



ИССЛЕДОВАНИЕ МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНОЙ ДИНАМИКИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФЕКТООБРАЗОВАНИЯ

А.В. Подлазов

Иерархическая модель дефектообразования позволяет с единых позиций рассматривать как обычную, так и самоорганизованную критичность. Масштабно-инвариантное критическое состояние в этой модели представлено неподвижными точками перенормировочного преобразования, связанного с подъемом на следующий уровень иерархии. Устойчивые неподвижные точки этого преобразования соответствуют самоорганизованной критичности, а неустойчивые – обычной.

В работе перенормировочный подход к критическому состоянию дополнен динамическим, более традиционным для теории самоорганизованной критичности. Показано, что единичные возмущения на нижнем уровне иерархической системы вызывают отклик, распределенный по размеру степенным образом. Исследована зависимость показателей распределения от параметров модели.

Ключевые слова: Самоорганизованная критичность, масштабная инвариантность, перенормировка, степенные распределения.

Введение

Вопрос о природе масштабно-инвариантного состояния, в котором происходящие в системе процессы протекают одинаково на всех уровнях ее организации, является одним из ключевых вопросов для третьей парадигмы нелинейной динамики – парадигмы сложности.

Масштабная инвариантность характерна для критических явлений [1], которые могут происходить в некоторых нелинейных системах при тонкой подстройке управляющих параметров. Появление теории самоорганизованной критичности [2,3] дало объяснение возникновению масштабно-инвариантного состояния и в ситуациях общего положения. Однако существует методологический разрыв между исследованием традиционных критических систем, которое основывается на пространственной перенормировке [1], и исследованием самоорганизованно критических систем, существенным образом опирающимся на особенности той динамики, которая и приводит их в критическое состояние [4–7].



Рис. 1. Фрагмент иерархической системы модели дефектообразования. Каждый элемент i -го уровня состоит из $n = 3$ элементов $(i - 1)$ -го уровня. Элементы системы могут быть исправны или дефектны (показаны заливкой). Состояние каждого элемента определяется состоянием образующих его элементов предыдущего уровня, а также его собственной восприимчивостью к дефектам. Рисунок соответствует ситуации $s_2 = 1, s_1 = s_3 = 0$, то есть все элементы имеют одинаковую восприимчивость и становятся дефектными, когда дефектно более половины образующих их элементов

Рассмотрим иерархическую систему, фрагмент которой изображен на рис. 1. Система разбита на *уровни*, которые можно интерпретировать как степени детализации описания системы – чем ниже уровень, тем детальнее.

Элементы системы могут быть *исправны* или *дефектны*. На нижнем уровне $i = 0$ состояние элементов положим полностью случайным с концентрацией дефектов p_0 .

Каждый элемент уровня $i > 0$ состоит из фиксированного числа n элементов предыдущего уровня $(i - 1)$. Элементы нижележащих уровней, объединяющиеся в элемент следующего уровня, передают ему свое состояние в соответствии с его *восприимчивостью к дефектам*, под которой понимается минимальное число дефектных составляющих, необходимых, чтобы и он стал дефектным. Иными словами, элемент с восприимчивостью $k = 1, 2, \dots, n$ будет дефектным, если дефектны не менее k его составляющих.

Предметом исследования является изменение концентрации дефектных элементов при подъеме по уровням, а также реакция системы на изменение состояния одного элемента нижнего уровня.

Обозначим доли элементов типа k в системе через s_k . При этом, очевидно,

$$\sum_{k=1}^n s_k = 1. \quad (1)$$

Доли s_k будем считать одинаковыми для всех уровней системы.

Величины s_k не очень удобны с точки зрения проведения выкладок. Поэтому далее при первой же возможности мы будем переходить от них к отмасштабированным величинам $\sigma_k = ns_k - 1$.

Для них нормировка (1) запишется как

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k = 0. \quad (2)$$

Устранить этот разрыв позволяет рассматриваемая далее модификация иерархической модели дефектообразования, предложенной в работах [8–14]. Эта модель дает возможность с единых позиций взглянуть на обычную и самоорганизованную критичность при пространственной перенормировке. Благодаря наличию у модели критического состояния, ее правила могут быть дополнены динамикой, демонстрирующей его масштабную инвариантность, что и составляет основное содержание данной работы.

1. Свойства модели в простейшем случае

1.1. Фазовое пространство системы. Простейшим нетривиальным является случай $n = 3$ (см. пример на рис. 1), при котором элементы могут быть только трех типов:

- *пессимисты* ($k = 1$), становящиеся дефектными при наличии хотя бы одной дефектной составляющей;
- *демократы* ($k = 2$), состояние которых определяется большинством составляющих;
- *оптимисты* ($k = 3$), становящиеся исправными при наличии хотя бы одной исправной составляющей.

Изменение концентрации дефектных элементов p при подъеме на один уровень описывается отображением

$$p \rightarrow F(p) \quad (3)$$

с передаточной функцией

$$F(p) = s_1 \cdot (1 - q^3) + s_2 \cdot (p^3 + 3p^2q) + s_3 \cdot p^3, \quad (4)$$

где $q = 1 - p$ – концентрация исправных элементов.

Критическое состояние *масштабно-инвариантно*, то есть пребывающие в нем системы устроены одинаково на всех уровнях. Соответственно, интерес представляют неподвижные точки отображения (3), (4). Они находятся как корни уравнения

$$p = F(p), \quad (5)$$

которое с учетом нормировки (1) принимает вид

$$3(s_1 + ps_2) \cdot pq = (1 + p) \cdot pq.$$

Отображение всегда имеет две тривиальные неподвижные точки $p = 0$ и $q = 0$, соответствующие полностью бездефектному и полностью дефектному состояниям, и критическую

$$p_c = -\frac{3s_1 - 1}{3s_2 - 1} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (6)$$

которая, чтобы иметь физический смысл, должна удовлетворять ограничению

$$0 \leq p_c \leq 1. \quad (7)$$

Устойчивость неподвижных точек отображения (3) определяется абсолютной величиной производной передаточной функции (4). Если она меньше единицы, то неподвижная точка устойчива, если больше – неустойчива, а равенство

$$|F'(p)| = 1 \quad (8)$$

соответствует бифуркации, происходящей, когда встречаются две неподвижные точки отображения.

В случае отображения (3), (4) тривиальные неподвижные точки ограничивают диапазон физически осмысленных значений (7) критической неподвижной точки (6).

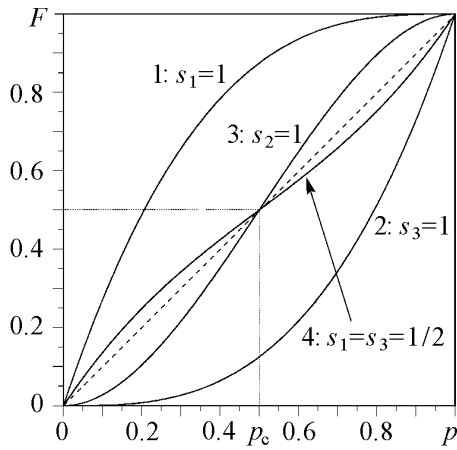


Рис. 2. Изменение концентрации дефектных элементов при подъеме на следующий уровень. Графики приведены для четырех случаев, разбираемых в тексте. Точка $p = 0$ устойчива в случаях 2 и 3, точка $p = 1$ – в случаях 1 и 3. Критическая неподвижная точка $p_c = 1/2$ существует в случаях 3 и 4, причем она неустойчива в случае 3 и устойчива в случае 4

и положение точки p_c , нет необходимости проводить выкладки, а достаточно рассмотреть по одному удобному примеру из уже известных областей пространства параметров. На рис. 2 приведены графики передаточной функции (4) для таких удобных случаев.

1. При $s_1 = 1, s_2 = s_3 = 0$ ($\sigma_1 = 2, \sigma_2 = \sigma_3 = -1$) для возникновения дефектного элемента достаточно, чтобы хотя бы одна из его составляющих была дефектной. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения $p = 1$, и любая ненулевая концентрация дефектов на нижнем уровне приводит к дефектности всей системы.

2. При $s_3 = 1, s_1 = s_2 = 0$ ($\sigma_3 = 2, \sigma_1 = \sigma_2 = -1$) для возникновения дефектного элемента необходимо, чтобы все его составляющие были дефектными. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения $p = 0$, и любая ненулевая концентрация исправных элементов на нижнем уровне гарантирует исправность всей системы.

3. Если $s_2 = 1, s_3 = s_1 = 0$ ($\sigma_2 = 2, \sigma_3 = \sigma_1 = -1$), то дефектный элемент возникает, если более половины из его составляющих дефектны. При этом оба крайних значения $p = 0$ и $p = 1$ устойчивы и состояние системы в целом определяется концентрацией дефектов на нижнем уровне. Если $p_0 < p_c = 1/2$, то система будет исправна (что сводится к варианту 2), а если $p_0 > p_c$ – дефектна (вариант 1). И лишь в случае $p_0 = p_c$ критическая концентрация дефектов будет сохраняться от уровня к уровню.

4. Если $s_2 = 0, s_3 = s_1 = 1/2$ ($\sigma_2 = -1, \sigma_3 = \sigma_1 = 1/2$), то система представляет собой рацемическую (в равных долях) смесь элементов двух разных типов: одни ведут себя по правилу 1, усиливая дефекты, а другие – по правилу 2, подавляя их. При этом критическая точка устойчива, и вероятность дефектности системы в целом p_c не зависит от концентрации дефектов на нижнем уровне, коль скоро $p_0 \neq 0; 1$.

Следовательно, изменение устойчивости тривиальных неподвижных точек совпадает с ее появлением в интервале (7) или с исчезновением из него.

При производной передаточной функции

$$F'(p) = 3(s_1 \cdot q^2 + 2s_2 \cdot pq + s_3 \cdot p^2) = 1 + (\sigma_1 \cdot q^2 + 2\sigma_2 \cdot pq + \sigma_3 \cdot p^2)$$

уравнение (8) дает для неподвижных точек $p = 0$ и $p = 1$, соответственно, многообразия $s_1 = 1/3$ ($\sigma_1 = 0$) и $s_3 = 1/3$ ($\sigma_3 = 0$), которые делят пространство параметров системы на четыре области, внутри которых устойчивость неподвижных точек отображения (3), (4) и их взаимное расположение неизменны. То есть, чтобы определить устойчивость и

На рис. 3 приведена фазовая диаграмма для рассматриваемой системы (она двухмерна, поскольку величины s_k связаны между собой условием нормировки (1)) [10,13,14]. Пространство параметров распадается на четыре области (фазы): две, в которых одна тривиальная неподвижная точка устойчива, вторая – неустойчива, а критической точки нет вовсе, и две, в которых критическая точка есть (на рис. 3 залиты оттенками серого).

Свойства систем, рассмотренных в примерах 1 и 2, где нет критической точки, вполне предсказуемы и, следовательно, эти системы не таят никакой опасности. Однако в критическом состоянии система может с ненулевой вероятностью оказаться как исправной, так и дефектной. При этом единичные изменения на нижнем уровне могут приводить к катастрофам – переключению состояния элементов высоких уровней или даже системы в целом.

И если в примере 3 критическое состояние возникает лишь при специальном значении $p_0 = p_c$, то в примере 4 – уже при любом $p_0 \neq 0; 1$. Вариант 3, таким образом, соответствует обычному критическому поведению, когда для появления у системы целостных свойств требуется специальная подстройка, а вариант 4 – самоорганизованной критичности, возникающей за счет действия отрицательной обратной связи, которая уменьшает отклонение p_i от p_c при подъеме по уровням.

1.2. Динамическое расширение модели. Модель дефектообразования позволяет продемонстрировать не только свойства критического состояния при пространственной перенормировке, но и соответствующую масштабно-инвариантную динамику.

В качестве возмущающего фактора здесь выступает изменение состояния случайно выбранных элементов некоторого уровня на противоположное, то есть появление или выправление единичных дефектов. В качестве уровня, где это происходит, выберем тот, на котором уже установилась критическая концентрация дефектов p_c . Это избавит нас от необходимости рассматривать переходные процессы. Далее для простоты полагаем, что $p_0 = p_c$, и, соответственно, изменениям, инициирующим динамику системы, подвергаются элементы нулевого уровня.

Изменение состояния некоторого элемента может сказаться на элементе следующего уровня, в который первый входит как составляющая, а изменения того, в свою очередь, – на более крупном, и т.д. Если изменения, вызванные появлением или выправлением единичного дефекта на нижнем уровне, дошли до слоя m и

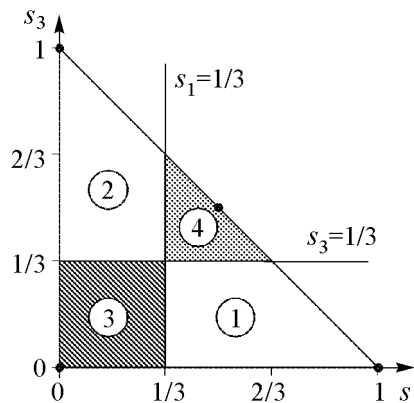


Рис. 3. Фазовая диаграмма для иерархической системы в проекции на оси $s_1 - s_3$. В случае $s_1 < 1/3$ (области 2 и 3) устойчиво бездефектное состояние $p = 0$. В случае $s_3 < 1/3$ (области 1 и 3) устойчиво полностью дефектное состояние $p = 1$. При одновременном выполнении этих условий (область 3) между устойчивыми неподвижными точками $p = 0$ и $p = 1$ отображения (3)–(4) лежит его неустойчивая неподвижная точка p_c , что соответствует обычному критическому поведению. Если же оба условия нарушаются (область 4), то между двумя неустойчивыми состояниями оказывается устойчивое, что соответствует самоорганизованной критичности. Жирными точечками отмечены случаи, использовавшиеся для определения взаимного расположения и устойчивости неподвижных точек отображения. Его графики для этих случаев приведены на рис. 2

затронули элемент линейного размера $x = n^m$, то величину x будем называть *размером* происшедшего катастрофического события, а ее логарифмическую меру m – его *магнитудой*.

Найдем распределение событий по магнитуде и размеру, для простоты полагая число уровней в системе бесконечным. Если передача изменения на следующий уровень происходит с постоянной вероятностью P , то события распределены по магнитуде экспоненциальным образом

$$u(m) = (1 - P) P^m \sim n^{-\alpha m}, \quad (9)$$

где

$$\alpha = -\log_n P. \quad (10)$$

Соответственно, распределение событий по размеру будет даваться степенной формулой

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (11)$$

Величина показателя α имеет принципиальное значение с точки зрения задач управления риском [14]. Чем меньше показатель, тем опаснее поведение системы. События, описываемые распределением (11) с $\alpha < 1$, уместно трактовать как *катастрофы*, поскольку сумма выборочных значений по порядку величины совпадает с крупнейшим из них. Если же $\alpha > 1$, то следует говорить об *авариях*, для которых уже не имеет места ситуация доминирования в сумме одного крупнейшего события.

Определим зависимость P от s_k . Появление дефектной составляющей у элемента восприимчивости k делает его дефектным в том и только в том случае, если до того у него была дефектна ровно $(k - 1)$ составляющая. Таким образом, вероятность передачи возникшего дефекта на следующий уровень есть

$$P = s_1 \cdot q^2 + s_2 \cdot 2pq + s_3 \cdot p^2 = (1 + (\sigma_1 \cdot q^2 + \sigma_2 \cdot 2pq + \sigma_3 \cdot p^2)) / 3.$$

Вероятность передачи выправленного дефекта, очевидно, такая же.

При $p_0 = p_c$ с учетом соотношений (2) и (6) получаем

$$P = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(3s_1 - 1) \cdot (3s_3 - 1)}{(3s_1 - 1) + (3s_3 - 1)} \right). \quad (12)$$

В области параметров 4, соответствующей самоорганизованно критическому поведению, $s_1, s_3 > 1/3$ ($\sigma_1, \sigma_3 > 0$). Поэтому вероятность передачи изменений ограничена сверху значением $P_{\max} = 1/3$, которое соответствует случаю $s_1 = 1/3$ ($\sigma_1 = 0$) или $s_3 = 1/3$ ($\sigma_3 = 0$).

Как нетрудно понять, в случае фиксированной доли s_2 (и, соответственно, фиксированной суммы $s_1 + s_3$) минимального значения вероятность P достигает, если $s_1 = s_3$. При этом формула (12) с учетом нормировки (1) упрощается до вида

$$P = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sigma_2}{4} \right) = \frac{1 + s_2}{4},$$

что позволяет определить и наименьшее значение $P_{\min} = 1/4$, соответствующее точке фазового пространства $s_2 = 0, s_3 = s_1 = 1/2$ ($\sigma_2 = -1, \sigma_3 = \sigma_1 = 1/2$), рассмотренной в примере 4.

Таким образом, согласно формуле (10), в случае самоорганизованной критичности показатель распределения событий по размеру лежит в диапазоне

$$1 \leq \alpha_s \leq \log_3 4 \approx 1.262 \dots$$

Заметим, что формулы (10) и (12) не утрачивают применимости и в случае обычной критичности. Однако, поскольку здесь критическая точка неустойчива, выполнение условия $p_0 = p_c$ возможно только при искусственной установке необходимой концентрации дефектов на нижнем уровне. Тем не менее, если это сделано, то отклик системы на возмущение по-прежнему распределен степенным образом. Легко убедиться, что в этом случае вероятность передачи дефекта $P \in [1/3; 1/2]$, а показатель распределения для области 3 (см. рис. 3) лежит в диапазоне $1 \geq \alpha_u \geq \log_3 2 \approx 0.631 \dots$. Его минимальное значение соответствует точке $s_2 = 1, s_3 = s_1 = 0$ ($\sigma_2 = 2, \sigma_3 = \sigma_1 = -1$), рассмотренной в примере 3.

На рис. 4 показаны распределения переключений, вызванных единичным изменением на нижнем уровне, для случаев, доставляющих экстремумы показателю α . Область самоорганизованной критичности характеризуется аварийными значениями показателя распределения, а область обычной – катастрофическими.

1.3. Динамика переключений в окрестности неустойчивой критической точки. Если для неустойчивой критической точки $p_0 \neq p_c$, то при подъеме по уровням *отстройка* $\delta p = p - p_c$ в окрестности точки p_c увеличивается по формуле $\delta p \rightarrow \Lambda \delta p$, где обозначено $\Lambda = F'(p_c)$. Соответственно, $\delta p_i = \Lambda^i \delta p_0$.

Уход концентрации дефектов от критического значения, в свою очередь, приводит к нарушению степенного вида распределения. Формула (11) заменяется на более общую запись

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} \cdot f(x/x^*), \quad (13)$$

где функция $f(y)$ примерно постоянна при $y \sim 1$ и быстро убывает при $y \rightarrow \infty$, а величина x^* определяет характерный размер крупных событий, которые еще могут происходить при заданной стартовой отстройке δp_0 .

Максимально возможному событию соответствует отстройка $\delta p^* \sim 1$, то есть полный уход концентрации дефектов от p_c . Для этого необходимо пройти $m^* = \log_\Lambda \delta p^* / \delta p_0$ уровней. Соответственно,

$$x^* \sim \delta p_0^{-v}, \quad (14)$$

где

$$v = \log_\Lambda n. \quad (15)$$

В магнитудном представлении плотность распределения (13) принимает вид

$$u(m) \sim n^{-am} \cdot f(n^{m-m^*}). \quad (16)$$

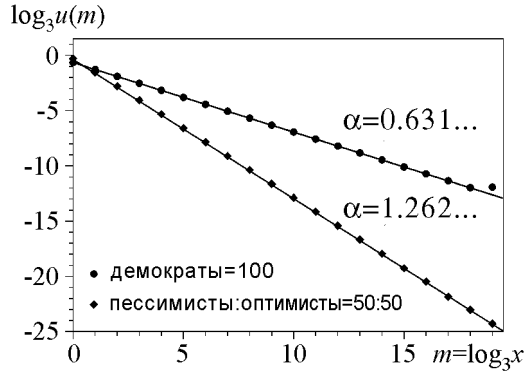


Рис. 4. Примеры распределения переключений по магнитуде. Значками показаны результаты компьютерного моделирования. Сплошные линии соответствуют зависимости (9)

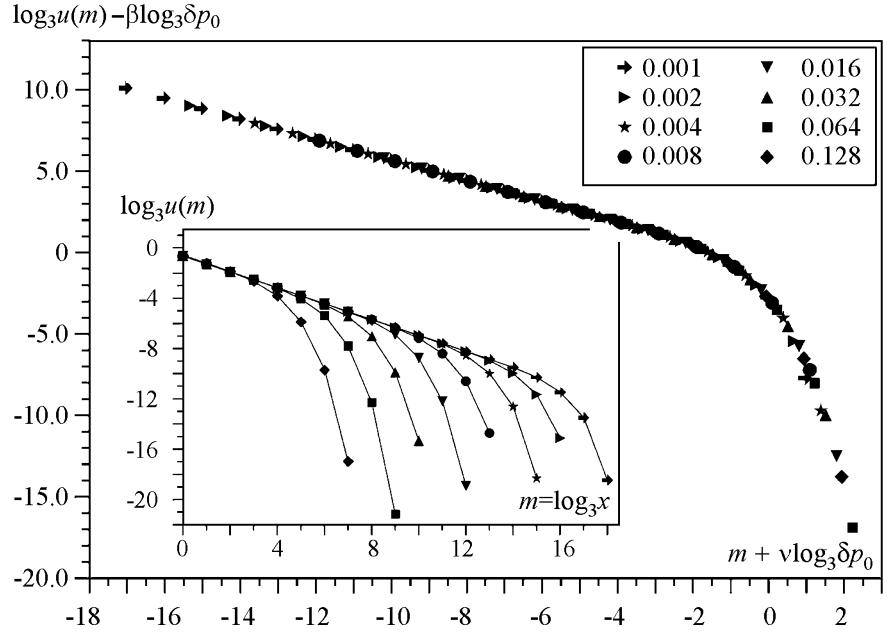


Рис. 5. Распределения переключений по магнитуе при различных значениях стартовой отстройки δp_0 . Рассмотрен случай неустойчивой критической точки из примера 3 ($s_2 = 1$). Графики совпадают при скейлинговых показателях $\nu = \log_{3/2} 3 \approx 2.710\dots$ и $\beta = \log_{3/2} 2 \approx 1.710\dots$, дающих показатель распределения $\alpha = \log_3 2 \approx 0.631\dots$. На врезке приведены те же графики, но без скейлинга

Альтернативную запись плотности дает метод *конечно-размерного скейлинга*:

$$u(m) = \delta p_0^\beta \cdot g(n^m \cdot \delta p_0^\nu). \quad (17)$$

Эквивалентность записей (16) и (17) предполагает степенное поведение функции g при малых значениях аргумента и выполнение скейлингового соотношения $\beta = \nu\alpha$. Оно позволяет легко определять показатель α по экспериментальным данным. При правильном подборе скейлинговых показателей β и ν графики распределения, построенные для различных значений δp_0 и отмасштабированные в соответствие с формулой (17), должны совпасть. На рис. 5 приведен пример конечно-размерного скейлинга для распределения переключений по магнитуе, демонстрирующий эту процедуру в действии.

2. Свойства модели в общем случае

2.1. Расположение и устойчивость неподвижных точек. В случае произвольного n передаточная функция отображения (3) дается выражением

$$F(p) = \sum_{i=1}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot \sum_{k=1}^i s_k,$$

которое после замены s_k на σ_k принимает вид

$$F(p) = p + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_n^i p^i q^{n-i} \cdot \sum_{k=1}^i \sigma_k. \quad (18)$$

Для определения неподвижных точек отображения (3), (18) подставим формулу (18) в уравнение (5), исключив из диапазона суммирования значение $i = n$ (в силу нормировки (2) соответствующее слагаемое входит в сумму с нулевым коэффициентом). После отбрасывания тривиальных решений $p = 0$ и $q = 0$ остается уравнение на нетривиальные неподвижные точки

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i p^{i-1} q^{n-1-i} \sum_{k=1}^i \sigma_k = 0, \quad (19)$$

решения которого по-прежнему должны удовлетворять ограничению (7).

Производная передаточной функции отображения, необходимая для определения устойчивости неподвижных точек, находится дифференцированием формулы (18)

$$F'(p) = 1 + \sum_{i=1}^n (C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i} - C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i}) \cdot \sum_{k=1}^i \sigma_k.$$

Сменив порядок суммирования, имеем

$$F'(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k \cdot \sum_{i=k}^n (C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} q^{n-i} - C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i}).$$

Легко видеть, что внутренняя сумма упрощается до одного члена, что окончательно дает

$$F'(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}. \quad (20)$$

Откуда, в частности,

$$F'(0) = 1 + \sigma_1 = n s_1,$$

$$F'(1) = 1 + \sigma_n = n s_n,$$

что определяет устойчивость тривиальных неподвижных точек $p = 0$ и $p = 1$ условиями $s_1 < 1/n$ ($\sigma_1 < 0$) и $s_n < 1/n$ ($\sigma_n < 0$), соответственно.

Вероятность передачи возникшего дефекта на следующий уровень есть

$$P = \sum_{k=1}^n s_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{k=1}^n \sigma_k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \right). \quad (21)$$

Сопоставление формул (20) и (21) позволяет установить связь между производной передаточной функции и вероятностью передачи дефекта

$$P = F'(p)/n. \quad (22)$$

Подставив это соотношение в формулу (10), приходим к выражению для показателя распределения

$$\alpha = 1 - \log_n F'(p), \quad (23)$$

из которого вытекает ограничение на диапазон показателей для устойчивых и неустойчивых неподвижных точек отображения (3). В области самоорганизованной критичности, где выполнено условие устойчивости $F'(p) < 1$, возможны только значения

показателя $\alpha_s > 1$, соответствующие авариям, а в области обычной критичности, где $F'(p) > 1$, будет наблюдаться уже катастрофическая статистика с $\alpha_u < 1$.

Заметим, что соотношение (22) может быть получено и непосредственно. Изменение концентрации дефектов на величину Δp влечет на следующем слое изменение их концентрации на $\Delta F(p) = F'(p) \cdot \Delta p$. А переключение состояния одного элемента из n входящих в блок как раз и дает изменение концентрации $\Delta p = 1/n$, входящее как коэффициент в формулу (22).

2.2. Экстремальные значения показателя. Как было показано выше, в области самоорганизованной критичности выполнено ограничение $\alpha_s > 1$, а в области обычной – $\alpha_u < 1$. Найдем для произвольного n вторые концы диапазонов, ограничивающих значения показателя α .

Как показывает численное изучение решений уравнения (19), изменение экстремальных значений показателя с ростом n существенно различается в случаях обычной и самоорганизованной критичности.

Для области самоорганизованной критичности наибольшее значение α_s достигается при $s_1 = s_n = 1/2$ (то есть для рацемической смеси крайних пессимистов и крайних оптимистов). Легко убедиться, что очевидное значение $p_c = 1/2$ будет в этом случае неподвижной точкой отображения (3), (18). По формуле (21) находим экстремальную вероятность передачи дефекта

$$P_{\min} = 2^{-(n-1)},$$

что, согласно выражению (10), дает максимальный показатель распределения событий $\alpha_s = (n - 1)/\log_2 n$.

Таким образом, показатель α_s неограниченно возрастает при увеличении n . Соответствующий график приведен на врезке рис. 6.

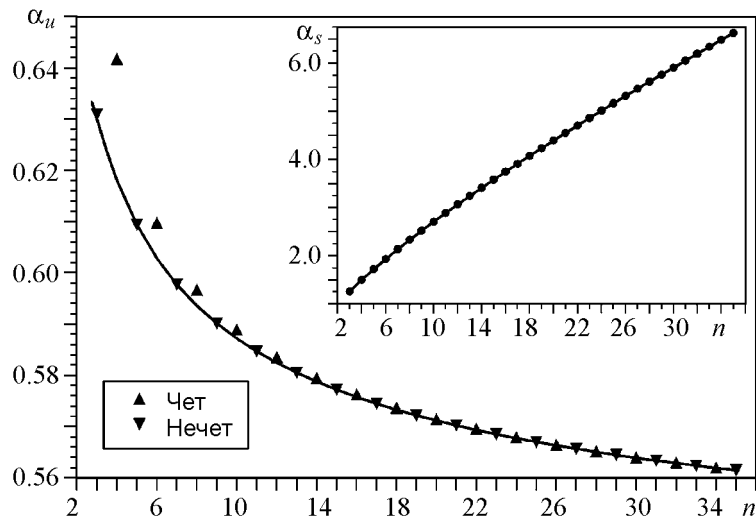


Рис. 6. Экстремальные показатели распределения переключений. Значками показаны реальные значения показателя, линией – расчетная зависимость (в случае неустойчивой критической точки соответствует нечетным n). Для неустойчивой критической точки минимальный показатель убывает до $1/2$ при возрастании n . Для устойчивой критической точки (врезка) максимальный показатель неограниченно возрастает

Для области обычной критичности поведение показателя оказывается более сложным, поскольку здесь свойства модели зависят от четности n .

В случае нечетного $n = 2l + 1$ экстремум достигается при $s_{l+1} = 1$, то есть когда вся система состоит из идеальных демократов. Вновь, как и в случае самоорганизованной критичности, здесь имеется очевидная критическая точка $p_c = 1/2$, что можно проверить непосредственной подстановкой в формулу (18).

В соответствии с формулой (21), вероятность передачи дефекта $P_{\max} = 2^{-2l} C_{2l}^l$. Воспользовавшись для нахождения числа сочетаний формулой Стирлинга

$$x! \cong \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+1/2} e^{-x+1/12x},$$

получаем выражение

$$P_{\max} \cong \frac{\exp(-1/8l)}{\sqrt{\pi l}},$$

определяющее в соответствии с формулой (10) минимальный показатель

$$\alpha_u \cong \frac{1/8l + \ln \sqrt{\pi l}}{\ln(2l + 1)}.$$

Таким образом, $\alpha_u \rightarrow 1/2$ сверху при $n \rightarrow \infty$.

В случае четного $n = 2l$ вопреки интуитивным ожиданиям экстремум достигается не при $s_l = s_{l+1} = 1/2$ (рацемическая смесь *недодемократов* пессимистического и оптимистического толка), а как при $s_l = 1$, так и при $s_{l+1} = 1$ (тотальное присутствие недодемократов только одного из двух толков). Из-за этого симметрия, позволяющая провести в общем случае аналитические выкладки, исчезает. Однако, как видно из рис. 6, по мере роста n разница между его четным и нечетным значениями нивелируется.

Наиболее узким диапазон возможных значений показателя для обычной критичности оказывается при $n = 4$. Можно показать, что в этом случае значение показателя не опускается ниже значения

$$\alpha_u = \log_4 \frac{11 + \sqrt{13}}{6} \approx 0.642 \dots$$

достигаемого при $s_2 = 1$ или $s_3 = 1$. А в случае $s_2 = s_3 = 1/2$ получается несколько большее значение $\alpha_u = 2 - \log_4 6 \approx 0.708 \dots$

3. Суперуниверсальные показатели

Рассмотрим средний размер переключения, происходящего в системе бесконечного размера при изменении состояния единичного элемента нижнего уровня

$$\langle x \rangle = \int x \cdot u(x) dx. \quad (24)$$

В случае обычной критичности $\alpha < 1$ при чисто степенном виде плотности $u(x)$, то есть при $p_0 = p_c$, интеграл (24) расходится. Соответственно, величина $\langle x \rangle$ определяется отстройкой δp_0 . На основе формул (13) и (14) находим

$$\langle x \rangle = \int x^{-\alpha} \cdot f(x \cdot \delta p_0^v) dx \sim \delta p_0^{-v(1-\alpha)}.$$

Сопоставление формул (15) и (23) приводит к нетривиальному скейлинговому соотношению

$$\nu(1 - \alpha) = 1, \quad (25)$$

из которого вытекает суперуниверсальная зависимость

$$\langle x \rangle \sim \delta p_0^{-1}. \quad (26)$$

Таким образом, средний размер переключения для обычной критичности оказывается независимым от каких-либо параметров системы, кроме отстройки стартовой концентрации дефектов от критического значения. Для сравнения: в случае самоорганизованной критичности интеграл (24) сходится и, как непосредственно следует из формулы (9),

$$\langle x \rangle = \frac{1 - P}{1 - nP} = \frac{n^\alpha - 1}{n^\alpha - n},$$

то есть здесь средний размер переключения зависит от величины показателя α .

Кроме суперуниверсального показателя в зависимости (26) иерархическая модель дефектообразования имеет еще один суперуниверсальный показатель. Наряду с переключениями, инициируемыми изменением состояния одного элемента нижнего уровня при фиксированной концентрации дефектов на нем, можно рассматривать процесс ее последовательного нарастания от 0 до 1, связанный с постепенным накоплением дефектов.

В этом случае вне зависимости как от величин n и s_k , так и от порядка, в котором вносятся дефекты, распределение переключений по размеру характеризуется показателем $\alpha = 1$. В самом деле, поскольку каждый из элементов системы должен рано или поздно сменить свое состояние с исправного на дефектное, каждое n -е изменение состояния элемента, происшедшее на некотором уровне иерархии, будет передаваться на следующий ее уровень, а остальные – завершаться на этом уровне. Тем самым, доля событий магнитуды m в точности равна $(n - 1)/n^{m+1}$, что, в силу формулы (9), и обеспечивает указанное значение показателя.

Выводы

Размер переключения, вызванного изменением состояния единичного элемента на нижнем уровне иерархической системы, распределен степенным образом.

Для самоорганизованной критичности показатель распределения всегда больше единицы (аварии). Наибольшее его значение, достигаемое для систем, состоящих из рацемической смеси крайних пессимистов и оптимистов, неограниченно возрастает по мере увеличения n . Поскольку самоорганизованная критичность соответствует устойчивой неподвижной точке отображения, описывающего изменение концентрации дефектов при подъеме по уровням, ее конкретное значение на нижнем уровне несущественно.

Для обычной критичности показатель распределения всегда меньше единицы (катастрофы). Наименьшее его значение, достигаемое для систем, полностью состоящих из идеальных демократов (в случае нечетных n) или из одного типа недодемократов (в случае четных n), стремится к $1/2$ сверху по мере увеличения n . Поскольку обычная критичность соответствует неустойчивой неподвижной точке отображения,

описывающего изменение концентрации дефектов при подъеме по уровням, ее значение на нижнем уровне должно совпадать с критическим. При отстройке стартовой концентрации дефектов от критической область степенного вида распределения переключений ограничена значением, которое убывает как степень отстройки. А средний размер переключения оказывается обратно пропорциональным отстройке вне зависимости от параметров системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00786-а и 11-01-00887-а).

Библиографический список

1. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
2. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
3. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
4. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63, № 16. P. 1659.
5. *Paczuski M, Maslov S., Bak P.* Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 1. P. 414.
6. *Подлазов А.В., Осокин А.Р.* Самоорганизованная критичность эруптивных процессов в солнечной плазме// Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 2. С. 118.
7. *Подлазов А.В.* Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности// Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей/ Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Эдиториал УРСС, 2005. С. 404.
8. *Наркунская Г.С., Шнирман М.Г.* Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность// Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989; Выч. сейсмология: Вып. 22. С. 56.
9. *Narkunskaya G.S., Shnirman M.G.* Hierarchical model of defect development and seismicity// Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Vol. 61. P. 29.
10. *Shnirman M.G., Blanter E.M.* Mixed hierarchical model of seismicity: Scaling and prediction// Phys. Earth Planet. Inter. 1999. Vol. 111. P. 295.
11. *Blanter E.M., Shnirman M.G.* Self-organized in a hierarchical model of defects development// Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 4. P. 3408.
12. *Blanter E.M., Shnirman M.G.* Simple hierarchical systems: Stability, self-organized criticality, and catastrophic behavior // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 6. P. 6397.
13. *Shnirman M.G., Blanter E.M.* Scale invariance and invariant scaling in a mixed hierarchical system// Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 5. P. 5111.
14. *Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л. и др.* Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000. 432 с.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Поступила в редакцию 24.10.2011

STUDIES OF SCALE INVARIANT CHANGE-OVER DYNAMICS IN THE HIERARCHICAL MODEL OF DEFECTS DEVELOPMENT

A.V. Podlazov

Hierarchical model of defect development makes possible the consideration of both ordinary and self-organized criticality from the common viewpoint. Scale invariant critical state in this model is presented by fixed points of a renormalization transformation, connected with lifting to the next level of hierarchy. So stable fixed points of the transformation correspond to the self-organized criticality and unstable points correspond to the ordinary one.

We supplement the renormalizational approach to the critical state with the dynamical one, which is more usual to the theory of self-organized criticality. We show that individual disturbances at the lowest level of hierarchical system result in the power-law distributed response. We investigate the dependence of distribution indices on the model parameters.

Keywords: Self-organized criticality, scale invariance, renormalization, power laws.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В.А. Владимировым, Ю.Л. Воробьевым, Г.Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г.Г. Малинецким и А.Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.

125047 Москва, Миусская пл., 4
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: Tiger@Keldysh.ru