

БИФУРКАЦИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. Н. Говорухин

Представлены результаты численного исследования бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции. Для аппроксимации уравнений в частных производных используется метод Галеркина. В силу косимметрии в системе существуют кривые равновесий со скрытым параметром. Описан алгоритм вычисления таких кривых, который позволяет анализировать системы с неизолированными решениями. Обнаружены следующие бифуркации кривых равновесий: возникновение семейства равновесий на уже существующем семействе, дробление семейства равновесий, возникновение семейства равновесий «из воздуха», пересечение семейств равновесий и существование сложных равновесных множеств.

Ключевые слова: Фильтрационная конвекция, косимметрия, семейства равновесий, бифуркации.

Введение

Понятие косимметрии, введенное и изученное в ряде работ [1–3], позволило выделить класс динамических систем математической физики, обладающих скрытой недоопределенностью и демонстрирующих необычные бифуркационные явления. В частности, нетривиальная косимметрия находит свое выражение в существовании непрерывных однопараметрических семейств равновесий (стационарных режимов). Характерным свойством этих семейств является изменчивость спектра устойчивости, а это говорит о том, что они не могут быть следствием действия никакой непрерывной группы симметрии [2]. Такие семейства могут содержать устойчивые и неустойчивые участки. Теория бифуркаций равновесий динамических систем с косимметрией при монотонной потере устойчивости изложена в [4].

Первый пример системы с нетривиальной косимметрией дает задача о плоской фильтрационной конвекции в односвязной области. Для нее сначала формально [5], а затем строго [1] было установлено, что в результате первого бифуркационного перехода всегда возникает цикл устойчивых стационарных конвективных режимов

(равновесий). Каждому члену семейства соответствует свое уникальное поле скорости и распределение температур. Возникает вопрос о том, каковы дальнейшие переходы и бифуркации при увеличении интенсивности подогрева, что поддается только численному исследованию. В [6–8] с применением метода Галеркина проведен анализ возникновения неустойчивости на семействе стационарных режимов и исследованы изменения стационарных конвективных режимов при росте числа Рэлея. Полученные результаты воспроизводятся и с применением метода конечных разностей при аппроксимации исходной задачи [9, 10]. В [11] описаны возможные сценарии возникновения периодических, квазипериодических и хаотических движений.

Наличие у систем дифференциальных уравнений косимметрии приводит к существованию кривой равновесий с неявно заданным параметром и сильному вырождению задач поиска и анализа равновесий (решений систем нелинейных алгебраических уравнений), что требует новых численных подходов, основанных на теории косимметрии. В этой статье описан алгоритм, позволяющий анализировать равновесия систем с косимметриями, симметриями и вообще в ситуациях, когда стационарные режимы неизолированы. Метод основан на косимметричной версии теоремы о неявной функции [3], первоначальный вариант приведен в [12]. В данной работе изложены результаты, касающиеся бифуркаций однопараметрических семейств равновесий в задаче фильтрационной конвекции. Необходимость анализа этих бифуркаций обусловлена тем, что в их результате могут рождаться качественно новые режимы, меняться устойчивость стационарных режимов, причем как теряться, так и приобретаться. Впервые бифуркации семейств в реальных косимметричных динамических системах представлены в [13], а в [10, 12] описана бифуркация пересечения различных семейств стационарных режимов в задаче фильтрационной конвекции.

1. Математическая формулировка задачи и схема численного исследования

Рассматривается плоский прямоугольный контейнер D с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b , заполненный пористой средой и насыщенный жидкостью. Уравнения гравитационной конвекции в подогреваемой снизу жидкости, находящейся в контейнере, согласно [1, 5] имеют вид

$$\Delta\psi = \theta_x, \quad \theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x. \quad (1)$$

Здесь $\psi(x, y, t)$ – функция тока, $\theta(x, y, t)$ – отклонение температуры от равновесного линейного по вертикали профиля, (x, y) – декартовы координаты на плоскости, t – время. Параметр λ – фильтрационное число Рэлея.

На границе прямоугольника заданы краевые условия первого рода

$$\begin{aligned} \psi(t, 0, y) = \psi(t, a, y) = \psi(t, x, 0) = \psi(t, x, b) = 0, \\ \theta(t, 0, y) = \theta(t, a, y) = \theta(t, x, 0) = \theta(t, x, b) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное условие для системы (1)–(2) имеет вид

$$\theta(x, y, t = 0) = \theta_0(x, y), \quad (3)$$

где $\theta_0(x, y)$ заданная функция. Для каждого фиксированного t из первого уравнения (1) можно выразить ψ через θ , решая краевую задачу Дирихле для уравнения

Пуассона. В итоге получаем

$$\psi = G\theta_x, \quad (4)$$

где G – соответствующий оператор Грина.

Задача (1)–(2) обладает косимметрией [1], которая определяется правой частью равенства (4). Известно, что рассматриваемая система уравнений глобально разрешима и диссипативна. При малых значениях параметра λ глобально устойчиво состояние покоя. Устойчивость состояния покоя исследовалась в работах [5] и [2], где даны выражения собственных чисел $\lambda_{mn} = 4\pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$ и собственных функций соответствующей спектральной задачи. В [2] показано, что первое критическое значение λ_{11} всегда двукратно, и при $\lambda = \lambda_{11}$ от состояния покоя ответвляется цикл устойчивых стационарных режимов, который имеет форму эллипса. Каждому переходу λ через последующие критические значения λ_{mn} соответствует бифуркация рождения цикла неустойчивых равновесий.

Отметим, что задача (1)–(2) в прямоугольной области D имеет две дискретные симметрии, в силу инвариантности относительно следующих замен:

$$x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow \theta, \quad (5)$$

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad \psi \rightarrow -\psi, \quad \theta \rightarrow -\theta. \quad (6)$$

Решение задачи (1)–(2) будем разыскивать в виде отрезка ряда

$$\psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad \theta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad (7)$$

где $\varphi_{ij} = 2/\sqrt{ab} \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b)$. Приближенное решение вида (7) удовлетворяет граничным условиям (2). Каждая функция $\varphi_{ij}(x, y)$ является собственной функцией оператора Лапласа, то есть $\Delta \varphi_{ij}(x, y) = \sigma_{ij} \varphi_{ij}(x, y)$, где σ_{ij} соответствующее собственное значение. После подстановки (7) в (1) и операций проектирования приходим к системе $N = n^2$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций θ_{ij}

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \psi_{kl} \theta_{pq} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial y}, \varphi_{ij} \right) = \\ = -\sigma_{ij} \theta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \psi_{kl} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты ψ_{ij} однозначно выражаются через неизвестные θ_{ij} из аппроксимации первого уравнения системы (1) следующим образом:

$$\psi_{ij} = -\frac{1}{\sigma_{ij}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \theta_{kl} \left(\frac{\partial \varphi_{kl}}{\partial x}, \varphi_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

В (8) и (9) круглыми скобками обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве. Система (8) сохраняет свойство косимметричности, а косимметрия определяется правой частью (9).

Бифуркационные значения λ для систем Галеркина различного порядка
в случае прямоугольника со сторонами $a = 20$ и $b = 50$ *

<i>Dim.</i>	λ_{11}	λ_{12}	λ_n	λ_{13}	λ_u	λ_a	λ_{14}
$N = 36$	0.1151	0.1626	–	0.2417	0.2404	–	0.3526
$N = 49$	0.1147	0.1623	0.1893	0.2416	0.2257	0.2639	0.3526
$N = 64$	0.1147	0.1622	0.1912	0.2412	0.2451	0.2845	0.3519
$N = 81$	0.1146	0.1621	0.1915	0.2412	0.2494	0.2756	0.3519
Точное	0.1145	0.1619	–	0.2408	–	–	0.3516

* Символом λ_n обозначено значение, соответствующее возникновению семейства равновесий на уже существующем неустойчивом семействе. λ_u соответствует появлению неустойчивости на устойчивом семействе, а λ_a – возникновению автоколебаний.

При численном исследовании уравнений в частных производных актуален вопрос точности и адекватности полученных результатов. Зачастую возникают режимы, которые являются следствием дискретизации и не присущи исходным уравнениям. Эффективным способом проверки является сохранение характеристик при росте порядка аппроксимации. Еще большую убедительность вычисления имеют при их идентичности для принципиально различных аппроксимаций. При численном анализе в [6, 7], рассматривались галеркинские системы размерностей $N = 36, 49, 64, 81$. Качественно результаты этих работ воспроизводятся для больших ($N \geq 1024$) галеркинских систем [8, 11], а некоторые вычисления были повторены с использованием аппроксимации конечными разностями [9]. Другим критерием точности аппроксимации может служить сравнение приближенно вычисленных и известных точных значений (см. таблицу). Ниже представлены результаты анализа для систем при $49 \leq N \leq 81$.

В данной статье основное внимание уделено бифуркациям однопараметрических семейств стационарных режимов, которые имеют место при росте фильтрационного числа Рэлея λ . Для вычисления и анализа однопараметрических семейств равновесий применяется метод, описанный в следующем разделе.

2. Расчет однопараметрического семейства равновесий косимметричных систем

К построению непрерывного и дифференцируемого однопараметрического множества решений сводятся задачи исследования поведения систем при изменении параметра. При их анализе естественно применение метода продолжения решения по параметру, возможность которого устанавливается теоремами о неявной функции. Такой подход применяется для анализа систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений с явно указанными параметрами (см., например, [14, 15]). Оптимальным направлением продолжения кривой решений является касательное к нему [16], а процесс продолжения ветви решений может быть рассмотрен как решение задачи Коши специального вида [17, 18]. Для косимметричных систем известные методы отказывают, и необходимы новые подходы, основанные на теории косимметрии.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в R^n

$$y' = f(y). \quad (10)$$

Пусть (10) обладает косимметрией, которая задается оператором L . Это означает, что для $\forall y \in R^n$ $(f(y), Ly) = 0$. В [1, 3] доказана косимметричная версия теоремы о неявной функции, которая устанавливает возможность построения непрерывного и дифференцируемого однопараметрического множества решений в случае скрытой недоопределенности. Согласно теореме, если y_0 – решение уравнения $f(y_0) = 0$ и число 0 является простым собственным значением оператора $f_y(y_0)$, то уравнение $f(y) = 0$ имеет однопараметрическое семейство решений

$$y(\alpha) = y_0 + \alpha\phi_0 + \alpha^2\nu_\alpha \quad (11)$$

для достаточно малого $\forall \alpha \in R$. Здесь ϕ_0 – базисный вектор в ядре $f_y(y_0)$. При этом ν_α аналитически зависит от α и однозначно задается условием $(\nu_\alpha, Ly_0) = 0$.

Выражение (11) определяет ветвь равновесий системы (10) с параметром α и касательным вектором ϕ_0 . Продолжение ветви решений в случае косимметрии может быть рассмотрено как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = \phi(\alpha), \quad y(0) = y_0. \quad (12)$$

Здесь $\phi(\alpha)$ – вектор из ядра оператора $f_y(y(\alpha))$, а переменная α задает параметризацию кривой решений. Отметим, что в случае (10) ядро оператора $f_y(y(\alpha))$ одномерно во всех, за исключением возможно конечного числа, точках.

Метод вычисления кривых равновесий косимметричных систем дифференциальных уравнений можно представить в виде алгоритма.

1. Поиск одной из точек семейства y_0 . Для устойчивых точек может использоваться решение задачи Коши на установление, а для неустойчивых – модифицированный, с учетом вырожденности оператора $f_y(y_0)$ в окрестности решения, метод Ньютона.

2. Вычисление ядра матрицы Якоби в точке y_0 методом сингулярного разложения (SVD), проверка его однократности (в противном случае продолжение невозможно) и выбор направления продолжения кривой (вектор ϕ_0).

3. Решение на шаг h задачи Коши (12). Для вычисления $\phi(\alpha)$ на n -м шаге ϕ_n используется решение модифицированной системы линейных уравнений, а в случае плохой обусловленности матрицы используется метод SVD. Модифицированная система уравнений получается заменой линейно-зависимой строки в уравнении $f_y(y_n)\phi_n = 0$ условием $(\phi_n, \phi_{n-1}) = 1$, где ϕ_{n-1} – вектор, полученный на предыдущем шаге. Такая модификация позволяет избавиться от вырожденности системы и сохранять направление продолжения кривой. Для решения задачи (12) может использоваться любой численный метод интегрирования.

4. Уточнение (при необходимости) y_n . Для y_n проводится анализ устойчивости и бифуркаций. Вычисляются собственные числа матрицы Якоби HQR-алгоритмом. Для определения бифуркации ответвления периодического режима от равновесия семейства используются результаты статьи [19], а для анализа бифуркаций, сопровождающих монотонную потерю устойчивости на семействе, – результаты работы [4].

5. Проверка критерия выхода (найдена точка ветвления, замкнутость кривой и др.). В случае, когда критерии выхода не выполняются, переход к следующему шагу продолжения кривой равновесий по скрытому параметру.

Предложенный метод продолжения ветви решений системы алгебраических уравнений может быть применен и к системам, не обладающим симметриями и косимметриями. Пусть требуется продолжить по параметру $\lambda \in R$ ветвь решений системы $f(y, \lambda) = 0, y \in R^n$. Система может быть расширена нулевой строкой. Полученная система в $(n + 1)$ -мерном пространстве относительно неизвестных y и λ будет обладать косимметрией, и для нее применим изложенный выше метод.

3. Бифуркации семейств равновесий

Целью этого исследования не является детальное изучение бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов в задаче (1)–(2) для различных размеров контейнера, а демонстрация возможных явлений. В работе рассмотрены случаи прямоугольника со стороной $a = 20$ и значениями $b = 8$ и $b = 50$. Описанные ниже бифуркации являются типичными и наблюдаются при различных значениях физических параметров. В рассматриваемой задаче фильтрационной конвекции реализуется большинство возможных бифуркаций, связанных с семействами равновесий.

Все семейства являются замкнутыми кривыми, на каждой из них удобно ввести параметризацию $\alpha \in [0, 1]$, которая будет использоваться для задания континуального «номера» равновесия. Для графического представления численных результатов используются значения вертикального потока тепла $Nu_v = \int_0^a \frac{\partial \theta}{\partial y} |_{y=0} dx$ через нижнюю границу и величина $Nu_h = \int_0^b \frac{\partial \theta}{\partial x} |_{x=a/2} dy$.

Рождение и развитие семейств равновесий. Аппроксимация (8) уравнений (1) сохраняет бифуркации рождения однопараметрических семейств из нулевого равновесия. При $\lambda = \lambda_{11}$ рождается устойчивое однопараметрическое семейство равновесий. Устойчивость здесь понимается как нейтральная вдоль семейства и асимптотическая устойчивость в трансверсальных к нему направлениях. При увеличении бифуркационного параметра кривые равновесий деформируются, а спектр вдоль семейства изменяется. Примеры приведены на рис. 1 и рис. 2. В результате мо-

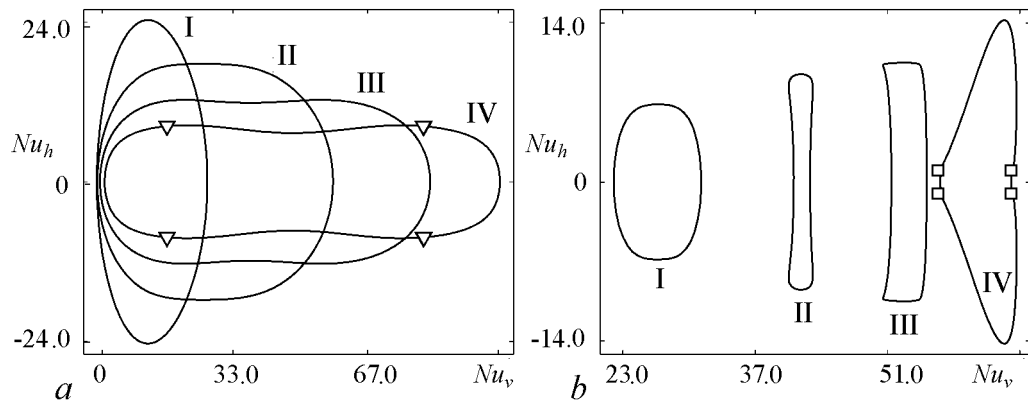


Рис. 1. Развитие устойчивых семейств до возникновения на них неустойчивости. *a* – для $a = 20$, $b = 50$ и различных значений параметра λ : I – 0.144; II – 0.176; III – 0.206; IV – 0.249 (треугольниками помечены точки возникновения колебательной неустойчивости на семействе). *b* – для $a = 20$, $b = 8$ и различных значений параметра λ : I – 1.708; II – 2.701; III – 3.694; IV – 4.687 (квадратами помечены точки возникновения монотонной неустойчивости на семействе)

гут возникать равновесия, у которых появляются дополнительные нейтральные собственные значения, отличные от всегда существующего однократного нулевого (см. рис. 1). Возникновение пары чисто мнимых собственных значений при некоторых значениях параметров сопровождается рождением или гибелью автоколебательных режимов [11, 19]. При возникновении дополнительных нулевых собственных чисел могут иметь место бифуркации семейств равновесий [4].

При переходе λ через последующие значения λ_{mn} возникают семейства неустойчивых режимов. Все семейства при малых надкритичностях имеют форму эллипса, спектр устойчивости равновесий изменяется вдоль кривых и стремится к спектру нулевого равновесия при $\lambda \rightarrow \lambda_{mn}$. При росте параметра их форма может сильно изменяться, что демонстрирует рис. 3.

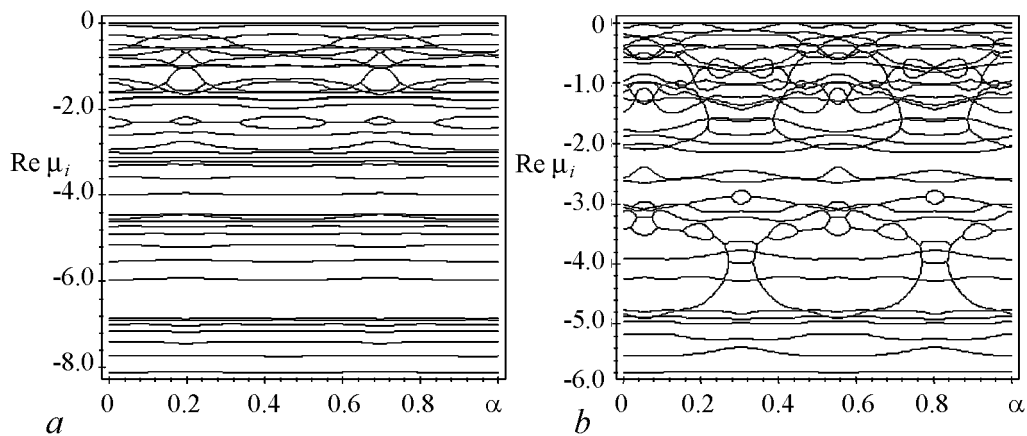


Рис. 2. График зависимости действительной части собственных чисел устойчивости μ_i от параметра $\alpha \in [0, 1]$ на семействе для $a = 20$, $b = 50$, $N = 49$: $a - \lambda = 0.2$; $b - \lambda = 0.23$

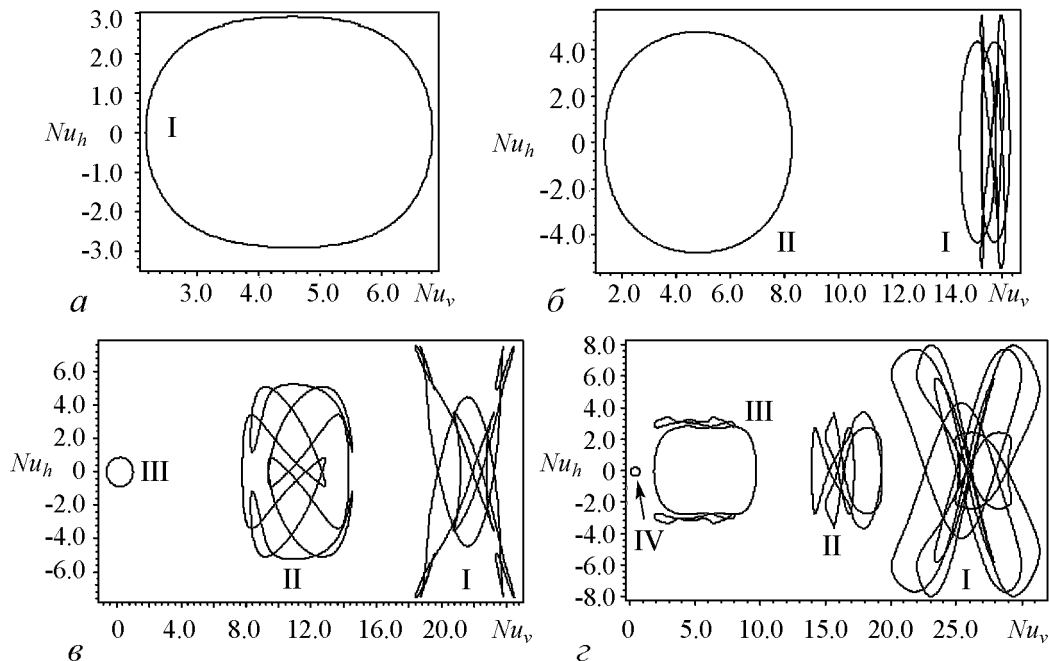


Рис. 3. Возникновение и развитие неустойчивых семейств при $a = 20$, $b = 8$. Семейства помечены символами I (рождается при переходе λ через $\lambda_{2,1} \approx 1.01$), II ($\lambda_{3,1} \approx 1.5$), III ($\lambda_{4,1} \approx 2.2$), IV ($\lambda_{1,2} \approx 2.57$). Проекция даны при следующих значениях параметра λ : $a - 1.2$; $b - 1.8$; $v - 2.224$; $z - 2.6$

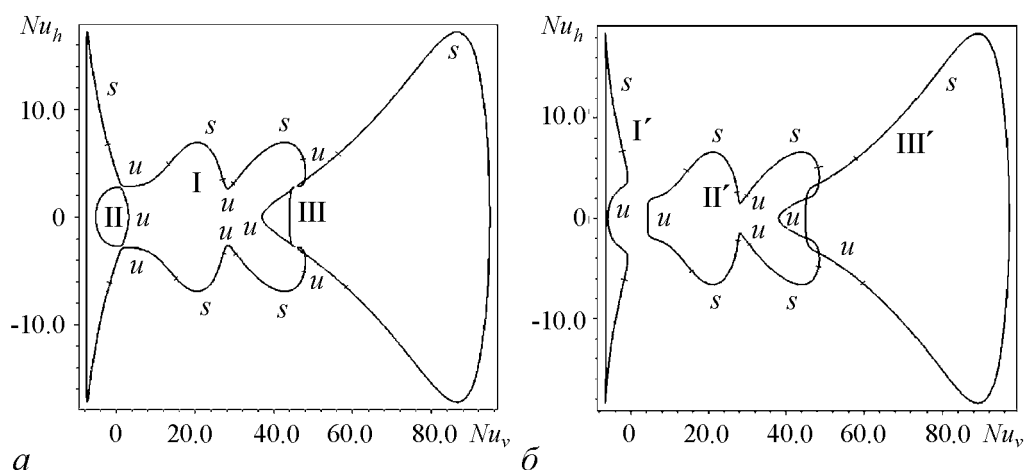


Рис. 4. *a* – три кривые равновесий при $\lambda = 0.255$ до бифуркации пересечения семейств. Семейство I состоит из шести устойчивых и шести неустойчивых дуг. Семейства II и III полностью неустойчивы. *б* – три кривые равновесий при $\lambda = 0.26$ после бифуркации пересечения семейств. Семейство II состоит из четырех устойчивых и четырех неустойчивых дуг. Семейства I и III состоят из устойчивой и неустойчивой дуг равновесий. Устойчивые дуги обозначены буквой *s*, а неустойчивые – буквой *u*

Возникновение семейства равновесий «из воздуха». Следующей бифуркацией, происходящей в случае $a = 20, b = 50$, является бифуркация рождения семейств равновесий «из воздуха». При $\lambda = \lambda_p \approx 0.245$ на инвариантном подпространстве возникает два изолированных некосимметричных равновесия. Оба равновесия неустойчивы и имеют одно положительное и двукратное нулевое собственные значения. Когда $\lambda > \lambda_p$ эти равновесия исчезают, а вместо них возникает два семейства равновесий. Оба этих семейства полностью неустойчивы и у части точек каждого семейства в спектре устойчивости есть одно, а у части – два положительных собственных значения. Кроме того, существует две точки, которые имеют дополнительное нулевое собственное значение. При росте λ размеры этих семейств увеличиваются. На рис. 4, *a* изображены два (II и III) цикла равновесий, которые возникли в результате описанной бифуркации.

Пересечение семейств равновесий. Эта бифуркация происходит при $a = 20, b = 50$. К ее моменту на первичном семействе существует шесть устойчивых и шесть неустойчивых дуг. Кроме того, при этом значении параметра существует два цикла неустойчивых равновесий, которые возникли ранее «из воздуха» (см. рис. 4, *a*). При увеличении λ существует значение параметра $\lambda = \lambda_d$, при котором семейство I пересекается с каждым из семейств II и III в двух точках. Этими точками пересечения являются те, у которых в спектре имеется двукратное нулевое собственное значение. С одной стороны, это точки семейств II и III, разделяющие дуги с различным характером неустойчивости, а с другой стороны, при этом значении параметра на неустойчивых дугах семейства I появляются четыре точки с двукратным нулевым собственным числом. При $\lambda > \lambda_d$ семейства перезамыкаются, и возникают три иных кривых с устойчивыми и неустойчивыми дугами (рис. 4, *б*).

Возникновение семейства на другом семействе. Для значений $a = 20, b = 50$ при $\lambda = \lambda_{12}$ возникает полностью неустойчивое семейство равновесий. При увеличении λ спектр устойчивости его равновесий изменяется и, когда $\lambda = \lambda_n$, на семействе

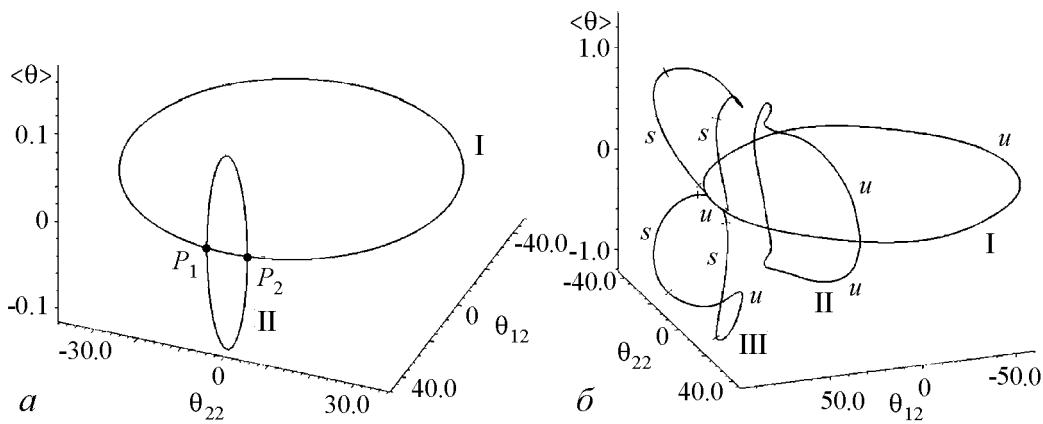


Рис. 5. *a* – бифуркация рождения семейства равновесий на другом семействе в системе 49 порядка при $a = 20, b = 50, \lambda = 0.19$: I – исходное семейство равновесий, II – семейство, которое возникло на I при $\lambda = \lambda_n$. Кривые I и II пересекаются в точках P_1 и P_2 . *б* – сложное множество равновесий в системе 49 порядка при $a = 20, b = 50, \lambda = 0.265$: семейство состоит из кривых I, II и III; каждое из семейств II и III пересекается с семейством I в двух точках; устойчивые дуги обозначены буквой *s*, а неустойчивые – буквой *u*

возникает равновесие (обозначим его P) имеющее одно положительное и двукратное нулевое собственные значения. Точка P принадлежит двум инвариантным подпространствам, которые являются следствием существования в системе двух дискретных симметрий (5) и (6). При $\lambda > \lambda_n$ из точки P возникает новое однопараметрическое семейство равновесий, пересекающееся с исходным в двух точках P_1 и P_2 . Бифуркация наблюдается в системах всех рассматриваемых размерностей (см. таблицу). Подобные бифуркации происходят и в других ситуациях. Структура сложного семейства равновесий не разрушается при изменении бифуркационного параметра, причиной чего, видимо, являются дискретные симметрии системы. На рис. 5 даны примеры «сцепленных» семейств равновесий.

Дробление/слияние семейств равновесий. Эта бифуркация наблюдалась в случае $a = 20, b = 8$ со вторым неустойчивым семейством равновесий (помечено символом II на рис. 3). Как видно на рис. 6, *a* при $\lambda = 3.172$ семейство имеет сложную форму, все равновесия при этом неустойчивы и имеют различное число

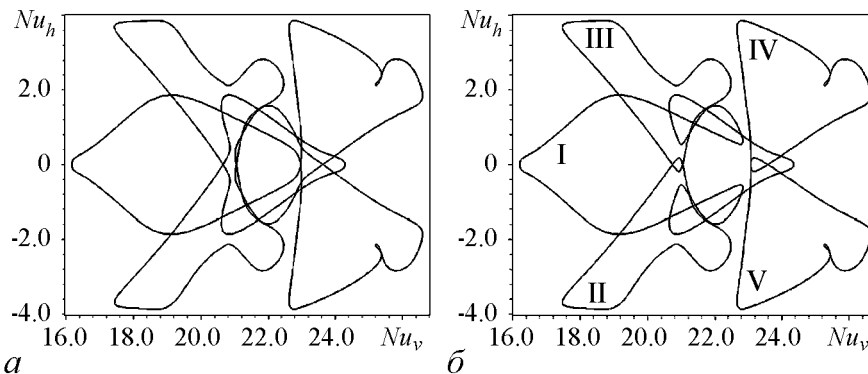


Рис. 6. *a* – неустойчивое семейство стационарных режимов в случае широкого прямоугольника при $a = 20, b = 8, \lambda = 3.172$. *б* – пять неустойчивых семейств стационарных режимов в случае широкого прямоугольника при $a = 20, b = 8, \lambda = 3.173$. Семейства помечены символами I–V

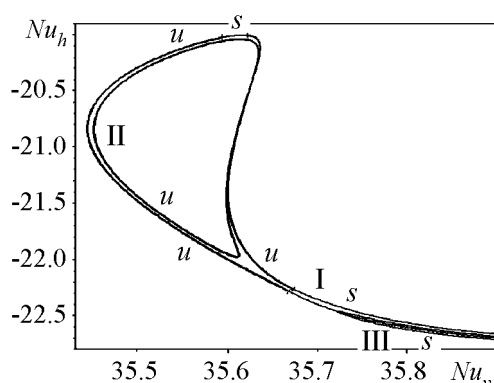


Рис. 7. Бифуркация отрыва семейства равновесий при $a = 20, b = 18$. I – дуга семейства равновесий при $\lambda = 0.851$, имеет устойчивые и неустойчивые равновесия. II – оторвавшееся семейство равновесий. III – устойчивая дуга семейства при $\lambda = 0.852$.

положительных собственных значений. При увеличении бифуркационного параметра на семействе возникают четыре точки с кратным нулевым собственным значением, и затем имеет место бифуркация распада этого семейства на пять новых неустойчивых семейств. Результаты вычислений для послепобифуркационного значения $\lambda = 3.173$ представлены на рис. 6, б. Отметим, что рассмотренная бифуркация может происходить и в обратную сторону, то есть при росте λ различные семейства могут сливаться в одно. Другой пример подобной бифуркации дан на рис. 7, где изображен отрыв семейства равновесий.

Заключение

Обнаружены и исследованы бифуркации семейств равновесий в ряде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих косимметрией. Все эти системы являются аппроксимациями задачи плоской конвекции Дарси в прямоугольном контейнере с применением метода Галеркина. Погрешность аппроксимации бифуркационных значений параметра не превышает 5% (см. таблицу), что дает основание говорить об адекватном приближении исходной задачи конечномерными системами в рассматриваемой области изменения λ . Были найдены практически все возможные бифуркации кривых равновесий в системах с косимметрией: рождение нового семейства из уже существующего, пересечение и объединение равновесных кривых, возникновение цикла равновесий «из воздуха». В результате бифуркаций на неустойчивых семействах могут возникать устойчивые дуги. В частности, при развитии сложного семейства (см. рис. 6, б) равновесий в системе 49 порядка на семействе I становится устойчивой дуга между точками пересечения с семейством III. Существенным в рассматриваемой задаче, видимо, оказалось влияние дискретных симметрий, которые, по всей видимости, явились причиной грубости сложных равновесных множеств, состоящих из нескольких сцепленных кривых. Подобные бифуркации могут происходить и при различных размерах контейнера в задаче фильтрационной конвекции, а также и в других косимметричных динамических системах.

В статье описан метод вычисления семейств равновесий в косимметричных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на косимметричной версии теоремы о неявной функции. Этот метод может быть без существенных изменений применен для исследования систем с симметриями и для продолжения по параметру ветвей равновесий систем ОДУ общего вида.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 11-01-00708.

Библиографический список

1. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142.
2. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5, № 2. P. 402.
3. Юдович В.И. Теорема о неявной функции для косимметричных уравнений // Математические заметки. 1996. Т. 60, № 2. С. 313.
4. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. Vol. 10, № 2. P. 311.
5. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131.
6. Говорухин В.Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // ДАН. 1998. Т. 363, № 6. С. 752.
7. Говорухин В.Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53.
8. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 115.
9. Karasözen B., Tsybulin V. Finite difference approximations and cosymmetry conservation in filtration-convection problem // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 262, № 4–5. P. 321.
10. Karasözen B., Tsybulin V. Cosymmetric families of steady states in Darcy convection and their collision // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 323, № 1–2. P. 67.
11. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Сценарии возникновения нестационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 125.
12. Govorukhin V. Calculation of one-parameter families of stationary regimes in a cosymmetric case and analysis of plane filtrational convection problem // Continuation methods in fluid dynamics. Notes Numer. Fluid Mech. 74. Braunschweig: Vieweg, 2000. P. 133.
13. Govorukhin V. Computer experiments with cosymmetric models // Z. Angew. Math. Mech. 1996. Vol. 76. P. 559.
14. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Reprint of the 1979 original. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
15. Kuznetsov Y.A. Elements of applied bifurcation theory. 3rd ed. New York: Springer, 2004.
16. Кузнецов Е., Шалашилин В. Наилучший параметр продолжения решения // Доклады академии наук. 1994. Т. 334, № 5. С. 566.

17. Рикс Е. Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости // Прикл. механ. 1972. № 4. С. 204.
18. Ворович И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // Прикл. матем. и механ. 1965. Т. 29, № 5. С. 894.
19. Kurakin L., Yudovich V. Bifurcation of the branching of a cycle in n -parameter family of dynamic systems with cosymmetry // Chaos. 1997. Vol. 7, № 3. P. 376.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, *Поступила в редакцию 2.02.2012*

BIFURCATIONS OF ONE-PARAMETER FAMILIES OF STEADY STATE REGIMES IN MODEL OF A FILTRATIONAL CONVECTION

V.N. Govorukhin

Results of numerical investigation of bifurcations of one-parameter families of steady state regimes in a planar filtrational convection problem are presented. Galerkin's method is applied for approximation of partial differential equations. As a result of the cosymmetry existence there are curves of equilibria with the hidden parameter. The algorithm of calculation of such curves is described. This algorithm can be applied to analyze systems with nonisolated sets of equilibria. The following bifurcations of equilibria curves are found: emergence of family of equilibriums on already existing family, subdivision of family of equilibria, emergence of family of equilibria «from air», crossing of families of equilibriums and existence of the composite equilibria sets.

Keywords: Filtrational convection, cosymmetry, families of equilibria, bifurcations.



Говорухин Василий Николаевич – родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил Ростовский государственный университет (1984). После окончания работает в РГУ (ныне Южный федеральный университет). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (РГУ, 1999) в области динамики жидкости, применения вычислительных методов и компьютерного эксперимента в различных областях науки. Опубликовал более 30 научных статей по направлениям, указанным выше.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Южный федеральный университет
E-mail: vgov@math.sfedu.ru