



## ЭФФЕКТ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*А. С. Черепанцев*

В работе рассмотрен вопрос об искажениях оценок динамических параметров системы при использовании выборки, подвергнутой воздействию рекурсивных фильтров различного порядка и с различной частотой среза. В качестве тестовой динамической системы для сравнительного анализа оценок корреляционной размерности и размерности вектора состояния системы в случае применения рекурсивных фильтров использована система Лоренца.

*Ключевые слова:* Рекурсивный фильтр, размерность Ляпунова, корреляционная размерность, аттрактор Лоренца.

### Введение

Фильтрация данных геофизических временных рядов является стандартной процедурой предварительной обработки. Целью такого преобразования является улучшение отношения сигнал/шум, снятие различных внешних факторов. В случае восстановления динамической системы по отдельной выборке процедура фильтрации позволяет убрать компоненты с длительными временными связями, осложняющими выбор временного сдвига  $\tau$  при задании независимых координат [1]. Однако в случае фильтрации вариаций широкополосной компоненты динамической системы с хаотическим поведением полученный временной ряд может передавать информацию об исходной системе в существенно искаженном виде.

Впервые на это было указано в [2] при использовании фильтра низких частот первого порядка, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\dot{z}(t) = -\omega_{\text{срез}} z(t) + x(t), \quad (1)$$

где  $z(t)$  – результат фильтрации  $x(t)$ ,  $\omega_{\text{срез}} = 2\pi f_{\text{срез}}$  – циклическая частота среза фильтра. При малых значениях  $\omega_{\text{срез}}$  восстанавливаемый аттрактор имеет информационную размерность, которая превышает размерность исходного аттрактора. Увеличение размерности после фильтрации хорошо описывается изменением ляпуновской размерности, обусловленным появлением в системе дополнительного показателя фильтра  $\lambda_{\text{ф}} = -\omega_{\text{срез}} < 0$ . Ляпуновская размерность в соответствии с формулой

Каплана–Йорке [3,4] определяется соотношением

$$d_L = m + \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|}, \quad (2)$$

где  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$  – ляпуновские показатели  $n$ -мерной динамической системы, а  $m$  определяется условием  $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0$ ,  $S_{m+1} < 0$ .

Наблюдаемая величина  $z(t)$  в данном случае формируется динамической системой с новым спектром ляпуновских показателей  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, -\omega_{\text{срез}}, \dots, \lambda_n\}$  и в зависимости от величины частоты среза  $\omega_{\text{срез}}$  в (1); для нового значения  $\tilde{d}_L$  в соответствии с (2) справедливо  $\tilde{d}_L \geq d_L$ . Так как новый показатель всегда отрицателен, то такой параметр системы, как энтропия, определяемый лишь положительными показателями, остается неизменным [5].

В работе [6] показано, что нерекурсивные фильтры с конечной импульсной характеристикой определяют диффеоморфное преобразование исходного аттрактора и не изменяют инвариантные параметры динамической системы; однако и данные фильтры не обязательно безопасны в использовании. В случае задания фильтра с большой длительностью импульсной характеристики, он может действовать как рекурсивный фильтр и при использовании данных конечной точности также исказить получаемые оценки динамических параметров.

Критерий, позволяющий определить безопасность фильтра при применении его к набору данных или во время сбора данных в эксперименте, сформулирован в [7]. В соответствии с доказанной теоремой, если отображение исходного многообразия в новое многообразие, полученное после фильтрации, является непрерывно дифференцируемым, то оценки параметров, связанных с мерой на аттракторе (например, корреляционная размерность), сохраняются. С одной стороны, представление фильтрации как дополнение исходной системы динамической системой фильтра указывает на изменение получаемых оценок параметров исходной системы по данным на выходе фильтра. С другой стороны, если преобразование фильтром исходных данных является гладким, то искажения оценок отсутствуют. Отсюда вытекает актуальность задачи определения границ применимости каждого подхода. С учетом того, что на практике используются цифровые фильтры высоких порядков, требует также выяснения вопроса о влиянии порядка фильтра на искажение оценок динамических параметров.

### 1. Влияние частотного диапазона рекурсивного фильтра на оценку корреляционной размерности аттрактора динамической системы по отдельной временной выборке

В качестве тестовой диссипативной динамической системы рассмотрена система Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \quad \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}. \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (3)$$

Такой выбор определяется прежде всего имеющимися надежными оценками ее основных динамических параметров, главным образом, значений ляпуновских показателей  $\lambda = \{0.906, 0, -14.47\}$  [1]. Непрерывный частотный спектр вариаций компоненты  $x$  позволяет провести оценку инвариантных параметров динамической системы, формируемой после фильтрационного воздействия.

Для расчетов использован ряд с дискретизацией  $\Delta t = 0.0904$  с и, соответственно, верхней частотой спектра 5.53 Гц. Выбор временной дискретизации  $\Delta t$  определяется корректностью оценки размерности и соответствует длительности временного интервала уменьшения до нуля автокорреляционной функции компоненты высокочастотной части спектра.

Для ВЧ и НЧ фильтрации использован рекурсивный синусный фильтр Баттерворта [8], в котором в качестве входного воздействия  $x$  рассматриваются отсчеты только в текущий момент времени  $t_i$ , то есть его характеристики зависят только от параметров связи выходного сигнала  $y(i)$  с сигналами на выходе в прошедшие моменты времени  $y(i-1), \dots, y(i-M)$

$$y(i) = b_0 x(i) - \sum_{m=1}^M a_m y(i-m), \quad (4)$$

где  $M$  – порядок фильтра. С учетом того, что действие фильтра любого порядка можно представить последовательным действием фильтров второго и первого порядка, рассмотрено представление динамической системы первого и второго порядка, определяемое (4).

Динамическая система

$$\alpha \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \beta \frac{dy(t)}{dt} + \gamma y(t) = x(t),$$

соответствующая *фильтру второго порядка* ( $M = 2$ ), получается с использованием разностного представления производных. Используем аппроксимацию второго порядка производных и неявную схему, позволяющую получить устойчивое решение. В этом случае имеем

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{2b_0} (1 + a_2), \quad \beta = \frac{\Delta t}{b_0} (1 - a_2), \quad \gamma = \frac{1}{b_0} (1 + a_1 + a_2).$$

Для *фильтра первого порядка* ( $M = 1$ ) для неявной схемы и аппроксимации первого порядка имеем

$$\beta = \frac{\Delta t}{b_0}, \quad \gamma = \frac{1}{b_0} (1 + a_1).$$

Характеристические показатели для систем ОДУ второго и первого порядков определяются частотой среза  $f_{\text{срез}}$  и связанными с ней коэффициентами  $b_0, a_1, a_2$ . Соответственно получаем

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \pm i \frac{1}{\Delta t} \sqrt{2 + \frac{a_1}{1 + a_2} - \left( \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \right)^2}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\Delta t} (1 + a_1).$$

Накладываемое условие  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  определяет устойчивость фильтра.

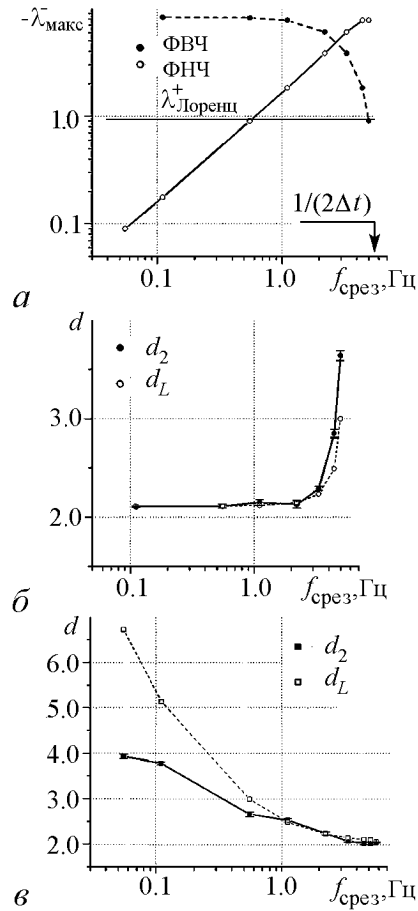


Рис. 1. Зависимость корреляционной размерности  $d_2$  системы Лоренца от частоты среза фильтра Баттерворта 6 порядка. *а* – изменение максимального отрицательного показателя Ляпунова динамической системы ФВЧ и ФНЧ при изменении частоты среза. Стрелкой указана частота Найквиста временного ряда  $x$ -компоненты. Горизонтальная линия соответствует значению положительного показателя Ляпунова системы Лоренца  $\lambda_{\text{макс}}^+ = 0.906$ ; *б* – оценка  $d_2$  и соответствующее расчетное значение ляпуновской размерности  $d_L$  системы Лоренца при различных частотах среза ФВЧ; *в* – оценка  $d_2$  и соответствующее расчетное значение  $d_L$  системы Лоренца при различных частотах среза ФНЧ

корреляционной размерности, рассчитанные по выборке  $x$ -компоненты, становятся существенно отличными от значения для неискаженной системы Лоренца. При этом оценка  $d_2$  отклоняется и от расчетного значения  $d_L$ . В случае ФВЧ имеем  $d_2^F > d_L^F$ , в случае ФНЧ  $d_2^F < d_L^F$ .

Причиной подобного поведения может служить нарушение требований теоремы Такенса о гладкости функции и ее производной для высокочастотной компоненты, что отражается в характере антикорреляций соседних точек (рис. 2,

Исходя из взаимного расположения  $\lambda_i^F$  фильтра и  $\lambda_j^S$  исследуемой системы на действительной числовой оси, возможны различные значения ляпуновской размерности. При этом минимальное значение  $d_L = d_L^{\text{Лоренц}} = 2.06$  достигается при  $\lambda_{\text{мин}}^F \leq \lambda_{\text{мин}}^{\text{Лоренц}} = -14.47$ , а максимальное значение  $d_L = M + d_L^{\text{Лоренц}} = M + 2.06$  достигается при  $\lambda_{\text{мин}}^F \rightarrow -0$ .

На рис. 1, *а* представлена зависимость максимального показателя динамической системы фильтра от частоты среза в спектральном диапазоне вариаций  $x$ -компоненты системы Лоренца. По мере сужения частотного диапазона исследуемой системы динамические системы ФНЧ и ФВЧ демонстрируют уменьшение ляпуновских показателей.

Оценки изменения ляпуновской размерности для указанных фильтров от частоты среза представлены на рис. 1, *б*, *в*. Там же представлены кривые изменения корреляционной размерности  $d_2$ , полученные по оценкам корреляционного интеграла  $x$ -компоненты системы Лоренца после фильтрации. Сравнение полученных зависимостей  $d_L$  и  $d_2$  указывает на близость теоретической кривой  $d_L(f_{\text{срез}})$  и рассчитанных значений  $d_2(f_{\text{срез}})$  в случае фильтров верхних и нижних частот при  $(-\lambda_{\text{макс}}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+$ . При сужении частотного диапазона и стремлении ляпуновских показателей динамических систем фильтров к нулю, значения кор-

штриховая кривая). Отсутствие гладкости производной приводит к росту размерности при оценке. При низкочастотной фильтрации с  $f_{\text{срез}} < \lambda_{\text{Лоренц}}^+$  получаемая выборка демонстрирует увеличение связности отсчетов во временной области (см. рис. 2, пунктирная линия) с длительностью, превышающей характерное время предсказуемости системы  $\tau \sim 1/\lambda_{\text{Лоренц}}^+$ . Это эквивалентно сжатию во временной области исследуемого ряда при дискретизации выборки с временным интервалом  $\Delta t > \tau$  и, соответственно, наблюдаемому занижению оценки  $d_2$  относительно  $d_L$ .

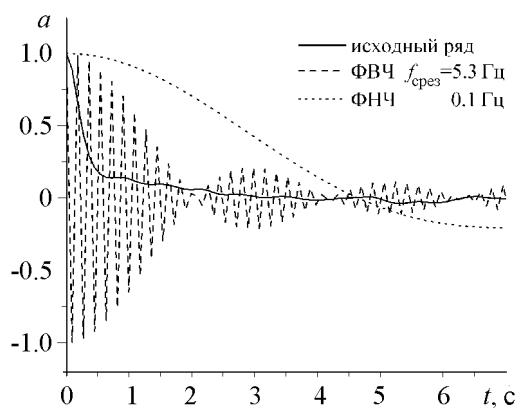


Рис. 2. Автокорреляционная функция временной выборки  $x$ -компоненты системы Лоренца после НЧ и ВЧ фильтрации в узкой частотной полосе

## 2. Учет порядка фильтра при оценке параметров динамической системы по отдельной временной выборке

Как правило, при выделении отдельных частотных компонент рассматриваемых временных рядов для последующей оценки параметров динамической системы используются фильтры высоких порядков. Рассмотрим влияние выбранного порядка фильтра на искажение оценки размерностей на примере тестовой системы Лоренца. Как ранее указано, частотным порогом возникновения существенных отклонений оценки  $d_2$  от ляпуновской размерности является частота, значение которой близко к положительному ляпуновскому показателю  $f_{\text{срез}}^+ = 0.906$  Гц. Расчет оценок  $d_2$  сделан в окрестности данной частоты при  $f_{\text{срез}}^{1,2} \approx 2^{\pm 1} f_{\text{срез}}^+$ . На рис. 3 представлено изменение корреляционной размерности при увеличении порядка используемого

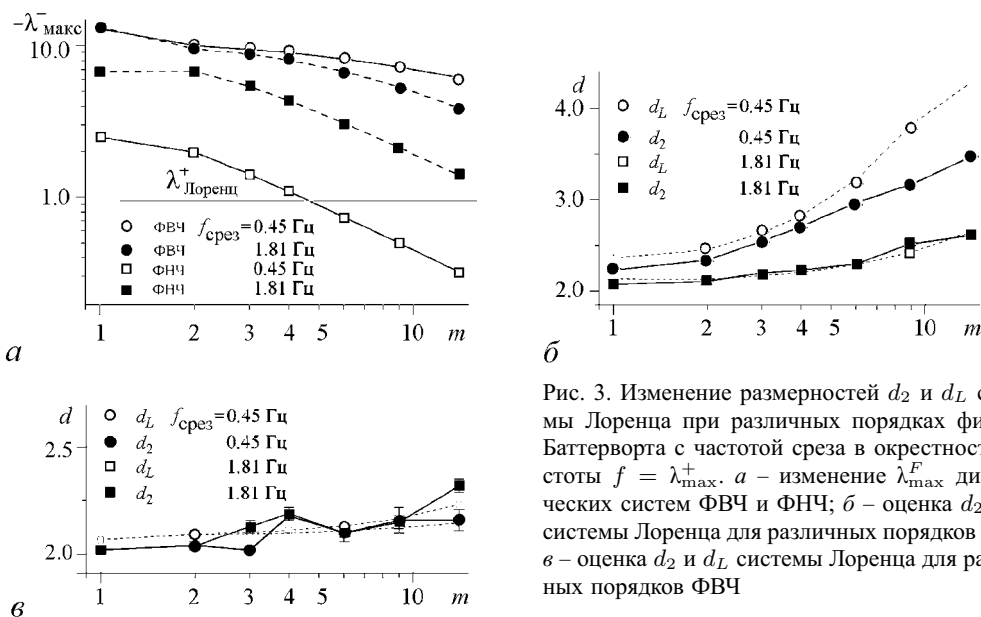


Рис. 3. Изменение размерностей  $d_2$  и  $d_L$  системы Лоренца при различных порядках фильтра Баттерворта с частотой среза в окрестности частоты  $f = \lambda_{\text{макс}}^+$ . а – изменение  $\lambda_{\text{макс}}^F$  динамических систем ФВЧ и ФНЧ; б – оценка  $d_2$  и  $d_L$  системы Лоренца для различных порядков ФНЧ; в – оценка  $d_2$  и  $d_L$  системы Лоренца для различных порядков ФВЧ

фильтра. Видно, что в области частот среза и порядка фильтра, для которых справедливо неравенство

$$(-\lambda_{\text{макс}}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+ \quad (5)$$

оценка  $d_2$  близка к  $d_L$ , определяемой формулой Каплана–Йорке. Нарушение неравенства (5) приводит к тому, что оценки  $d_2$  по значению наклона корреляционного интеграла носят искаженный характер в силу нарушения условий применимости данного метода (гладкости отображения и выбора сдвига отсчетов  $\tau$ ), превышающего временной масштаб связности процесса в фазовом пространстве странного аттрактора. Так, для ФНЧ с  $f_{\text{срез}} \approx 2^{-1} f_{\text{срез}}^+ = 0.45$  Гц неравенство перестает выполняться, начиная с порядка фильтра  $M = 4$  (рис. 3, а). Соответственно с данного порядка фильтра начинается нарастающее отклонение оценки  $d_2$  от  $d_L$  (рис. 3, б).

### 3. Влияние частотной фильтрации на оценку размерности вектора состояния динамической системы по отдельной временной выборке

Расчет корреляционного интеграла для различных размерностей вложений позволяет оценить наряду с инвариантом динамической системы (корреляционной размерностью  $d_2$ ), также и размерность  $n$  вектора состояния динамической системы, равную минимальному количеству уравнений, отражающих ее поведение в фазовом пространстве. Рассмотрим влияние фильтрации выборки временного ряда на оценку параметра  $n$  при различных частотах среза для системы Лоренца [4].

На рис. 4. представлены зависимости изменений наклона  $\gamma_{C_2}$  корреляционного интеграла  $C_2(r)$  динамической системы, включающей фильтр 6 порядка для различных частот среза. В соответствии с представлениями о восстановлении свойств динамической системы по отдельной временной проекции, размерность  $n$  определяется величиной вложения  $m$ , начиная с которого наклон  $\gamma_{C_2}$  корреляционного интеграла остается постоянной величиной.

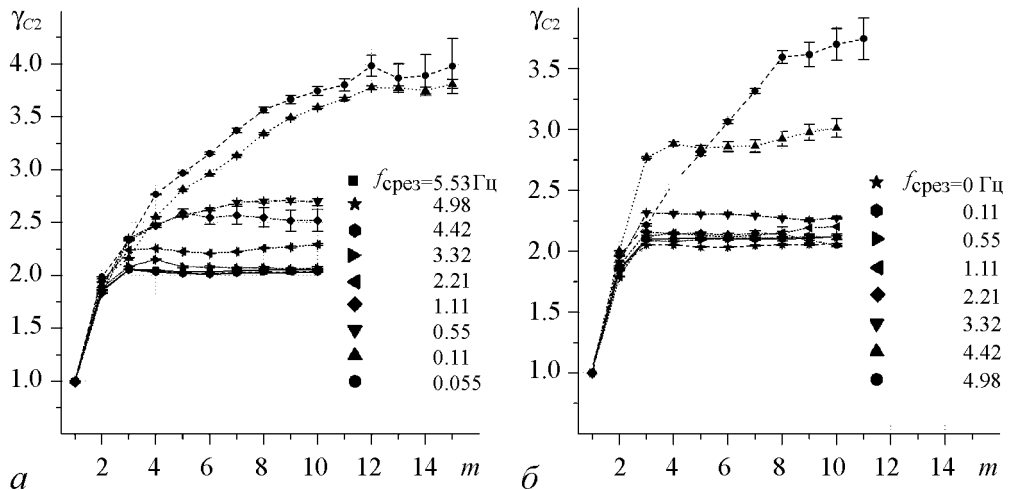


Рис. 4. Изменение наклона корреляционного интеграла  $C_2$  по выборке  $x$ -компоненты после цифровой фильтрации фильтром 6 порядка при различных частотах среза: а – ФНЧ, б – ФВЧ

Расчетные кривые наклона корреляционного интеграла указывают на существование частотного диапазона фильтрации, в котором размерность остается равной размерности вектора состояния динамической системы Лоренца ( $n = 3$ ). Однако при сужении частотного диапазона оценка  $\tilde{n}$  начинает увеличиваться, достигая значений, превышающих суммарную размерность  $n$  динамических систем Лоренца и фильтра. Можно выделить ряд особенностей изменения размерности.

1. Предельная частота среза, начиная с которой сжатие спектра приводит к изменению размерности, в случае фильтра нижних частот ( $f_{\text{срез}} \leq 1.11$  Гц) и в случае фильтра верхних частот ( $f_{\text{срез}} \geq 4.42$  Гц), соответствует области достижения модулем максимального показателя Ляпунова фильтра  $|\lambda_{\text{макс}}^F|$  величины положительного показателя системы Лоренца  $\lambda_{\text{Лоренц}}^+$  (см. рис. 1, а). То есть области искажений  $d_2$  и области роста  $n$  системы близки и определяются характерным временем потери информации в системе Лоренца.

2. Оценка  $\tilde{n}$  после осуществления фильтрации с частотами отсечки  $(-\lambda_{\text{макс}}^F) > \lambda_{\text{Лоренц}}^+$  дает значение  $n = 3$ , равное размерности системы Лоренца. Оценки оказываются нечувствительными к наличию дополнительной динамической системы фильтра 6 порядка. Иначе говоря, с одной стороны, осуществляемое преобразование данных является инвариантным к параметру размерности вектора состояния системы  $n$ , а с другой стороны, оно изменяет корреляционную размерность  $d_2$ , удовлетворительно вычисляемую по соотношению (2).

В этой связи следует заметить, что рассматриваемая полная система, включающая динамическую систему фильтра, представляется в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y}(t) &= \varphi(\mathbf{x}, y), \\ \dot{z}(t) &= \eta(z, y),\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $y$  – параметры исходной динамической системы,  $z$  – дополнительный параметр динамической системы фильтра. Особенностью (6) является то, что изменение компонент  $\mathbf{x}(t)$  функционально не связано с компонентой  $z(t)$ , которая является преобразованием лишь отдельной компоненты  $y(t)$  системы. Если такое преобразование взаимно однозначно (гомеоморфно) и  $g(y)$  – дифференцируемая функция, а именно:  $Y \rightarrow Z$ , ( $Z, Y \subset R^1$ ), то она будет иметь обратную дифференцируемую функцию  $g^{-1}$ , определенную на  $Z$ :  $Y = g^{-1}(Z)$ . При этом размерность системы уравнений (6) будет определяться размерностью  $\dim(\mathbf{x}) + 1$ , так как  $y = g^{-1}(z)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, g^{-1}(z)), \\ \dot{z}(t) &= \frac{1}{dg^{-1}/dz} \varphi(\mathbf{x}, g^{-1}(z)).\end{aligned}$$

То есть полученная система будет иметь ту же размерность, что и исследуемая система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y}(t) &= \varphi(\mathbf{x}, y),\end{aligned}$$

но с иной правой частью, определяющей динамический портрет системы, в том числе и ее метрические свойства, такие как корреляционная размерность аттрактора.

В случае же нарушения взаимной однозначности преобразования  $Y \rightarrow Z$ , что и имеет место в случае использования преобразования фильтрации с сужением частотной полосы, происходит сжатие фазового портрета системы и нарушение условия применимости оценки динамических свойств системы по выборке отдельной компоненты. Возникающий в этом случае эффект «ложных соседей» [1] приводит к росту размерности  $d_2$  в высокочастотном окне фильтрации и уменьшению  $d_2$  относительно  $d_L$  в низкочастотном окне фильтрации, что и наблюдается в расчетах (см. рис. 1, б, в).

### Заключение

- На примере системы Лоренца показана чувствительность динамических параметров системы (корреляционная размерность аттрактора и размерность вектора состояния системы) к частотной полосе анализа временной реализации.
- Можно выделить пороговое значение периода среза ВЧ- и НЧ-фильтров, близкое к значению характеристического времени  $\tau = 1/\lambda^+$  ( $\lambda^+$  – положительный ляпуновский показатель системы Лоренца), начиная с которого оценки динамических параметров существенно отклоняются от параметров исследуемой системы. Оценкой  $\tau$  при анализе системы с неизвестными априори параметрами может служить величина  $\tau \approx 1/K_2$  [9], обратная к корреляционной энтропии, определяемой по экспериментальным данным.
- При  $f_{\text{срез}} < \lambda^+$  для ФВЧ и  $f_{\text{срез}} > \lambda^+$  для ФНЧ оценки значений  $d_2$  близки к расчетным значениям  $d_L$ . Размерность  $n$  вектора состояния полной системы в этом случае остается равной размерности системы Лоренца и не зависит от порядка фильтра.
- Порядок фильтра  $n$  влияет на искажение оценок  $d_2$  при полосе пропускания с частотой выше (в ФВЧ) или ниже (в ФНЧ) порогового значения  $\lambda_{\text{Лоренц}}^+$ .

*Работа выполнена при поддержке грантов НШ-5583.2012.5, РНПВШ 5.5745.2011, РФФИ 11-05-00303-а.*

### Библиографический список

1. Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 360 с.
2. Badii R., Broggi G., Derighetti B. et al. Dimension increase in filtered chaotic signals // Physical Review Letters. 1988. Vol. 60, № 11. P. 979.
3. Kaplan J.L., Yorke J.A. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. Functional differential equations and approximations of fixed points // Lecture Notes in Mathematics / Edited by H.-O. Peitgen and H.-O. Walthers. Berlin: Springer-Verlag, 1979. Vol. 730. P. 204.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 295 с.
5. Zhu L., Lai Y., Hoppensteadt F., et al. Numerical and experimental investigation of the effect of filtering on chaotic symbolic dynamics // Chaos. 2003. Vol. 13, № 1. P. 410.
6. Broomhead D., Huke J., Muldoon M. Linear filters and non-linear systems // Journal Royal Statistical Society. 1992. Vol. B 54, № 2. P. 373.



7. *Sauer T., Yorke J.* Are the dimensions of a set and its image equal under typical smooth functions? // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1997. Vol. 17. P. 941.
8. *Отнес Р., Энксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982.
9. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from chaotic signal // *Physical Review A*. 1983. Vol. 9, № 1–2. P. 2591.

*Южный федеральный университет,  
Ростовская-на-Дону обл., Таганрог*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*12.09.2012  
30.10.2012*

## **EFFECT OF FILTERING IN DYNAMIC SYSTEM PARAMETERS ESTIMATION**

*A. S. Cherepantsev*

A question on the distortion of the dynamic system parameters estimation using a time variation of the single component after exposing recursive filters with different order and with different cut-off frequency is analyzed. The Lorenz system is used as a test dynamic system for comparative evaluation of the correlation dimension and the dimension of the system state vector in the case of recursive filtering.

*Keywords:* Recursive filter, Lyapunov dimension, the correlation dimension, the Lorenz attractor.



*Черепанцев Александр Сергеевич* – родился в 1963 году. Окончил физический факультет МГУ, отделение геофизики (1987). Кандидат физико-математических наук (1990, МГУ), доцент (2003). Работает доцентом кафедры физики ЕГФ ЮФУ. Область научных интересов – анализ информативности геофизических полей различной природы о напряженно-деформированном состоянии геологической среды, применение подходов нелинейной динамики к описанию природы наблюдаемых вариаций геофизических полей, модель самоорганизованного критического состояния при описании эволюции дискретной геологической среды. Автор более 50 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 6 учебно-методических пособий.

347928 Ростовская-на-Дону обл., Таганрог, Некрасовский пер., 44  
Южный федеральный университет  
E-mail: s6319a@mail.ru