



## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ РИКЕРА

*К.В. Шлюфман, Б.Е. Фишман, Е.Я. Фрисман*

Проведено исследование аperiodических решений уравнения Рикера. Выявлены два качественно различных вида аperiodических решений уравнения. Дано определение одному из выделенных видов аperiodических решений – интервально-периодическому решению. Для анализа динамики одномерной системы использованы псевдофазовые пространства с большим лагом. Построены карты интервально-периодических решений и обсуждено распределение интервально-периодического решения в параметрическом пространстве уравнения Рикера.

*Ключевые слова:* Рекуррентное уравнение Рикера, интервально-периодическое решение, псевдофазовое пространство, кластерный анализ, спектральный анализ.

### Введение

Несмотря на давность и, казалось бы, достаточную исследованность динамических режимов одномерных рекуррентных систем вида

$$x_{n+1} = F(a, x_n), \quad (1)$$

в представлении об их возможных динамических режимах, на наш взгляд, сохраняются вопросы, слабо рассмотренные в литературе. Известно, что можно выделить области значений параметра  $a$ , при которых это уравнение имеет устойчивые по Ляпунову стационарные и периодические решения [1]. Иные области значений параметра  $a$  характеризуются как области аperiodических или хаотических решений.

В настоящей работе предпринята попытка более детального исследования множества аperiodических решений. Оказалось, что рекуррентные уравнения (1) могут иметь принципиально разные по характеру аperiodические динамические режимы. Различия между этими режимами можно однозначно определить по особенностям таких статистических характеристик, как гистограмма и автокорреляционная функция. Так, было показано существование отдельного класса решений, объединяющих свойства периодических и аperiodических решений. Подобного рода решения ранее обнаруживались эпизодически, фиксировались как «шумящий цикл» [1], а свойства

их как отдельного класса решений систематически не исследовались. Данная работа несколько заполняет этот пробел.

Исследование выполнено на примере широко известного уравнения

$$x_{n+1} = x_n a^* \exp(-bx_n), \quad (2)$$

предложенного У.Е. Рикером для описания динамики численности популяций лососевых видов рыб (см., например, [2]). Переменная  $x_n$  интерпретируется в этом случае как значение численности рассматриваемой популяции в момент времени  $n = 0, 1, \dots$ . Параметр  $a^*$  – репродуктивный потенциал популяции (скорость роста популяции «в пустоту»), определяется биологическими особенностями вида, параметр  $b$  характеризует «емкость» экологической ниши популяции: при  $x_n = 1/b$  пополнение популяции ( $x_{n+1}$ ) максимально. Из биологических соображений ясно, что параметры  $a^*$  и  $b$  положительны. Естественно, что задание начального значения  $x_0$  конкретизирует решение уравнения (2).

Несмотря на свою относительную простоту, уравнение Рикера широко используется (см., например, [1–5]), поскольку в рамках этой модели находят объяснения резкие колебания численности популяции при сравнительно постоянных внешних условиях. На её основе строятся более сложные модели и решаются, в частности, задачи оптимизации рыбного промысла и рыбопроизводства (см., например [2, 5]). Вместе с тем, остается невыясненным вопрос о характере и «внутренней структуре» аperiodических решений уравнения Рикера. Динамические режимы типа «шумящих циклов» могут детерминированно порождаться самим уравнением и в этом случае интерпретироваться как внутренние свойства популяции, а могут быть связаны с «шумящими» внешними воздействиями. Таким образом, вопрос о характере динамических режимов носит принципиальный характер и важен для понимания реальных биологических популяционных процессов. Проведенное исследование – один из шагов в этом направлении.

## 1. Характеристика аperiodических режимов

Переходя к новому масштабу (то есть рассматривая относительные значения численности), выполним простую замену переменной. В результате уравнение Рикера становится однопараметрическим:

$$x_{n+1} = x_n a \exp(-x_n), \quad (3)$$

где  $a = a^*/b$ .

Для исследования устойчивости решения уравнения (3) наиболее часто в качестве индикатора используется показатель Ляпунова  $\lambda$  [1,6]. Значение  $\lambda < 0$  соответствует устойчивому решению, а  $\lambda > 0$  – неустойчивому. Для дальнейшей классификации режимов одномерных уравнений на множестве неустойчивых решений использование только показателя Ляпунова недостаточно.

Вместе с тем, результаты имитационного моделирования указывают на наличие различных по характеру аperiodических решений уравнения (3). В качестве примера рассмотрим решения при двух значениях параметра  $a$ : 15.17 и 17.11. Оба эти решения неустойчивы по Ляпунову, так как характеризуются положительными значениями показателя Ляпунова. При  $a = 15.17$  показатель Ляпунова  $\lambda = 0.14$ , а при  $a = 17.11$  –  $\lambda = 0.34$ .

На рис. 1 представлены последовательности  $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$  значений трех решений уравнения (3) при  $a = 15.17$  с близкими друг другу начальными состояниями:  $x_0^{(1)} = 5.37$ ;  $x_0^{(2)} = 5.39$ ;  $x_0^{(3)} = 5.41$ , где верхний индекс  $i = 1, 2, 3$  в скобках обозначает номер рассматриваемого решения. Из рисунка видно, что решения, начиная с десятого временного момента ( $n = 10$ ), имеют заметно различающиеся значения. При этом с течением времени различия между соответствующими значениями решений ограничены, и для всех трех рассматриваемых последовательностей наблюдается согласованность в тенденциях изменения значений.

На рис. 2 изображены последовательности  $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$  значений трех решений уравнения (3) при  $a = 17.11$  с теми же начальными состояниями:  $x_0^{(1)} = 5.37$ ;  $x_0^{(2)} = 5.39$ ;  $x_0^{(3)} = 5.41$ .

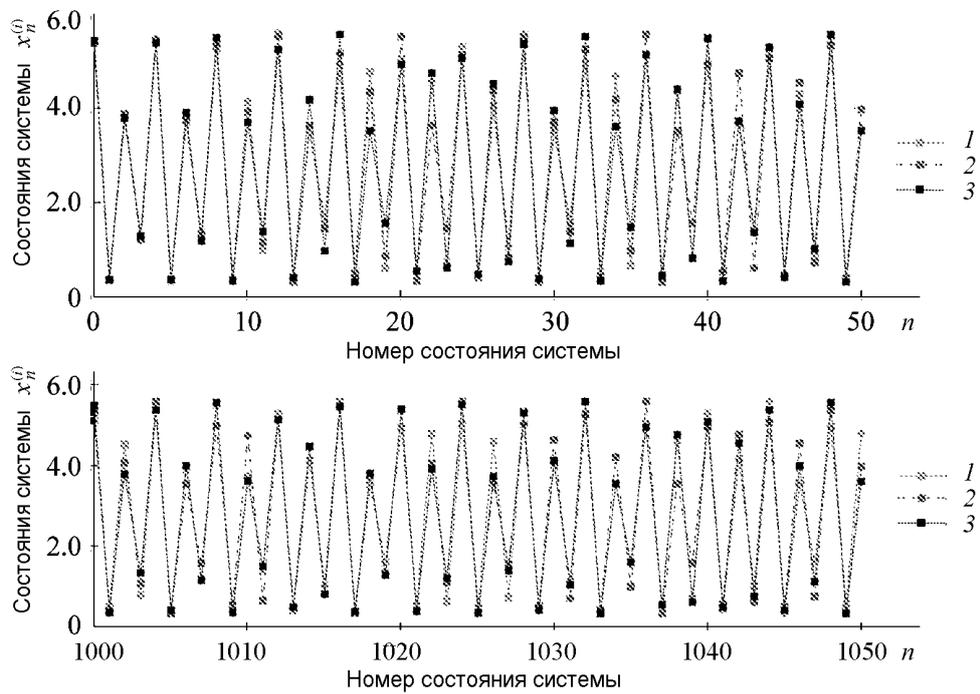


Рис. 1. Последовательности значений трех решений уравнения (3) при  $a = 15.17$  и близких начальных состояниях

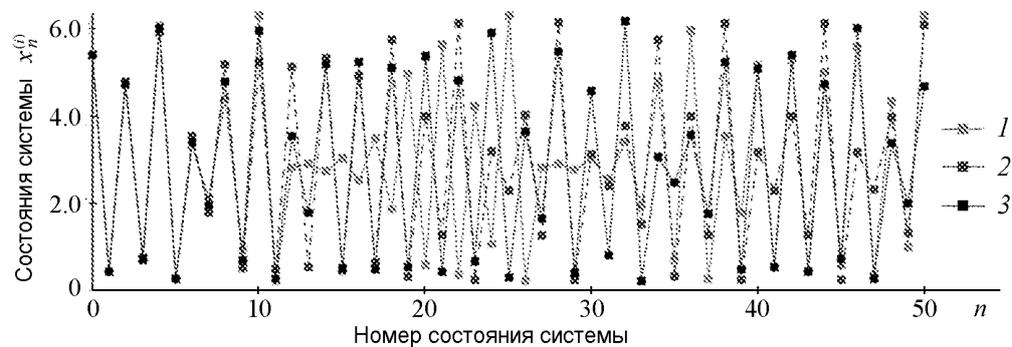


Рис. 2. Последовательности значений трех решений уравнения (3) при  $a = 17.11$  и близких начальных состояниях

Из рис. 1 и рис. 2 видно, что в обоих случаях малые отклонения в начальных условиях, в силу неустойчивости по Ляпунову, со временем вызывают расхождения в последующих принимаемых значениях. Такие решения также называют нерегулярными. Однако в рассматриваемых случаях, на наш взгляд, решения качественно различаются. В первом случае (при  $a = 15.17$ ) уравнение (3) имеет решения  $\{x_n^{(i)}\}_{n=0}^N$  с согласующимися друг с другом (по порядку) последовательностями значений. Можно также полагать, что в любой момент времени  $n$  отклонения соответствующих значений не превышают некоторую «пороговую» величину. Во втором случае (при  $a = 17.11$ ), наоборот, последовательности принимаемых значений плохо согласуются друг с другом (даже по порядку). Могут наблюдаться большие, по сравнению с первым случаем, отклонения между значениями решений. При этом выбор близких начальных условий практически не позволяет согласовать, как в предыдущем случае, последовательности значений.

Отмеченное качественное различие в поведении решений уравнения (3) дало основание предположить, что для классификации аperiodических режимов может быть использовано распределение значений  $x_n$ .

При проверке указанного предположения было выполнено имитационное моделирование, в котором в качестве индикатора различий аperiodических решений уравнения Рикера использовалась гистограмма значений  $x_n$ . Построение гистограммы по последовательности значений решения уравнения выполняется следующим образом. Область  $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$  допустимых значений решений рекуррентного уравнения (3) (известная как диапазон актуальных для рассмотрения значений  $x_n$ , определяющихся как результат преобразования правой части модели Рикера [7]) разбивается на интервалы равной длины  $h$ . Выбор длины  $h$  может быть произволен. При этом для получения статистически обеспеченных оценок распределения количество используемых значений  $x_n$  для построения гистограммы может быть определено формулой Стерджеса [8]  $N = \exp [0.301 (a/(eh) - 1)]$ , где  $a$  – параметр системы (3).

Гистограмма позволяет по значениям  $x_n$  решения рекуррентного уравнения сформировать представление об их распределении и, в частности, выделить диапазоны  $X_k, k = 1, \dots, d$ , возможных значений решений уравнения, а также указать интервалы неprisущих данной системе значений.

Заметим, что в ходе имитационного моделирования построение гистограммы выполнялось по одному конечному фрагменту последовательности значений  $\{x_n\}_{n=1000}^N$  решения уравнения (3). При этом начальное состояние  $x_0$  выбиралось произвольно.

В случаях неположительного значения показателя Ляпунова реализуется достаточно быстрый переходный процесс к стационарному или периодическому режиму. Проведенное сравнение результатов, полученных по решению уравнения (3), с результатами, рассчитанными при отбрасывании  $r$  первых значений данного решения, показало, что уже начиная с  $r = 100$  при любых значениях  $x_0$  переходный процесс не сказывается на статистических характеристиках дальнейшей реализации.

Заметим, что предельные режимы, которые наблюдаются при положительных значениях показателя Ляпунова, вряд ли можно называть стационарными. Вопрос о том, сколько итераций необходимо, чтобы в этих режимах выйти на аттрактор, является предметом отдельного исследования. Вместе с тем, как показали результаты исследований, выполненных в рамках имитационного моделирования, уже после 1000 итераций в прикладных задачах не столь принципиально, исследуются ли свой-

ства аттрактора или свойства заключительной части очень длительного переходного процесса.

Таким образом, отбрасывание из последовательности первой тысячи значений  $x_n$  позволяет исключить влияние выбора  $x_0$  на актуальные характеристики гистограмм.

На рис. 3 представлены гистограммы для аperiодических режимов при четырех значениях параметра  $a$ . Видно, что полученные гистограммы различаются количеством и расположением диапазонов значений  $x_n$ :

а) при  $a = 16.13$  на гистограмме выделились шесть ( $d = 6$ ) отделенных друг от друга диапазонов  $X_k$  значений решения;

б) при  $a = 15.17$  таких диапазонов  $X_k$  четыре (фрагмент данного решения был представлен выше, на рис. 1);

в) при  $a = 15.26$  наблюдаются только два диапазона  $X_k$ ,  $k = 1, 2$ ;

г) при  $a = 17.11$  гистограмма имеет только один диапазон  $X_k$  значений решения уравнения Рикера, причем этот диапазон практически полностью покрывает интервал  $[a^2 \exp(-(1 + a/e)); a/e]$ . Фрагмент решения этого случая представлен выше, на рис. 2.

Отметим, что для построения гистограммы выполняется деление диапазона возможных состояний системы  $[a^2 \exp(-(1 + a/e)); a/e]$  на малые интервалы равной длины  $h$ . Выбор длины таких интервалов для проводимого нами анализа распределения значений решения играет существенную роль. Так, интервал, не имеющий ни одного попадания значения  $x_n$ , может интерпретироваться как интервал, разделяющий два диапазона принимаемых системой состояний. Из этого замечания понятно, что, с одной стороны, выбор статистически необеспеченной длины интервала  $h$  может привести к неверно интерпретируемым результатам, а именно ошибоч-

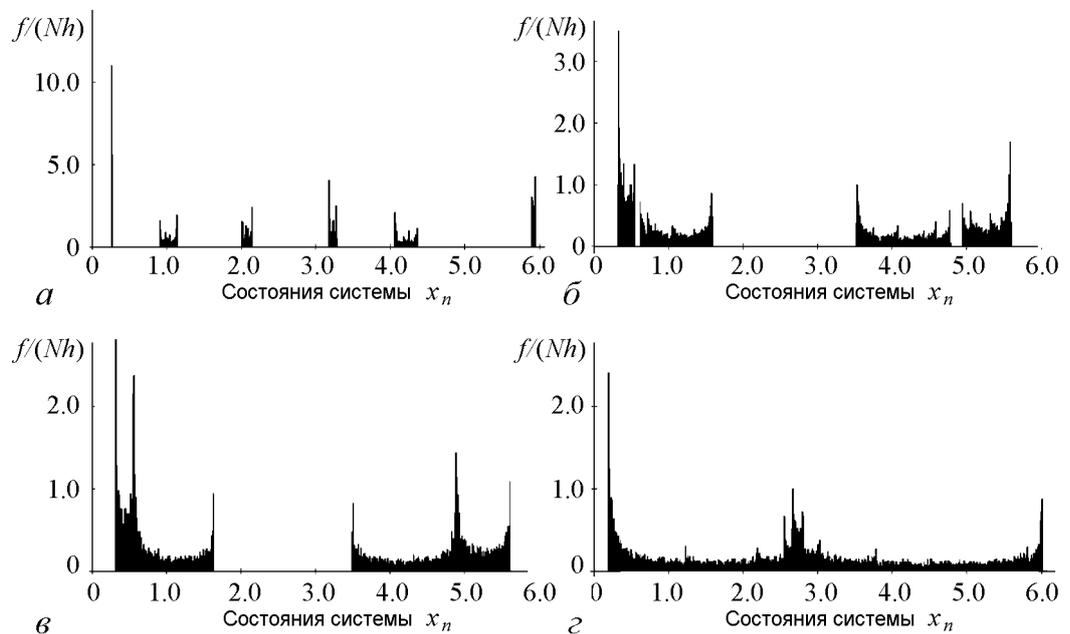


Рис. 3. Гистограмма значений решения уравнения (3) при  $a = 16.13$  (а),  $15.17$  (б),  $15.26$  (в),  $17.11$  (г) (использованы интервалы длиной  $h = 0.01$ ). По оси ординат отложена частота  $f$  появления состояния системы в интервале разбиения, нормированная на произведение общего числа рассмотренных состояний  $N$  и длины интервала  $h$

но увеличить количество диапазонов состояний, принимаемых системой. С другой стороны, использование слишком больших длин интервалов  $h$  может не позволить различить расположенные близко друг к другу диапазоны принимаемых состояний системы.

Заметим, что диапазоны принимаемых состояний  $X_k$  имеют различные диаметры. Под диаметром диапазона понимается наибольшая по модулю разница между значениями  $x_n$ , принадлежащими этому диапазону. Понятие «диаметр диапазона» будет использовано далее.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

- гистограммы позволяют определить интервалы возможных значений  $x_n$  решения уравнения (3);
- распределения значений  $x_n$  при различных значениях параметра  $a$  могут качественно отличаться друг от друга. При одних значениях параметра  $a$  значения  $x_n$  образуют несколько непересекающихся диапазонов  $X_k$ , при других – диапазон значений  $x_n$  один;
- интервалы возможных состояний системы не при всех значениях параметра  $a$  полностью покрывают интервал  $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$ .

Вместе с тем, позволяя выделить диапазоны принимаемых значений  $X_k$ , гистограмма не дает представления о характере реализуемой динамики. Для исследования этого характера было решено использовать выборочную автокорреляционную функцию.

В ходе имитационного моделирования выборочная автокорреляционная функция вычислялась по известной формуле

$$K(m) = \frac{N}{N - m + 1} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{N-m} (x_i - \bar{x}) \cdot (x_{i+m} - \bar{x})}{\sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2},$$

где  $\bar{x} = 1/(N + 1) \cdot \sum_{i=0}^N x_i$ ,  $N + 1$  – длина последовательности значений;  $m$  – лаг автокорреляционной функции.

Оценивание автокорреляционной функции выполнялось по одному конечному фрагменту последовательности значений  $\{x_n\}_{n=1000}^N$  решения уравнения (3). Начальное состояние  $x_0$  выбиралось произвольно.

На рис. 4 представлены автокорреляционные функции решений уравнения (3) при тех же значениях параметра  $a$ , при которых построены гистограммы на рис. 3. Максимальное значение лага  $m$ , представленное на рисунке, равно 50. При больших значениях лага поведение функции не изменялось.

Из рис. 4 видно, что система, состояния которой практически покрывают весь интервал  $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$ , имеет затухающую автокорреляционную функцию (случай  $z$ ). В тех же случаях, когда были выделены несколько различных диапазонов значений  $X_k$ , решение уравнения характеризует незатухающая автокорреляционная функция (случаи  $a-e$ ).

Сопоставляя результаты исследования распределения значений  $x_n$  с помощью гистограммы и временной структуры решения уравнения (3) с помощью автокорреляционной функции, можно сделать следующие выводы:

- при положительном показателе Ляпунова уравнение (3) может иметь два качественно разных динамических режима;

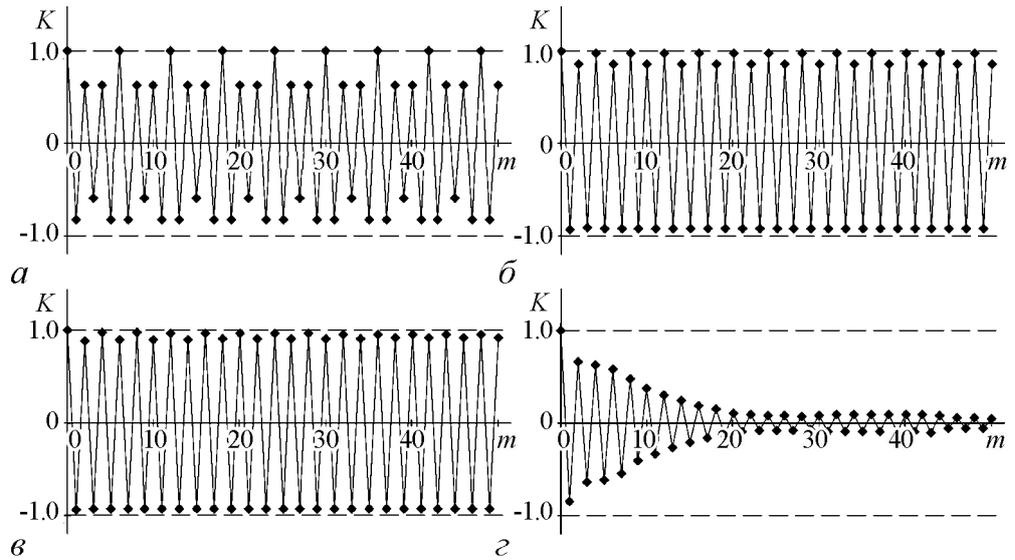


Рис. 4. Автокорреляционная функция решений уравнения (3) при  $a = 16.13$  (а),  $15.17$  (б),  $15.26$  (в),  $17.11$  (г)

- первый вид режима характеризуется единым диапазоном значений  $x_n$ , охватывающим всю доступную область  $[a^2 \exp(- (1 + a/e)); a/e]$ , и затухающей автокорреляционной функцией;
- второй вид режима характеризуется несколькими (более чем одним) взаимно непересекающимися диапазонами значений  $X_k, k = 1, \dots, d, d > 1$ , и незатухающей циклической автокорреляционной функцией.

### Апериодические режимы в псевдофазовом пространстве

Для более детального исследования временной структуры решения уравнения (3) нами были использованы портреты в псевдофазовых пространствах. На рис. 5, а представлен портрет, построенный из пар значений  $(x_n, x_{n+1})$  последовательности решения, отстоящих друг от друга на одну итерацию, или как говорят, с лагом 1. На этом портрете пары значений  $x_n$  обозначили четыре фрагмента графика правой части уравнения Рикера. Увеличение лага усложняет вид выделяемых парами  $(x_n, x_{n+m})$  фрагментов отображения  $\underbrace{F \dots F}_m(x) = F^{(m)}(x)$ , где  $m$  – количество разделяющих итераций (лаг) значения  $x_i$  и  $x_{i+m}$ . Так, на рис. 5, б–е представлены портреты в псевдофазовых пространствах с лагами 3, 7, 11, 19 и 31.

Из рис. 5 понятно, что пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  на портрете, группируясь, образуют количество областей, не зависящее от лага  $m$  псевдофазового пространства. Усложнение формы фрагментов графика  $F^{(m)}(x)$  при увеличении лага  $m$  приводит к заполнению парами  $(x_n, x_{n+m})$  ограниченных областей, напоминающих прямоугольники. Причем вне этих областей портреты не содержат ни одной пары  $(x_n, x_{n+m})$ .

При построении портретов на рис. 5 значения лагов  $m$  подбирались так, чтобы обсуждаемые области находились в одних и тех же положениях. В общем случае, как установлено в ходе имитационного моделирования, расположение имеющихся на портрете областей зависит от их количества  $d$  и от лага  $m$ .

С увеличением лага  $m$  можно наблюдать периодические перемещения областей пар значений  $(x_n, x_{n+m})$  в псевдофазовом пространстве. Причем этот период совпадает с количеством областей  $d$ . В случае  $m = dp + 1$ , где  $p$  любое натуральное число, на портрете области пар  $(x_n, x_{n+m})$  своим расположением обозначают график правой части уравнения (3)  $F(x)$ . На рис. 6, а представлен портрет при  $a = 16.13$ , лаг псевдофазового пространства  $m = 73$ , количество областей  $d = 6$ .

Учитывая, что каждая точка в портрете означает пару  $(x_n, x_{n+m})$ , то есть показывает переход за  $m$  итераций от значения  $x_n$  до значения  $x_{n+m}$ , то по портрету можно определить порядок перехода по интервалам, к которым принадлежат эти значения. Так, на рис. 6, а показан периодический переход по интервалам с периодом  $d = 6$  в следующем порядке:

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow \\
 & \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

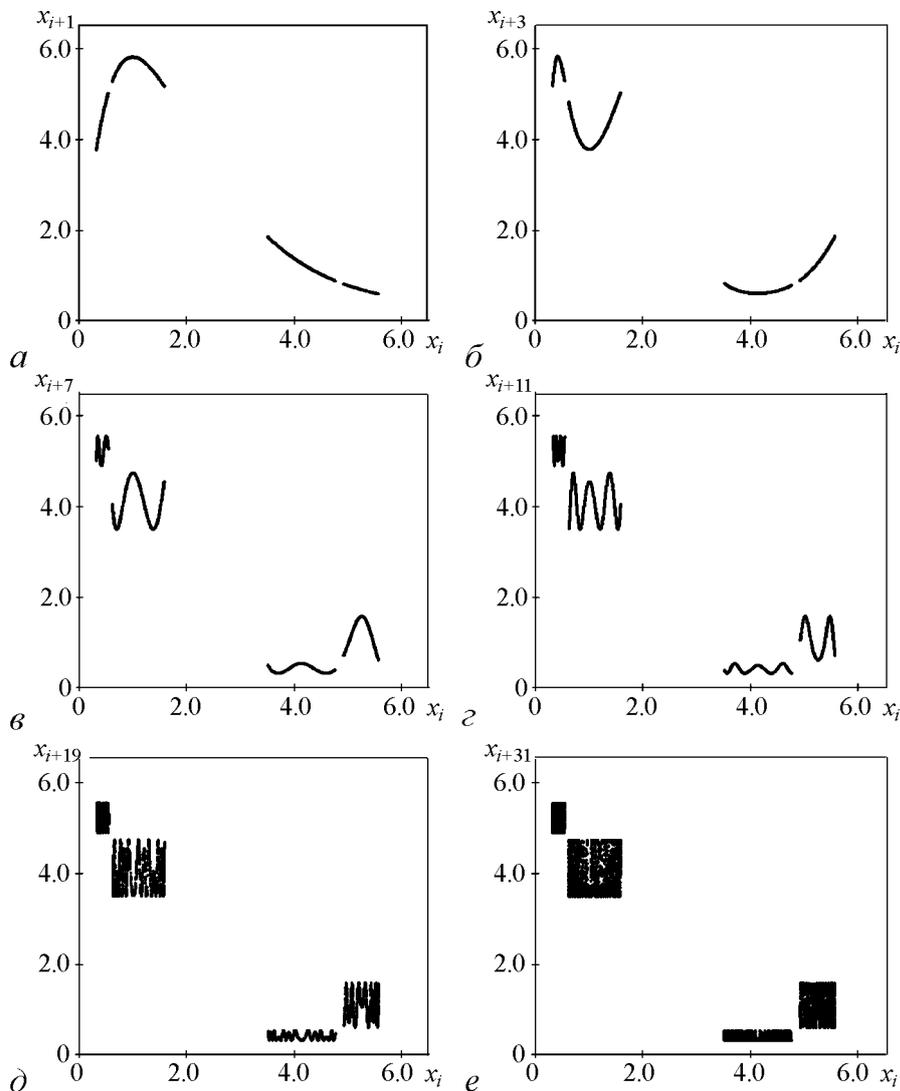


Рис. 5. Портреты уравнения Рикера (3) при  $a = 15.17$  в псевдофазовых пространствах с лагом  $m = 1$  (а), 3 (б), 7 (в), 11 (г), 19 (д), 31 (е)

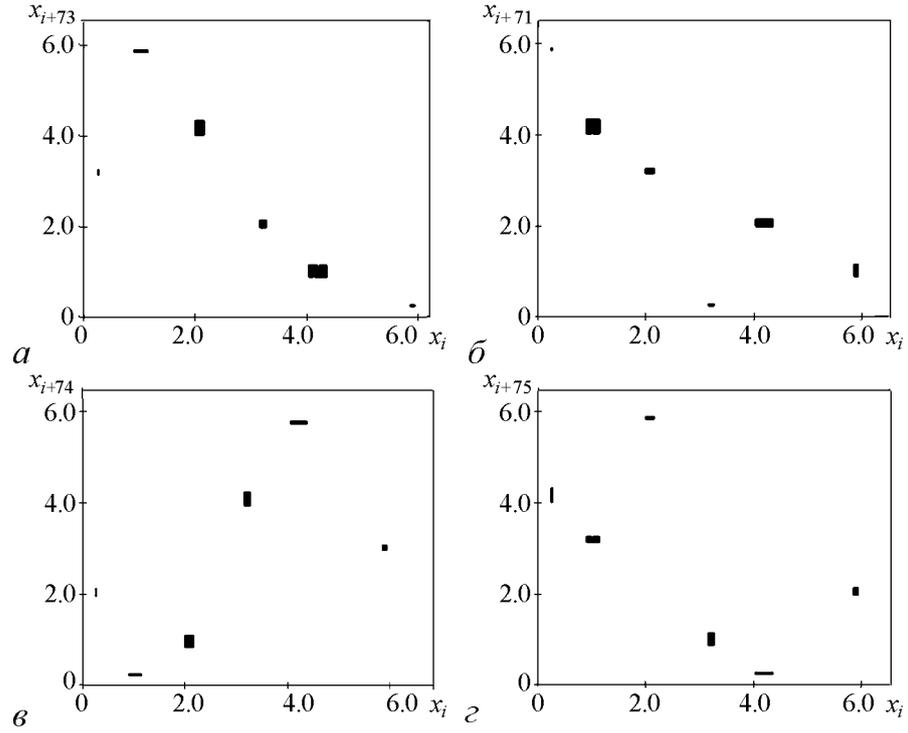


Рис. 6. Портреты уравнения (3) при  $a = 16.13$  в псевдофазовом пространстве с лагами  $m = 73$  (а), 71 (б), 74 (в), 75 (г)

В ходе имитационного моделирования установлено, что, если количество областей  $d$  не является простым числом, то могут наблюдаться следующие случаи перехода по интервалам значений. Если лаг  $m$  взаимно прост с количеством областей  $d$  ( $\text{НОД}(m, d) = 1$ ), то области своим расположением определяют единственную последовательность, подобную последовательности (4). Например, на рис. 6, б представлен портрет уравнения (3) при  $m = 71$ . Пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  решения уравнения образуют шесть областей, определяющих только одну последовательность перехода.

Если значение лага  $m$  не взаимно просто с  $d$ , то в портрете наблюдается качественно иное расположение областей пар  $(x_n, x_{n+m})$ . Так, на рис. 6, в при  $m = 74$  ( $\text{НОД}(m, d) = 2$ ), на портрете области определяют две обособленные друг от друга последовательности переходов по интервалам:

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots \\
 & \text{и } [3.17, 3.27] \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

При  $m = 75$  ( $\text{НОД}(m, d) = 3$ ) на рис. 6, г видны три обособленные последовательности интервалов

$$\begin{aligned}
 & [0.25, 0.26] \rightarrow [4.05, 4.36] \rightarrow [0.25, 0.26] \rightarrow \dots, \\
 & [0.90, 1.14] \rightarrow [3.17, 3.27] \rightarrow [0.90, 1.14] \rightarrow \dots, \\
 & [2.00, 2.14] \rightarrow [5.89, 5.93] \rightarrow [2.00, 2.14] \rightarrow \dots
 \end{aligned}$$

Если значение лага  $m$  кратно количеству областей  $d$ , то области пар выстраиваются на биссектрисе первого квадранта псевдофазового пространства, указывая

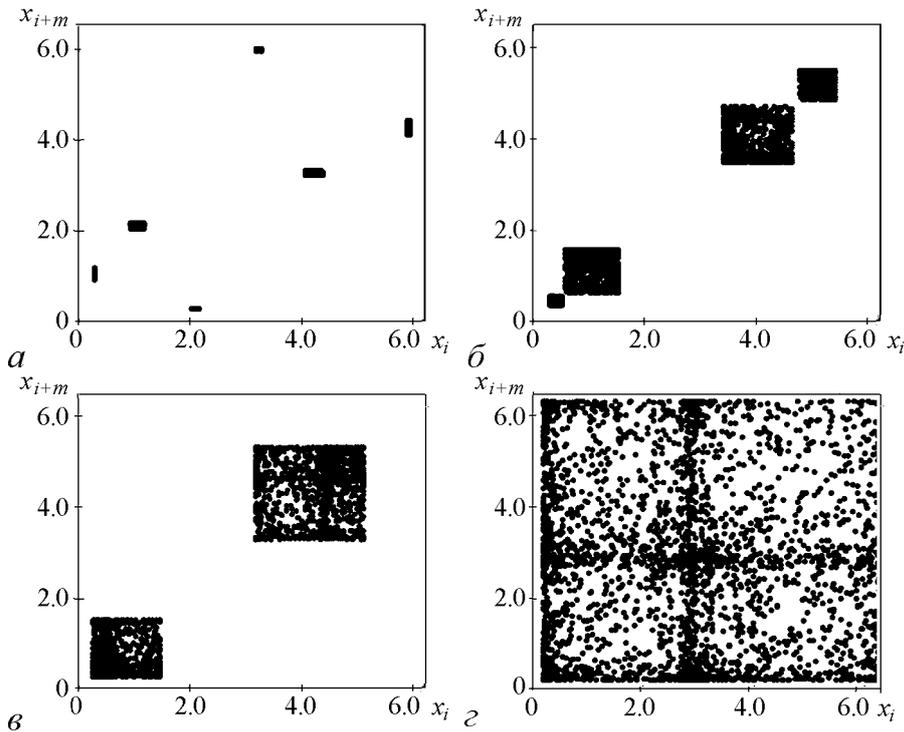


Рис. 7. Фазовые портреты уравнения (3) в псевдофазовом пространстве при  $a = 16.13$  (а),  $15.17$  (б),  $15.26$  (в),  $17.11$  (г). Использовано значение лага  $m = 100$

на то, что через  $m$  итераций значение  $x_{n+m}$  возвращается в тот же интервал, которому принадлежит значение  $x_n$ .

Появление нескольких обособленных циклов на фазовом портрете легко объясняется следующим образом. Лаг, используемый при построении псевдофазового пространства, аналогичен частоте дискретизации некоторого исследуемого сигнала. Использование не взаимно простой частоты дискретизации с периодом самого сигнала может дать неоднозначное представление о периодичности исследуемого сигнала.

Из сказанного можно сделать следующие выводы о некоторых свойствах фазовых портретов в псевдофазовом пространстве с большим лагом:

- увеличение лага  $m$  псевдофазового пространства приводит к формированию на портрете областей прямоугольного вида из пар значений  $(x_n, x_{n+m})$ ;
- в псевдофазовых пространствах с большим значением лага  $m$  количество выделенных областей  $d$  пар значений  $(x_n, x_{n+m})$  на портрете не зависит от значения лага  $m$ ;
- учитывая, что под лагом  $m$  понимается количество итераций, разделяющих друг от друга значения решения  $x_n$  и  $x_{n+m}$ , можно сказать, что значение лага псевдофазового пространства определяет расположение областей пар  $(x_n, x_{n+m})$ .

Рассмотрим использование портретов в псевдофазовом пространстве с большим лагом в анализе решений уравнения (3).

Для рассмотренных ранее случаев решения уравнения (3) при параметре  $a$ , равном  $16.13$ ,  $15.17$ ,  $15.26$  и  $17.11$ , построены портреты в псевдофазовом пространстве с лагом  $m = 100$  (рис. 7). Видно, что пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  в псевдофазовом пространстве выделяют в случае  $a$  – шесть областей, в случае  $b$  – четыре, в

случае  $\nu$  – две и в случае  $\varepsilon$  – одну область. Количество областей на фазовых портретах соответствует количеству диапазонов  $X_k$ , выделенных с помощью гистограммы (см. рис. 3).

Из рассмотренных четырех случаев выделяется случай, показанный на рис. 7,  $\varepsilon$ . При  $a = 17.11$  пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  решения уравнения (3) в фазовом портрете образуют единую область, что соответствует единственному диапазону значений, определенному гистограммой.

## 2. Кластерный анализ динамики системы

Наличие в пространстве состояний ограниченных диапазонов, в которые может переходить система, а также областей пар состояний системы в псевдофазовом пространстве означает, что для дальнейшего исследования продуктивным может быть использование кластерного анализа. Методами кластерного анализа вся последовательность принятых состояний системы может быть разделена на несколько различных кластеров состояний. Причем в каждый кластер будут входить только те состояния системы, которые, в некотором смысле, близки друг к другу.

Таким образом, при некоторых значениях параметра  $a$  система (1) образует кластеры состояний. Можно предположить, что система (1), изменяя своё состояние, переходит из кластера в кластер, сохраняя порядок перехода по кластерам.

Для проверки справедливости данного предположения было выполнено следующее. Задана метрика в пространстве состояний системы (3). Сформулировано понятие кластера состояний системы. Выбран алгоритм построения кластеров. Выбран диапазон значений параметра  $a$  и шаг сканирования этого диапазона. Для каждого взятого значения параметра  $a$  построены кластеры состояний системы (3). Проверена периодичность перехода системы по выделенным кластерам состояний. Если хотя бы при одном значении параметра  $a$  будет установлена периодичность перехода системы из кластера в кластер, то тем самым будет доказана справедливость выдвинутого предположения.

Пусть в дальнейшем под кластером состояний понимается подмножество состояний системы, образовавших какой-то один диапазон состояний в пространстве состояний. Тогда в качестве меры близости друг к другу двух состояний  $x_i$  и  $x_j$  может использоваться естественная мера  $|x_i - x_j|$ .

Заметим, что, если состояния системы образуют кластеры, то эти кластеры не должны зависеть от выбора начального состояния системы и в этом смысле кластеры должны быть устойчивыми. То есть на практике при выборе начального состояния, не принадлежащего одному из кластеров состояний, система в последующих итерациях осуществляет переход в состояние, принадлежащее одному из кластеров, а в последующей динамике системы реализуются состояния, принадлежащие выделенным кластерам.

Для построения кластеров состояний используется следующая процедура. задается пороговая величина  $\rho$ , с которой сравнивается расстояние между двумя значениями  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$ , выбираемыми из последовательности значений решения уравнения. Причем пары значений  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  выбираются таким образом, чтобы были рассмотрены все возможные сочетания значений фрагмента решения уравнения. Если расстояние между значениями  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  не превышает порогового значения  $\rho$ , то считается, что эти значения принадлежат одному и тому же кластеру и объединяются. В случае превышения этого порогового значения  $\rho$ , значения  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  не

объединяются в кластер. Следует заметить, что эта ситуация ещё не означает, что  $x_{n_1}$  и  $x_{n_2}$  принадлежат различным кластерам.

Выделение кластеров выполнялось с использованием нескольких пороговых значений  $\rho$ : 0.02, 0.01 и 0.001. Имитационное моделирование показало, что использование достаточной статистики значений  $x_n$  при всех выбранных пороговых значениях позволяет получить одни и те же результаты. Эти результаты согласуются с представленными гистограммами и фазовыми портретами. Так, при  $a = 16.13$  определились 6 кластеров, при  $a = 15.17$  – четыре, при  $a = 15.26$  – два и при  $a = 17.11$  – только один.

Заметим, что для всех моделированных случаев выбранные пороговые значения  $\rho$  не превышали минимального расстояния между диапазонами значений в пространстве значений. Проведенный кластерный анализ значений решения уравнения (3) показал, что все значения разделяются на уже ожидаемое количество кластеров. В случае выбора порогового значения  $\rho$ , превышающего наименьшего расстояния между диапазонами значений, в результате кластерного анализа выделяются кластеры, объединяющие сразу несколько диапазонов значений.

Выделенные кластеры значений позволяют исследовать характер решения уравнения (3) следующим образом. Нумеруются кластеры значений. Затем номера кластеров присваиваются значениям решения, образовавшим кластер. Таким образом, у принятых значений получится двойная индексация:  $x_{n,k}$ . Первый индекс соответствует номеру итерации  $n$ , а второй,  $k$  – номеру кластера, к которому отнесено значение  $x_n$ .

Благодаря двойной индексации появляется возможность проанализировать порядок попадания значения  $x_n$  в выделенные кластеры. Если в последовательности значений в порядке изменения номера итерации наблюдается периодичность в индексации по кластерам, то можно говорить о некотором периодическом характере решения уравнения. Понятно, что в данном случае не идет речь о строгой периодической последовательности значений  $x_n$ . Решение уравнения, меняя свои значения, сохраняет периодический порядок прохождения кластеров значений.

Таким образом, система переходит из кластера в кластер последовательно в одном и том же строгом порядке. Именно этой периодичностью объясняется незатухающий характер автокорреляционной функции. И только в рассмотренном случае при  $a = 17.11$  решение уравнения (3), значения которого образовали один кластер, характеризуется затухающей автокорреляционной функцией.

Из выполненного анализа аperiodических решений уравнения (3) следует следующий вывод. Аperiodические режимы можно разделить на два вида. К первому виду относятся режимы, имеющие более одного диапазона состояний  $X_k$  и незатухающую автокорреляционную функцию. Ко второму – имеющие только один диапазон состояний, практически полностью покрывающий интервал  $[a^2 \exp(-(1+a/e)); a/e]$  и затухающую автокорреляционную функцию.

### 3. Интервальная периодическая динамика системы

Известно (см., например, в [9]), что под периодическим режимом понимается поведение системы, для которого существует  $l$  чисел  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$  таких, что

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad x_{n+2} = F(x_{n+1}), \dots, x_n = F(x_{n+l-1}). \quad (5)$$

Если все числа  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$  различны, то периодический режим называется циклом длины  $l$ , а число  $l$  – периодом динамического режима системы (1).

Описанные выше аperiodические режимы  $x_{n, k}$ , в которых происходят последовательные переходы системы из кластера в кластер, могут быть представлены следующим образом:

$$x_{n+1, k+1} = F(x_{n, k}), \quad x_{n+2, k+2} = F(x_{n+1, k+1}), \quad \dots, \quad x_{n+d, k} = F(x_{n+d-1, k+d-1}). \quad (6)$$

Сравнение (5) с (6) указывает на аналогию между периодическими режимами и описанными аperiodическими, в которых имеет место строгая периодическая последовательность обхода интервалов  $X_k$ . В силу сказанного, такой вид аperiodических режимов может быть назван интервально-периодическим.

Определим интервально-периодический режим следующим образом. Динамический режим системы (1) будем называть интервально-периодическим, если существуют не менее двух взаимно непересекающихся интервалов значений  $X_k$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $l \geq 2$ , ( $X_k \cap X_s = \emptyset$ ,  $k \neq s$ ) и для любого натурального  $i$  можно установить соответствие  $x_i \in X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ , то для любого натурального  $j$  выполняется  $x_{i+j} \in X_s$ , если  $i + j \equiv i \pmod{l}$ .

Из определения интервально-периодического режима видно, что для уравнения (1) периодический режим является частным случаем интервально-периодического. Таким образом, периодический режим с периодом  $l$  можно определить как интервально-периодический, для которого каждый интервал  $X_k$ ,  $k = \overline{1, l}$ , содержит единственное значение.

Применим понятие интервально-периодического режима к анализу решений уравнения (3). С помощью градиентной карты в пространстве значений параметра  $a$  представим графически результаты исследования периодических и интервально-периодических решений уравнения Рикера (3).

Для определения характера решения уравнения (3) на интервале параметра  $a$  от 14.0 до 30.0 значения параметра  $a$  последовательно брались с шагом 0.005. Для каждого значения параметра  $a$  вид режима динамической системы определялся численно по одному решению, с произвольным начальным состоянием. Интервальные периодические режимы обнаруживались описанным выше методом кластерного анализа с пороговым значением  $\rho = 0.001$ .

Для исследования периодических режимов решение уравнения (3) вычислялось в объеме двух тысяч итераций, из которых первая тысяча состояний отбрасывалась, а по оставшейся второй тысяче проводилась проверка на периодичность. При этом в качестве проверочного условия использовались следующие неравенства

$$|x_i - x_{i+kT}| < \delta, \quad k = 1, \dots, \left\lceil \frac{1000}{T} \right\rceil, \quad i = 1001, \dots, 2000 - kT, \quad (7)$$

где величина  $T$  – натуральное число, а  $\delta$  – порог отклонения значений решения, отстоящих друг от друга на  $T$  итераций. Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Определение значения величины  $T$ , удовлетворяющего всем неравенствам (7), выполнялось последовательным перебором целых чисел из интервала от 2 до 150. Возможные значения периодов больше 150 не рассматривались. Для всех проверяемых значений  $T$  использовалось одно и то же значение порога  $\delta$ , равное  $10^{-7}$ . Первое в переборе значение  $T$ , удовлетворяющее всем неравенствам (7) одновременно, принималось за период, а решение уравнения – периодическим.

На рис. 8 сопоставлены карты определенных в ходе имитационного моделирования периодических и интервальных периодических режимов системы (3) для значений параметра  $a$  от 14.0 до 30.0. Карты на рисунке располагаются в паре: карта периодических режимов находится над картой интервальных периодических режимов.

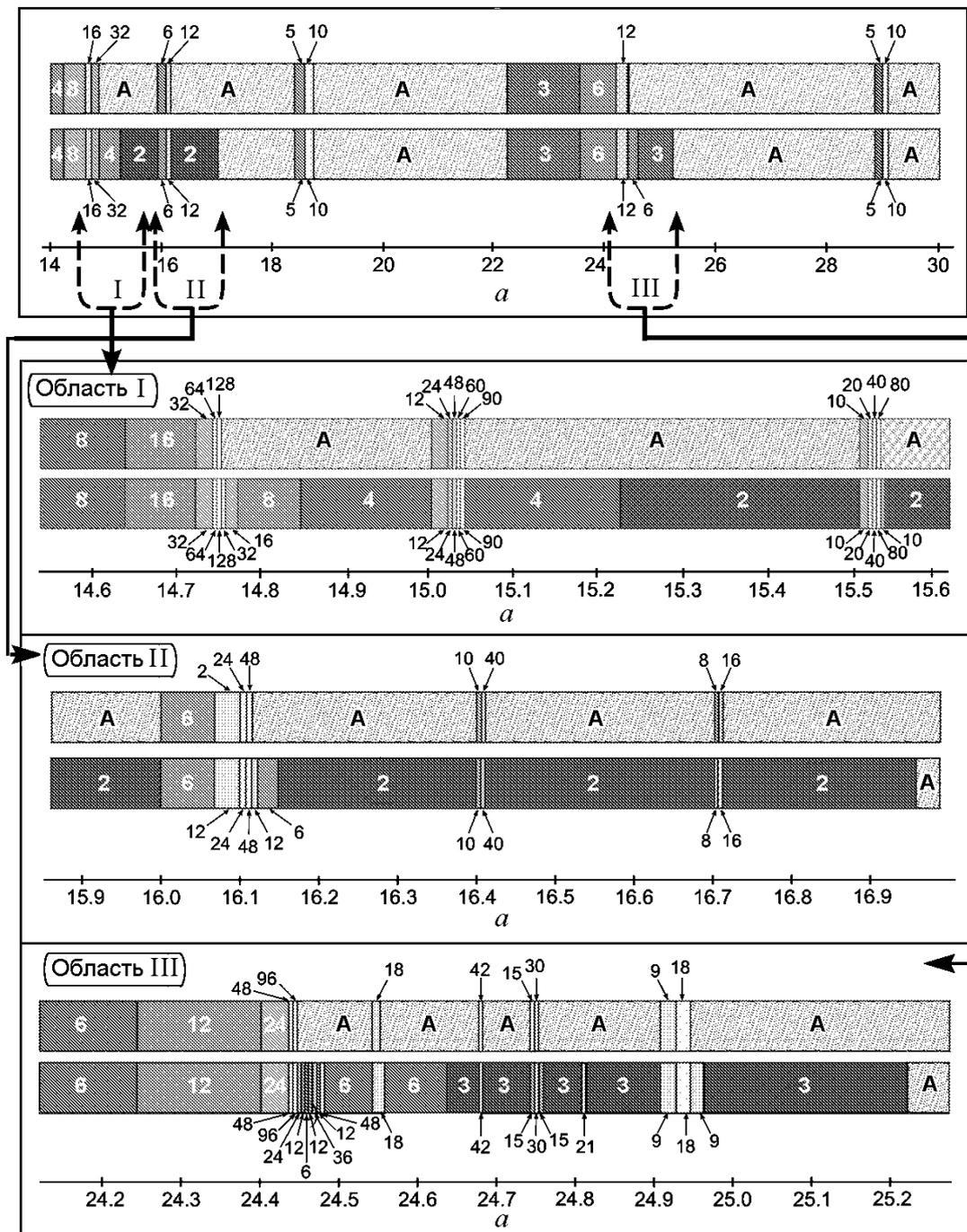


Рис. 8. Карты периодических режимов (расположены сверху) и интервальных периодических режимов (расположены снизу) на диапазоне значений параметра  $a$  от 14.0 до 30.0. Числами на картах обозначены периоды, А обозначает аперриодическую динамику

В силу большого количества узких окон периодичности на рассматриваемом интервале значений параметра  $a$  рис. 8 не претендует на полноту представляемой информации. В нем изображены наиболее крупные обнаруженные окна периодичности, которые хорошо видны в использованном масштабе. Для большей детализации на рис.8 вынесены увеличенные фрагменты карты динамических режимов на трех областях значений параметра  $a$ : область I – [14.54, 15.62], II – [15.87, 16.97] и III – [24.12, 25.28].

Из представленных карт динамических режимов можно сделать следующие выводы.

- Все области периодических режимов, представленные на картах периодических режимов, полностью повторились на картах интервальных периодических режимов.
- Области существования интервальной периодической динамики, не являющейся одновременно и периодической, продолжают каждую серию бифуркаций периодических режимов в сторону увеличения значения параметра модели  $a$ . При этом с увеличением значения параметра  $a$  происходит уменьшение периода  $T$  интервальной динамики.
- Области интервальной периодической динамики большой протяженности (например, с периодом 2 и 4 в областях I и II на рис. 8 и периодом 3 в области III прерываются узкими окнами периодичности. В этих окнах также наблюдаются бифуркации с удвоением периода периодической динамики и последующим уменьшением периода интервальной.

### Заключение

Использованные в анализе динамических режимов системы (3) статистические характеристики – гистограмма и автокорреляционная функция – указали на существование двух качественно отличающихся друг от друга аperiodических режимов системы (3).

Установлено, что первый вид аperiodического режима в определенном смысле близок к периодическому. Он характеризуется циклической автокорреляционной функцией, и имеет несколько взаимно не пересекающихся диапазонов состояний системы. Такую аperiodическую динамику можно охарактеризовать как цикл конечной длины с флуктуирующими элементами цикла, причем флуктуации происходят в ограниченных диапазонах значений. Этот режим назван интервальным периодическим.

Второй вид режима не имеет характеристик, общих с периодическим режимом. Он характеризуется затухающей автокорреляционной функцией. При этом последовательность состояний системы (3) покрывает практически весь интервал от 0 до  $a/e$ .

Для анализа динамики одномерной системы предложено использовать портреты в псевдофазовых пространствах с большим лагом. Такие портреты позволяют четко различать указанные виды аperiodического режима системы, а также определять период интервальной периодической динамики.

На основе метода кластерного анализа построен алгоритм идентификации интервальной периодической динамики системы. С помощью этого алгоритма исследована система (3) на интервальные периодические режимы в интервале значений параметра  $a$  от 14.0 до 30.0. По результатам исследования построена карта интервальных периодических режимов и сопоставлена с картой периодических режимов

системы. Установлено, что интервальная периодическая динамика при увеличении значения параметра  $a$  продолжает каждую серию бифуркаций системы (3) с последовательным уменьшением своего собственного периода до полного вырождения в аперIODическую динамику.

*Исследования проведены при частичной финансовой поддержке РФФИ № 11-01-98512-р\_восток\_a.*

### **Библиографический список**

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
2. Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищевая промышленность, 1979.
3. Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г., Фрисман Е.Я. Динамическое поведение модели Рикера при циклическом изменении одного из параметров // Вестник ДВО РАН. 2004. № 5. С. 19.
4. Громова Н.П. Равновесные и колебательные предельные режимы в моделях двух конкурирующих популяций с дискретным временем // Математические исследования в популяционной экологии. Владивосток: ДВО АН СССР, 1988. С. 107.
5. Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяции и оптимизации промысла. М.: Наука, 1979.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
7. Якобсон М.В. О свойствах динамических систем, порожденных отображением вида  $x \rightarrow Axe^{-bx}$  // Моделирование биологических сообществ. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1975. С. 141.
8. Скороход А.В. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. фундам. направл. 1989. Т. 43. С. 5.
9. Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.

*ИКАРП ДВО РАН, Биробиджан*

*Поступила в редакцию*

*12.05.2011*

*После доработки*

*22.03.2012*

### **FEATURES OF MODES FOR ONE-DIMENSIONAL MODEL OF RICKER**

*K.V. Shlufman, B.E. Fishman, E.Ya. Frisman*

In this paper we make investigation of aperiodic modes Ricker's model. It's identified two qualitatively different kinds of aperiodic modes for this model. It's defined one of the selected types of aperiodic modes. We have called him interval time-periodic mode. For analyze of dynamics of one-dimensional system we used pseudo phase space with a big lag. The maps of the interval of periodic modes are made. We discuss the distribution of interval periodic modes into parameter space of Ricker's model.

*Keywords:* Recurrence equation of Ricker, interval-periodic solution, phase space, cluster analysis, spectral analysis.



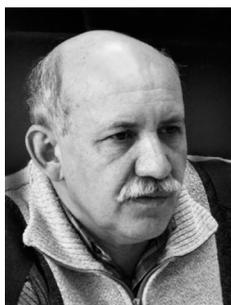
*Шлюфман Константин Владимирович* – родился в 1976 году, окончил факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия) (1998). Окончил очную аспирантуру (2009) Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и хаос, статистические свойства хаоса в динамических системах.

679016 Россия, Еврейская автономная область,  
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
E-mail: Shlufman@mail.ru



*Фишман Борис Ентильевич* – родился в Семипалатинске (1942). Окончил Киевский государственный университет (1964). После окончания КГУ работал в Украинском научно-исследовательском гидрометеорологическом институте, где подготовил и успешно защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук. Работал заведующим сектором в Украинском филиале Всесоюзного научно-исследовательского института по изучению спроса населения на товары народного потребления и конъюнктуры торговли, в Центральном конструкторско-технологическом бюро приборостроения с опытным производством. С 1996 года – профессор Дальневосточной государственной социально-гуманитарной академии. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора педагогических наук. Автор 3-х монографий. Опубликовал более 180 научных работ по различным приложениям теории систем, теории процессов электризации в облаках и осадках, теории и методике профессионального образования.

679016 Россия, Еврейская автономная область,  
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
E-mail: bef942@mail.ru



*Фрисман Ефим Яковлевич* – родился в Сталинабаде, ныне Душанбе, (1948), окончил Новосибирский государственный университет (1971). После окончания НГУ работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН, где с 1988 года заведовал лабораторией математического моделирования экологических систем. С 2002 года – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (Биробиджан). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982) в Институте цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск) и доктора биологических наук (1989) в Институте биофизики ДВО РАН (Красноярск) в области математической популяционной биологии и теории эволюции. Член-корреспондент РАН. Автор 4-х монографий (две вышли в издательстве «Наука» и две – в ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор.

679016 Россия, Еврейская автономная область,  
Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
E-mail: frisman@mail.ru