \\
 \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r + d (y_d - y_r), \\
 \dot{z}_r &= 0.1 + z_r (x_r - 8.5),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

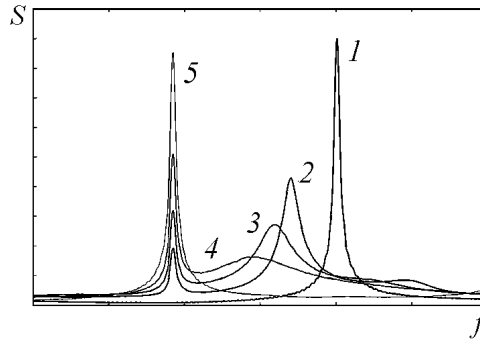


Рис. 3. Фурье-спектры ведомой системы (1) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$ : 0 (1); 0.04 (2); 0.05 (3); 0.06 (4); 0.1 (5). Значение параметра ведущей системы  $\omega_d = 0.96$

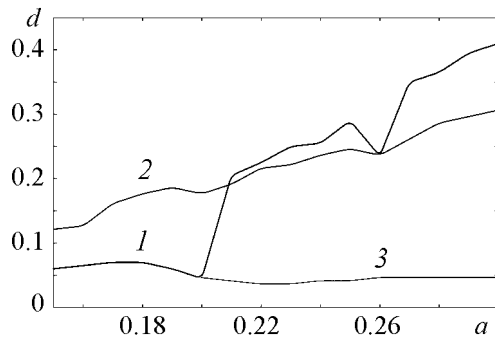


Рис. 4. Границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности для двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (2) при изменении параметра, отвечающего за фазовую когерентность

ми были определены границы исследуемых режимов. На рис. 4 показано расположение границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (2) при изменении параметра когерентности на плоскости управляющих параметров  $(a, d)$ . Линия 1 соответствует границе установления режима фазовой синхронизации, линия 2 – границе установления режима обобщенной синхронизации, а линия 3 – границе возникновения/потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. Из рисунка видно, что при  $a < 0.2$  разрушение фазовой синхронизации происходит без потери фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы. Можно ожидать, что фазовая синхронизация возникает в данном случае за счет захвата основных частотных компонент ведущей и ведомой систем, в то время как режим обобщенной синхронизации обусловлен синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник [15,16]. При  $a > 0.2$  наблюдается поведение, аналогичное случаю однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде при относительно больших значениях расстройки собственных частот: ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы становится фазово-некогерентным, что и приводит к разрушению режима фазовой синхронизации.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен вопрос о возникновении обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов в зависимости от величины расстройки параметров между взаимодействующими системами. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации в случае относительно сильно расстроенных параметров возможно по сценарию, характерному для относительно слабых значений расстройки собственных частот. При помощи анализа трансформации спектрального состава сигнала ведомой системы объяснен характер расположения границы установления синхронного режима в исследуемой системе, а также его взаимосвязь с режимом фазовой синхронизации. Также было установлено, что не только расстройка собственных частот взаимодействующих систем влияет на сценарий возникновения исследуемых типов

где  $d$  – параметр связи. Управляющий параметр ведомой системы  $\omega_r = 1.02$ , характеризующий основную частоту колебаний, и аналогичный параметр ведущей системы  $\omega_d = 0.98$  были фиксированы, параметр  $a$ , показывающий степень когерентности, варьировался в диапазоне от 0.15 до 0.3. При указанных значениях управляющих параметров  $\omega_r$  и  $\omega_d$  во всем диапазоне значений параметра  $a$  хаотические аттракторы обеих систем в отсутствие связи являются фазово-когерентными [14].

Как и в случае двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде, аналогичными метода-

синхронизации и наличие фазовой некогерентности аттрактора, но и изменение параметра, отвечающего за фазовую когерентность хаотического аттрактора в системе, приводит к изменению характера возникновения этих режимов.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».*

### **Библиографический список**

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*. 2002. Vol. 366. P. 1.
2. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *УФН*. 2009. Т. 179, № 12, С. 1281.
3. *Glass L.* Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature*. 2001. Vol. 410, № 6825. P. 277.
4. *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация распределенных электронно-волновых автоколебательных систем с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. XLVII. № 5–6 С. 305.
5. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.
6. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
7. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.* Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. Т. 2. P. 2115.
8. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183.
9. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
10. *Zheng Z., Hu G.* Generalized synchronization versus phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 6. С. 7882.
11. *Храмов А.Е., Короновский А.А., Москаленко О.И.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32. № 3. С. 40.
13. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации // *ЖТФ*. 2007. Т. 77, № 1. С. 21.
14. *Храмов А.Е., Короновский А.А., Куровская М.К.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75. 036205.

15. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Граница возникновения режима обобщенной синхронизации хаотических осцилляторов // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 8. С. 949.

16. *Москаленко О.И.* Синхронизация спектральных компонент в системах с однонаправленной связью // ЖТФ. 2010 Т. 80. № 8. С. 1.

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 29.12.2012*

## **RELATIONSHIP OF GENERALIZED AND PHASE SYNCHRONIZATION IN TWO UNIDIRECTIONALLY COUPLED CHAOTIC OSCILLATORS**

*A.S. Pavlov*

The behavior of the boundary of generalized synchronization in two unidirectionally coupled chaotic oscillators depending on the value of the control parameter mismatch between interacting systems has been studied. Peculiarities in its behavior in the field of the relatively large values of the control parameter mistuning have been found. The character of this behavior and physical mechanisms resulting in the generalized synchronization regime onset in such systems have been explained by the analysis of the spectral compound of signal from response system.

*Keywords:* Chaotic oscillators, generalized synchronization, phase coherence, Fourier spectra.



*Павлов Александр Сергеевич* – родился в Саратове (1989), с отличием окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант кафедры физики открытых систем СГУ. Автор нескольких статей в центральных реферируемых журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: [murderer@bk.ru](mailto:murderer@bk.ru)