



ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В МНОГОМЕРНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ МНОГОМОДОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ВБЛИЗИ ВОЛНОВОЙ БИФУРКАЦИИ

М.Ю. Борина, А.А. Полежаев

Проведено исследование системы амплитудных уравнений, описывающих взаимодействие в ограниченной области нескольких мод, ставших неустойчивыми вследствие волновой бифуркации. Показано, что в результате конкуренции мод в зависимости от величины параметра, определяющего силу взаимодействия, возможны лишь два режима: или квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода), или стоячие волны (все моды отличны от нуля). Этот результат подтвержден численными экспериментами для модифицированной модели Гирера–Майнхардта, в которую включено ещё одно уравнение для второго, быстро диффундирующего ингибитора.

Ключевые слова: Активная среда, диффузионная неустойчивость, волновая бифуркация, амплитудные уравнения.

Введение

Пространственно-временная самоорганизация в активных средах давно является предметом экспериментальных и теоретических исследований [1–3]. К настоящему времени обнаружены не только диссипативные структуры или автоволны [4–7], но и такие новые типы структур, как антиспирали, волновые пакеты, штриховолны, сегментированные спирали, локализованные колеблющиеся пятна – осциллоны и др. [8–13]. Все это многообразие структур экспериментально наблюдалось, в частности, в реакции Белоусова–Жаботинского, протекающей в микроэмульсии [14].

Одной из первых гипотез о природе самоорганизации была идея, высказанная Тьюрингом в 1952 году в его работе «Химическая основа морфогенеза» [15]. Суть её в том, что ключевую роль здесь играет неустойчивость, обусловленная диффузией, разрушающая исходное однородное стационарное состояние.

Диффузионная неустойчивость вызывает переход системы из однородного стационарного состояния в новое, пространственно неоднородное, состояние. Если при

этом действительная часть пары комплексно-сопряженных собственных чисел характеристического уравнения линеаризованной модели становится положительной в ограниченном диапазоне волновых чисел, то имеет место волновая бифуркация.

Непосредственно вблизи волновой бифуркации, как правило, наблюдается два типа структур: бегущие и стоячие волны [16]. В этом случае эффективным методом изучения таких структур является построение и последующее исследование амплитудных уравнений. Однако проблема заключается в том, что в многомерном пространстве имеет место вырождение по направлениям, и вклад в формирование структуры может вносить много (в случае неограниченной области – бесконечно много) неустойчивых мод. Ситуацию можно упростить, рассмотрев дискретный набор мод, взаимодействующих между собой в ограниченной области и удовлетворяющих граничным условиям. Процедура построения амплитудных уравнений вблизи бифуркации на основе кинетических уравнений, например, системы уравнений типа «реакция–диффузия», хорошо известна (см., например, [17, 18]) и основана на разложении по малому параметру, являющемуся некоторой степенью бифуркационного параметра (в случае волновой бифуркации – это квадратный корень из бифуркационного параметра) и последующему применению условий разрешимости к уравнениям для старших порядков. В результате в уравнение для амплитуды A_k любой из мод войдут линейный и кубический члены по данной амплитуде, члены вида $A_k |A_j|^2$, описывающие взаимодействие данной моды с каждой из остальных, а также члены вида $A_{k1}^* A_j A_{j1}$, соответствующие так называемому четырехволновому взаимодействию. Здесь A_{k1} – амплитуда встречной волны, а A_j и A_{j1} – амплитуды любой другой пары волн, движущихся навстречу друг другу. Учет последних членов сильно усложняет ситуацию, делая практически невозможным аналитическое исследование. С другой стороны, при переходе к действительным уравнениям для модулей комплексных амплитуд у соответствующих членов появляются зависящие от времени множители с нулевым средним и случайной фазой. Можно предполагать, что они частично компенсируют друг друга, а также обращаются в ноль в результате усреднения на промежуточных временах. Исходя из этого, мы в дальнейшем пренебрежем этими членами, и тогда амплитудные уравнения приобретают вид

$$\partial_t \tilde{A}_k = \tilde{A}_k - (1 - \nu c_1) \tilde{A}_k \left| \tilde{A}_k \right|^2 - h(1 - \nu c_2) \tilde{A}_k \sum_{j=1, j \neq k}^N \left| \tilde{A}_j \right|^2, \quad k \in \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь \tilde{A}_k – комплексные амплитуды мод, соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам, ставших неустойчивыми в результате волновой бифуркации. Параметр h характеризует силу конкуренции между модами; параметры c_1 и c_2 определяют отношение мнимых и действительных частей коэффициентов перед соответствующими кубическими членами.

Основной целью данной работы является анализ многомодового взаимодействия вблизи волновой бифуркации, описываемого уравнениями (1). Будет показано, что в зависимости от параметра h в среде формируются либо стоячие, либо бегущие волны. В первом случае выживают все взаимодействующие моды, а во втором – остается только какая-то одна, при этом остальные обращаются в ноль. Структуры иного рода возникнуть не могут. Этот аналитический результат проиллюстрирован

на примере модели Гирера–Майнхарда, расширенной добавлением третьего уравнения, описывающего еще один быстро диффундирующий ингибитор. Будет проведен нелинейный анализ данной модели и выражен коэффициент h в уравнениях (1) через ее параметры. Тем самым будут обозначены в параметрическом пространстве области существования тех или иных структур. Будут представлены результаты систематического численного исследования модели для соответствующих наборов параметров, которые сопоставляются с теоретическими предсказаниями.

1. Анализ стационарных решений модели (1)

Представим комплексные амплитуды \tilde{A}_k в виде $\tilde{A}_k = A_k \exp^{i\varphi_k}$, где $A_k = |\tilde{A}_k|$. Подставив их в уравнения (1), получим для модулей амплитуд следующую систему уравнений:

$$\partial_t A_i = A_i - A_i^3 - A_i h \sum_{j=1, j \neq i}^N A_j^2, \quad i \in \overline{1, N}. \quad (2)$$

Эти уравнения включают единственный параметр h . Остальные параметры, присутствующие в уравнениях (1), входят в уравнения для фаз φ_k , которые здесь не приводятся. Найдем стационарные точки уравнений (2), которые являются решениями системы уравнений

$$A_i^{st} \left(1 - (A_i^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_j^{st})^2 \right) = 0, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Допустим, что каждое из них дается набором

$$\begin{cases} A_i^{st} \neq 0, & i \in \overline{1, p}, \\ A_i^{st} = 0, & i \in \overline{p+1, N}, \end{cases}$$

где p – некоторое целое число из интервала $\overline{1, N}$. Для двух последовательных отличных от нуля амплитуд A_{i-1}^{st} , A_i^{st} запишем

$$1 - (A_{i-1}^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i-1}^p (A_j^{st})^2 = 0, \quad 1 - (A_i^{st})^2 - h \sum_{j=1, j \neq i}^p (A_j^{st})^2 = 0, \quad i \in \overline{2, p}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим $A_{i-1}^{st} = A_i^{st}$. Таким образом, все амплитуды A_i^{st} , отличные от нуля для $i \in \overline{1, p}$, равны между собой. Используя этот факт, находим, что для всех $i \in \overline{1, p}$ справедливо $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (p-1)h}}$.

Итак, показано, что помимо тривиального решения, которое, очевидно, неустойчиво, все стационарные точки системы (2) с точностью до перестановки индексов имеют вид

$$A_i^{st} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + (p-1)h}}, & i \in \overline{1, p}, \\ 0, & i \in \overline{p+1, N}, \end{cases} \quad (3)$$

где p – некоторое целое число из интервала $\overline{1, N}$.

Исследуем теперь устойчивость стационарной точки (3). Линеаризуем уравнения (2) в её окрестности

$$\begin{cases} \delta \dot{A}_i = \frac{2}{1 + (p-1)h} (-\delta A_i - h \sum_{j=1, j \neq i}^p \delta A_j), & i \in \overline{1, p}, \\ \delta \dot{A}_i = \frac{1-h}{1 + (p-1)h} \delta A_i, & i \in \overline{p+1, N}. \end{cases} \quad (4)$$

Представив малые отклонения от стационарной точки δA_i и δA_j пропорциональными $\exp\left(\frac{\lambda t}{1 + (p-1)h}\right)$, подставим их в систему (4) и получим характеристическое уравнение, которое после некоторых преобразований удастся свести к виду

$$[\lambda + 2(1 + (p-1)h)][\lambda - 2(h-1)]^{p-1}[\lambda - (1-h)]^{N-p} = 0.$$

Таким образом, стационарная точка (3) имеет следующий набор собственных чисел:

$$\lambda_i = \begin{cases} -2(1 + (p-1)h), & i = 1, \\ 2(h-1), & i \in \overline{2, p}, \\ 1-h, & i \in \overline{p+1, N}. \end{cases} \quad (5)$$

Анализ собственных чисел (5) в зависимости от значения h дает следующий результат:

- если $h \in (1, \infty)$, то с точностью до перестановки индексов устойчиво решение $A_1^{st} = 1$, $A_i^{st} = 0$, $i \in \overline{2, N}$, соответствующее $p = 1$;
- если $h \in \left(-\frac{1}{N-1}, 1\right)$, то устойчиво решение $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (N-1)h}}$, $i \in \overline{1, N}$, соответствующее $p = N$;
- для $p \in \overline{2, N-1}$ устойчивых решений нет.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Из всего множества стационарных точек (3) системы (2), в зависимости от значения коэффициента h , устойчивыми могут быть только те точки, для которых либо $p = 1$, либо $p = N$. А именно, при $h \in (1, \infty)$ имеется N устойчивых решений таких, что одна из амплитуд равна единице, а остальные обращаются в ноль; при $h \in \left(-\frac{1}{N-1}, 1\right)$ существует единственное решение $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (N-1)h}}$, $i \in \overline{1, N}$.

Итак, в системе (1) вблизи волновой бифуркации в зависимости от силы связи конкурирующих мод h возможны лишь два режима – стоячие или квазиодномерные бегущие волны. Если параметр h достаточно велик ($h > 1$) одна из мод подавляет остальные и сформируется бегущая волна. В противном случае, когда h мал ($h \in (-\frac{1}{N-1}, 1)$), моды сосуществуют друг с другом, причем имеют одинаковые амплитуды, что соответствует стоячей волне. Промежуточные режимы в системе (1) вблизи волновой бифуркации невозможны.

2. Численные эксперименты

2.1. Математическая модель. Для проведения численных экспериментов выберем модель Гирера–Майнхардта [19], в которую добавим третье уравнение, соответствующее второму быстро диффундирующему ингибитору,

$$\begin{cases} \partial_t u = (\rho + \frac{u^2}{v} - \mu u - cu + dw)\Omega + D_1 \nabla^2 u, \\ \partial_t v = u^2 - v + D_2 \nabla^2 v, \\ \partial_t w = cu - dw + D_3 \nabla^2 w. \end{cases} \quad (6)$$

Это сделано по той причине, что в двухкомпонентной реакционно-диффузионной модели волновая бифуркация невозможна, в отличие от бифуркации Тьюринга [20]. Сам же выбор конкретной модели достаточно произволен и определяется только тем, чтобы она допускала волновую неустойчивость. Параметры, влияющие на структурообразование, в уравнениях (6) это – кинетические константы ρ , Ω , μ , c , d и коэффициенты диффузии D_1 , D_2 , D_3 . Стационарная точка имеет координаты $\left(u_0 = \frac{\rho + 1}{\mu}, v_0 = \left(\frac{\rho + 1}{\mu} \right)^2, w_0 = \frac{c(\rho + 1)}{d\mu} \right)$.

2.2. Параметрический анализ и результаты численных экспериментов.

Проводим линейный анализ модели (6) и, пользуясь условиями для волновой бифуркации, сформулированными в работе [20], определяем границу волновой неустойчивости на плоскости параметров (μ, Ω) при фиксированных остальных параметрах. Вблизи этой границы строим амплитудные уравнения (см. приложение), при этом в явном виде находим взаимосвязь коэффициента h в уравнениях (1) и параметров модели (6) и, таким образом, определяем области существования бегущих и стоячих волн.

Численное исследование системы (6) проводилось в области $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ методом переменных направлений [21]. В начальный момент времени система находится в однородном стационарном состоянии (u_0, v_0, w_0) , модулированном случайным пространственным шумом. Используются периодические граничные условия.

Было проведено систематическое численное исследование модели (6) для параметров, лежащих вблизи границы волновой неустойчивости. На рис. 1 приведена параметрическая плоскость (μ, Ω) модели (6), где показаны области бегущих и

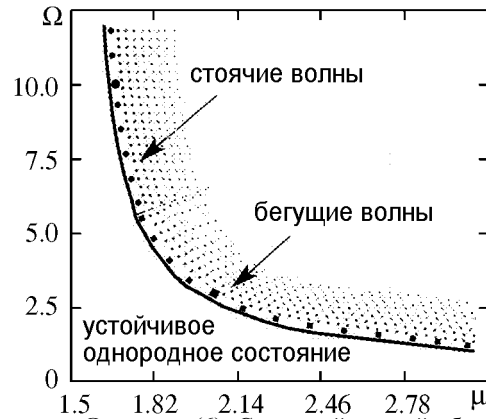


Рис. 1. Плоскость параметров μ , Ω модели (6). Сплошной линией обозначен порог волновой бифуркации. Указаны области, соответствующие стоячим и бегущим волнам, определенные из параметрического анализа. Здесь же приведены результаты численных экспериментов; кружками и квадратами обозначены реализации, соответственно, стоячих и бегущих волн; более крупные символы соответствуют комбинациям параметров для приведенных ниже примеров. Остальные параметры модели: $\rho = 0.23$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$

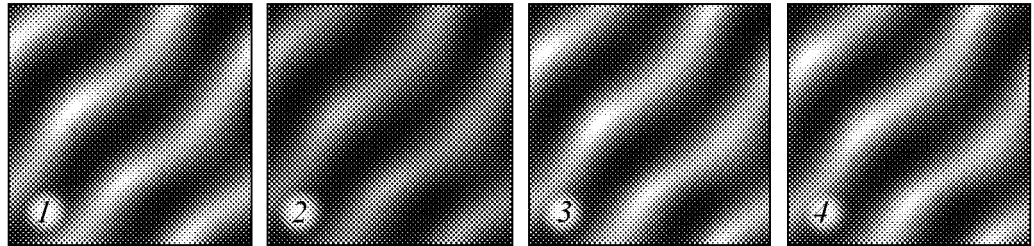


Рис. 2. Бегущие волны в модели (6) в моменты времени t : $1 - t_0$, $2 - t_0 + 10\Delta$, $3 - t_0 + 20\Delta$, $4 - t_0 + 30\Delta$, где $t_0 = 530$, $\Delta = 0.192$ – шаг интегрирования. Параметры модели: $\rho = 0.23$, $\mu = 2$, $\Omega = 3$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$. Размер области 150×150

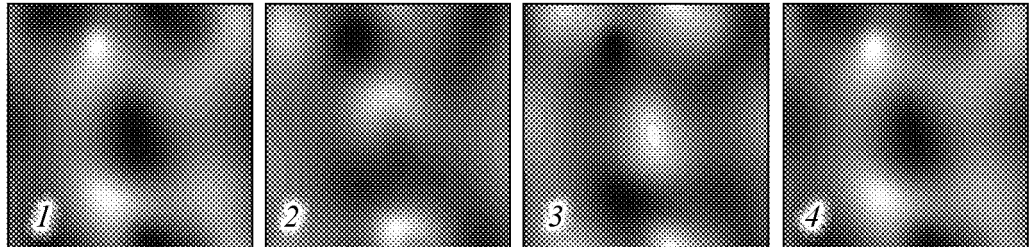


Рис. 3. Стоячие волны в модели (6) в моменты времени t : $1 - t_0$, $2 - t_0 + 12\Delta$, $3 - t_0 + 23\Delta$, $4 - t_0 + 46\Delta$, где $t_0 = 1755$, $\Delta = 0.032$ – шаг интегрирования. Параметры модели: $\rho = 0.23$, $\mu = 1.65$, $\Omega = 10$, $c = 1$, $d = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 1$, $D_3 = 50$. Размер области 100×100

стоячих волн. Отметим, что мы не можем указать их правые границы, поскольку проведенный анализ справедлив только вблизи бифуркационной кривой. В полном соответствии с тем, что было показано выше, оказалось, что в системе (6) вблизи волновой бифуркации возможны лишь два режима. Если параметры подобраны так, что $h \in (1, \infty)$, в системе формируются бегущие волны, а если $h \in (-1/4, 1)$, то в системе возникают стоячие волны.

На рис. 2 и 3 приведено два примера структур, полученных в численных экспериментах. Соответствующие параметры обозначены на рис. 1 более крупными значками.

Заклучение

В данной работе проведено исследование системы амплитудных уравнений (1) вблизи волновой бифуркации для N мод, удовлетворяющих граничным условиям и взаимодействующих между собой в ограниченной области.

Показано, что в результате такого взаимодействия в зависимости от величины параметра h возможны лишь два режима: или квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода), или стоячие волны (все N мод отличны от нуля). Решение с p ($p \in \overline{2, N-1}$) отличных от нуля мод является неустойчивым и не может быть реализовано.

Для проведения численных экспериментов была выбрана модель Гирера–Майнхардта, расширенная добавлением третьего уравнения для еще одного быстро диффундирующего ингибитора. Выполнен параметрический анализ данной модели и построены амплитудные уравнения вблизи волновой бифуркации. В результате, получена связь между коэффициентом h в соответствующих уравнениях (1) и параметрами модели. Выделены области в параметрическом пространстве, отвечающие существованию бегущих или стоячих волн. Результаты численных экспериментов вполне соответствуют теоретическим предсказаниям.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00392.

Приложение

Введем новую переменную $\mathbf{u} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^T$, где $\tilde{u}(t) = u(t) - u_0$, $\tilde{v}(t) = v(t) - v_0$, $\tilde{w}(t) = w(t) - w_0$ – отклонение от положения равновесия. Перепишем систему (6) в виде

$$\partial_t \mathbf{u}(t) = L(\mu, \Omega) \mathbf{u}(t) + I(\mu, \Omega, \mathbf{u}(t)). \quad (\text{П.1})$$

Здесь L – линейный оператор, включающий в себя диффузионные члены; I – нелинейная часть. Нетрудно проверить, что

$$L(\mu, \Omega) = \begin{pmatrix} (2s(\mu) - \mu - c)\Omega - D_1 \nabla^2 & -s^2(\mu)\Omega & d\Omega \\ \frac{2}{s(\mu)} & -1 - D_2 \nabla^2 & 0 \\ c & 0 & -d - D_3 \nabla^2 \end{pmatrix}, \quad s(\mu) = \frac{\mu}{\rho + 1}.$$

Применим метод многомасштабного разложения по малому параметру [17, 18], который заключается в том, что в окрестности точки бифуркации вектор $\mathbf{u}(t)$, управляющий параметр μ и временную производную ∂_t можно представить в виде степенного ряда по малому параметру ε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + o(\varepsilon^3), \\ \mu - \mu_c &= \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + o(\varepsilon^3), \quad \partial_t = \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Учитывая зависимость оператора L от параметра μ , а нелинейной функции I – от μ и \mathbf{u} , используем разложения

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + o(\varepsilon^3), \\ I &= \varepsilon^2 M \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 + \varepsilon^3 2M \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + \varepsilon^3 N \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 + o(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Операторы L_0 , L_1 и L_2 нетрудно получить из исходного оператора L , подставив в него μ в виде ряда по ε и произведя разложение по малому параметру. Операторы M , N определяются следующим образом

$$\begin{aligned} M\mathbf{a}\mathbf{b} &= \left((s^4(\mu_c)a_2b_2 + s^2(\mu_c)a_1b_1 - s^3(\mu_c)(a_1b_2 + a_2b_1))\Omega_c \quad a_1b_1 \quad 0 \right)^T, \\ N\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a} &= \left((2s^5(\mu_c)(\bar{a}_1a_2^2 + 2a_1|a_2|^2) - s^4(\mu_c)(\bar{a}_2a_1^2 + 2a_2|a_1|^2))\Omega_c \quad 0 \quad 0 \right)^T, \end{aligned}$$

где векторы $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)^T$.

Подставим разложения (П.2) и (П.3) в уравнение (П.1). Очевидно, что мы получим уравнение, содержащее члены $o(\varepsilon)$, $o(\varepsilon^2)$, $o(\varepsilon^3)$, ..., которое будет эквивалентно (П.1) только в том случае, если

$$\begin{aligned} o(\varepsilon) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_1 = 0, \\ o(\varepsilon^2) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_2 = -(\partial_{t_1} - L_1) \mathbf{u}_1 + M\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1, \\ o(\varepsilon^3) : \quad & (\partial_{t_0} - L_0) \mathbf{u}_3 = -(\partial_{t_1} - L_1) \mathbf{u}_2 - (\partial_{t_2} - L_2) \mathbf{u}_1 + 2M\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 + N\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

Уравнение $o(\varepsilon)$ – это задача линейного анализа в точке $\mu = \mu_c$. Её решение в пространственно одномерном случае

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_c (A_L \exp^{i(w_c t + k_c x)} + A_R \exp^{i(w_c t - k_c x)}) + c.c.,$$

где w_c , k_c – критические частота и волновое число; \mathbf{u}_c – критический собственный вектор оператора L_0 ; A_L , A_R – комплексные скалярные амплитуды направо и налево распространяющихся волн; $c.c.$ обозначает комплексное сопряжение.

Применяя для уравнений $o(\varepsilon^2)$ и $o(\varepsilon^3)$ условие разрешимости [17, 18] и суммируя соответствующие результаты, мы получим систему следующих уравнений типа Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned} \partial_t A_L &= \eta A_L - g_1 A_L |A_L|^2 - g_2 A_L |A_R|^2, \\ \partial_t A_R &= \eta A_R - g_1 A_R |A_R|^2 - g_2 A_R |A_L|^2. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Здесь η , g_1 , g_2 – комплексные коэффициенты, причем

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(\mathbf{v}_c, L_2 \mathbf{u}_c)}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)}, \\ g_1 &= \frac{\mathbf{v}_c}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)} (2M\mathbf{u}_c V_{00} + 2M\mathbf{u}_c V_{20} + 2M\bar{\mathbf{u}}_c W_{02} + 2N\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c), \\ g_2 &= \frac{\mathbf{v}_c}{(\mathbf{v}_c, \mathbf{u}_c)} (2M\mathbf{u}_c V_{00} + M\bar{\mathbf{u}}_c W_{22} + N\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c), \end{aligned}$$

где \mathbf{v}_c – решение сопряженной линейной задачи $(\partial_{t_0} - L_0^*)\mathbf{v}_c = 0$,

$$W_{nm} = \frac{M\mathbf{u}_c \mathbf{u}_c}{n\omega_c - L_0(mk_c)}, \quad V_{nm} = \frac{M\mathbf{u}_c \bar{\mathbf{u}}_c}{n\omega_c - L_0(mk_c)}, \quad n, m = 0, 2.$$

Подходящим выбором масштаба систему (П.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \partial_t A_L &= A_L - (1 - \imath c_1) A_L |A_L|^2 - h(1 - \imath c_2) A_L |A_R|^2, \\ \partial_t A_R &= A_R - (1 - \imath c_1) A_R |A_R|^2 - h(1 - \imath c_2) A_R |A_L|^2, \end{aligned} \tag{П.5}$$

где c_1 , c_2 , h – действительные коэффициенты. Последний из них – коэффициент

$h = g_2/g_1$ – определяет силу, с которой конкурируют волны, распространяющиеся навстречу друг другу.

Очевидно, что обобщая полученный результат (П.5) для случая многомодового взаимодействия в многомерной среде, получим уравнения (1).

Библиографический список

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
2. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985, 327 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980, 406 с.
4. *Castets V., Dulos E., Boissonade J., Kepper P.D.* Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 29536.
5. *Fields R.J., Burger M.* Oscillations and travelling waves in chemical systems. New York: Wiley, 1985. 681 p.
6. *Kapral R., Showalter K.* Chemical waves and patterns. Dordrecht: Kluwer, 1995. 524 p.
7. *Zhabotinsky A.M.* A history of chemical oscillations and waves // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 379.
8. *Gong Y., Christini D.J.* Antispiral waves in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 088302.
9. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Packet waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. P. 088303.
10. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Dash waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. P. 098301.
11. *Yang L., Berenstein I., Epstein I.R.* Segmented waves from a spatiotemporal transverse wave instability // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 038303.
12. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Resonance-induced oscillons in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 016201.
13. *Ванаг В.К.* Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова–Жаботинского в обращенной микроэмульсии // *УФН*, 2004. Т. 174, № 9. С. 991.
14. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Pattern formation in a tunable medium: the Belousov-Zhabotinsky reaction in an aerosol OT microemulsion // *Phys Rev Lett.* 2001. Vol. 87. P. 228301.
15. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* 1952. Vol. 237. P. 37.
16. *Zhabotinsky A.M., Dolnik M., Epstein I.R., Rovinsky A.B.* Spatio-temporal patterns in a reaction-diffusion system with wave instability // *J. Chem. Science.* 2000. Vol. 55. P. 223.
17. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
18. *Nicolis G.* Introduction to nonlinear science. Cambridge University Press, 1995. 254 p.
19. *Gierer A., Meinhardt H.A.* Theory of biological pattern formation // *Kibernetik.* 1972. Vol. 12. P. 30.

20. *Борина М.Ю., Полежаев А.А.* Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция–диффузия»// Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 2. С. 135.
21. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. М.: Бином, 2006. 523 с.

*Физический институт
им. П.Н. Лебедева РАН*

*Поступила в редакцию 15.02.2012
После доработки 11.05.2012*

**SPATIAL-TEMPORAL PATTERNS IN A MULTIDIMENSIONAL
ACTIVE MEDIUM FORMED DUE TO POLYMODAL
INTERACTION NEAR THE WAVE BIFURCATION**

M. Yu. Borina, A. A. Polezhaev

Investigation of a set of amplitude equations, describing interaction of several modes which became unstable due to the wave bifurcation, is carried out. It is shown that as a result of competition between modes depending on the value of the parameter defining the strength of interaction only two regimes are possible: either quasi one-dimensional travelling waves (there exists only one nonzero mode) or standing waves (all the modes are nonzero). This result is supported by numerical experiments for the Gierer-Mainhardt model modified by addition of one more equation for the second fast diffusing inhibitor.

Keywords: Active medium, diffusion instability, wave bifurcation, amplitude equations.



Борина Мария Юрьевна – родилась в 1987 году в Кемерово, окончила Московский инженерно-физический институт в 2010 году. В настоящее время – аспирантка ФИАН. Имеет две публикации в реферируемых научных журналах.

119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
E-mail:apol@lpi.ru



Полежаев Андрей Александрович – родился в 1953 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт (1976). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МФТИ (1979) и доктора физико-математических наук в МГУ (1994) в области теории нелинейных динамических систем, моделирования процессов пространственно-временной самоорганизации в системах различной природы, математической биофизики. После окончания аспирантуры МФТИ в 1979 году работает в ФИАНе, в настоящее время – заведующим сектором теоретических проблем биофизики. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Заместитель главного редактора журнала «Компьютерные исследования и моделирование».

119991 Москва, Ленинский проспект, 53
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
E-mail:apol@lpi.ru