

СИСТЕМА ТРЕХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ХАОСОМ

Часть I

**Модель с динамикой на аттракторе,
описываемой отображением на торе «кот Арнольда»**

Д. С. Аржанухина, С. П. Кузнецов

В работе исследуется система трех связанных неавтономных автоколебательных элементов, в которой поведение фаз осцилляторов за период изменения коэффициентов в уравнениях имеет сходство с отображением Аносова, демонстрирующим хаотическую динамику. Результаты численного исследования позволяют заключить, что аттрактор отображения Пуанкаре можно рассматривать, по крайней мере в грубом приближении, как вложенный в шестимерное фазовое пространство двумерный тор, динамика на котором представляет собой гиперболический хаос, характерный для систем Аносова.

Ключевые слова: Аттрактор, гиперболический хаос, отображение Аносова, кот Арнольда, отображение Фибоначчи.

Введение

Среди систем с хаотической динамикой особый интерес представляют системы, в которых хаос характеризуется свойством *структурной устойчивости*, и его характеристики нечувствительны к вариации параметров и функций, фигурирующих в определении оператора эволюции. На уровне абстрактных моделей такие системы введены и изучаются в рамках так называемой *гиперболической теории*, разработку которой надо признать одним из выдающихся достижений математической теории динамических систем XX века. В силу присущей структурной устойчивости и наличия глубокого и полного теоретического описания, физическая реализация систем с гиперболическим хаосом может представлять интерес для приложений, в том числе в радиотехнике и электронике (скрытая коммуникация, генерация случайных чисел, шумовая локация).

Специальный класс систем со структурно-устойчивым хаосом образуют *системы Аносова*, у которых все фазовое пространство представляет собой гиперболическое инвариантное множество, составленное из траекторий седлового типа,

причем типичная траектория посещает плотное во всем фазовом пространстве множество точек. Простейший пример системы Аносова с дискретным временем – это отображение, заданное на торе, где определены циклические координаты X и Y

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + Y_n \pmod{1}, \\ Y_{n+1} &= X_n + 2Y_n \pmod{1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Его называют также *отображением «кот Арнольда»*, поскольку Арнольд для наглядного пояснения использовал графическую иллюстрацию действия этого отображения на область в виде головы кота [1–3]¹.

Отображение (1) связано с *отображением Фибоначчи* на множестве действительных чисел, принадлежащих единичному интервалу

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \varphi_{k-1} \pmod{1}. \tag{2}$$

В самом деле, если для пары $(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ ввести обозначение (X_k, Y_k) , то для этих переменных за два шага получим в точности отображение (1)

$$\begin{aligned} (X_{k+2}, Y_{k+2}) &= (\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}) = (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1} + \varphi_k) = \\ &= (\varphi_k + \varphi_{k-1}, \varphi_k + \varphi_{k-1} + \varphi_k) = (X_k + Y_k, X_k + 2Y_k). \end{aligned}$$

К классу отображений Аносова принадлежит, разумеется, и отображение, получаемое за три шага отображения Фибоначчи. В переменных $(X_k, Y_k) = (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$ оно записывается, как нетрудно проверить, в виде

$$\begin{aligned} X_{k+3} &= X_k + 2Y_k \pmod{1}, \\ Y_{k+3} &= 2X_k + 3Y_k \pmod{1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Другой класс систем со структурно-устойчивым хаосом – это диссипативные системы, у которых гиперболическая хаотическая динамика имеет место на вложенном в фазовое пространство притягивающем инвариантном множестве, представляющем собой *однородно гиперболический аттрактор*, такой как соленоид Смейла–Вильямса или аттрактор Плыкина [1–9]. Аттрактор гиперболический, если для него выполнен ряд условий, основным из которых является то, что все траектории, принадлежащие аттрактору, седловые. Хаотическая природа динамики на таких аттракторах математически строго обоснована.

В последнее время появились работы, где указана возможность присутствия гиперболических аттракторов в системах, допускающих физическую реализацию [10–17]. Например, в статье [13] исследуется система с аттрактором Смейла–Вильямса, построенная на основе двух связанных осцилляторов ван дер Поля с модуляцией параметров и попеременной передачей возбуждения между подсистемами. В работе [14] обсуждается возможность реализации гиперболического аттрактора типа Плыкина в модели нейрона Хиндмарша–Роуза. В работе [15] предложена электронная схема, динамика которой в установившемся режиме ассоциируется с аттрактором типа Плыкина.

¹См. также приведенный ниже рис. 4.

Один из подходов к построению физических систем, в которых мог бы присутствовать гиперболический аттрактор, основан на рассмотрении связанных осцилляторов с попеременным возбуждением, динамика фаз которых за характерный временной период описывалась бы гиперболическим отображением Аносова на торе [16,17]. В настоящей статье рассмотрена система трех связанных осцилляторов ван дер Поля, где реализуется этот принцип и динамика фаз определяется отображением Фибоначчи. Эта система проще, чем предложенная в работе [16], и имеет меньшую размерность фазового пространства, поскольку содержит в качестве элементов не четыре, а три осциллятора. В отличие от автономной системы трех осцилляторов, рассмотренной в работе [17], здесь осуществлен резонансный механизм передачи возбуждения между осцилляторами, что снимает некоторые ограничения, затрудняющие возможность реализации на этой основе генераторов хаоса в области высоких частот.

Главный момент в мотивации предпринятого исследования заключается, однако, в том, что предложенная схема будет отправной точкой для построения во второй части статьи модели, имеющей так называемый *DA-аттрактор*. Этот тип однородно гиперболических аттракторов введен в рассмотрение Смейлом для отображений на торе, полученных определенной модификацией отображений Аносова [10,18]. (Собственно аббревиатура DA означает «Derived from Anosov».) До сих пор DA-аттракторы рассматривались исключительно для искусственно сконструированных отображений, а примеров систем с аттракторами этого типа, допускающих физическую реализацию, в литературе представлено не было.

Рассмотренные в первой и второй части настоящей статьи модели открывают интересные возможности для конкретного исследования перехода от динамики Аносова к DA-аттракторам в контексте физических систем, что способствует наполнению содержанием абстрактных представлений математической теории. С практической точки зрения, эти системы могут представлять интерес как генераторы структурно устойчивого хаоса с хорошо определенными и допускающими детальный математический анализ свойствами.

1. Основные уравнения

Рассмотрим неавтономную систему трех поочередно возбуждающихся осцилляторов, которая описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= [B + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(xz)}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(xy)}{dt} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь x , y и z – обобщенные координаты первого, второго и третьего осцилляторов, ω_0 – их собственная частота и частота вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует

глубину модуляции параметра, ответственного за бифуркацию Андронова–Хопфа, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, T – период модуляции, ε – параметр связи. Примем, что треть периода модуляции содержит целое число периодов вспомогательного сигнала, то есть $\omega_0 T / 6\pi$ – целое число.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов пребывает в возбужденном состоянии приблизительно одну третью часть периода. В силу того, что модуляция сдвинута по фазе, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\dots \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, и возбуждение передается в циклической последовательности каждому следующему осциллятору от двух его партнеров.

Предположим, что в момент, предшествующий возбуждению осциллятора z , его партнеры имели фазы φ_x и φ_y , то есть $x \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$, $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$. Воздействие осцилляторов x и y на осциллятор z описывается в уравнении членом, содержащим производную

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{dt} &\sim \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \cos(\omega_0 t + \varphi_y) + \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \sin(\omega_0 t + \varphi_y) = \\ &= \sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y), \end{aligned} \quad (5)$$

откуда при умножении на функцию $\cos \omega_0 t$ получается

$$\sin(2\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t + \varphi_x + \varphi_y). \quad (6)$$

Резонансное воздействие на осциллятор z определяется первым слагаемым в этом выражении, а вторым слагаемым в грубом приближении можно пренебречь. Отсюда можно заключить, что при возбуждении этот осциллятор получит фазу колебаний, определяемую с точностью до константы соотношением

$$\varphi'_z = \varphi_x + \varphi_y \pmod{2\pi}, \quad (7)$$

где штрихом отмечена величина фазы, относящейся к новой стадии возбуждения осциллятора z . Таким образом, за один шаг передачи возбуждения для фаз имеет место отображение Фибоначчи. (То обстоятельство, что переменная определена на интервале 2π вместо единичного интервала в отображении (2), не принципиально.) На следующих этапах функционирования системы точно так же происходит передача фазы от второго и третьего осциллятора к первому, и затем от третьего и первого ко второму. За полный период модуляции получаются следующие соотношения для фаз:

$$\begin{aligned} \varphi'_z &= \varphi_x + \varphi_y, \\ \varphi'_x &= \varphi_y + \varphi'_z = \varphi_x + 2\varphi_y, \\ \varphi'_y &= \varphi'_z + \varphi'_x = 2\varphi_x + 3\varphi_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вектора, составленного из величин φ_x и φ_y , преобразование за полный период соответствует отображению (3)

$$\begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Значения показателей Ляпунова для отображения (9) можно получить как логарифмы собственных чисел матрицы, которые определяются из уравнения $\mu^2 - 4\mu - 1 = 0$ и составляют $\mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Соответственно, один показатель Ляпунова положителен $\Lambda_1 = \log \mu_1 = 1.4436\dots$, что указывает на наличие хаоса, а второй – отрицателен $\Lambda_2 = \log |\mu_2| = -1.4436\dots$ и равен первому по абсолютной величине. Тот факт, что сумма показателей нулевая, говорит о консервативной природе динамики, заданной отображением (9).

Более аккуратное и формальное описание динамики системы (4) в терминах стробоскопического отображения Пуанкаре подразумевает рассмотрение трансформации шестимерного вектора состояния $\mathbf{x}_n = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})_{t=nT}$ за период: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)$. В шестимерном пространстве этого отображения аттрактору будет соответствовать, по крайней мере приближенно, двумерный объект в виде тора, динамика на котором изображающих точек, описываемая в терминах циклических координат на торе, следует гиперболическому отображению (9). По остальным направлениям фазового пространства, как можно полагать, имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к притягивающему множеству.

2. Численные результаты

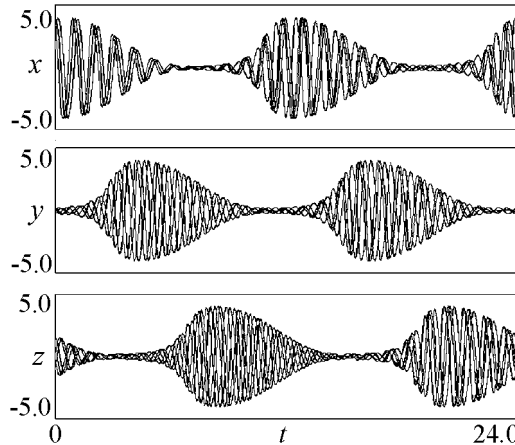


Рис. 1. Зависимости переменных x , y и z от времени, полученные при численном решении уравнений (4). Представлен результат наложения нескольких временных реализаций, чтобы сделать наглядной хаотическую природу динамики наблюдаемого режима

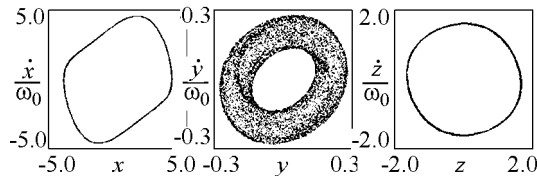


Рис. 2. Фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени $t_n = nT$ в проекции на плоскости $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $(y, \dot{y}/\omega_0)$ и $(z, \dot{z}/\omega_0)$

Численное моделирование динамики системы подтверждает, что в достаточно широкой области параметров она функционирует в соответствии с описанной выше качественной картиной. На рис. 1 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме, полученные в результате решения уравнений (4) на компьютере конечно-разностным методом при задании параметров $A = 3$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 12$. Как можно видеть, каждый осциллятор генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом через интервал времени T . Однако сигнал в целом – непериодический: фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому. Чтобы подчеркнуть этот момент, на рисунке приводится результат наложения нескольких последовательных участков реализации.

На рис. 2 приведены фазовые портреты аттрактора в стробоскопичес-

ком сечении в проекции на плоскость обобщенная координата – обобщенная скорость трех осцилляторов. Последовательность моментов времени, для которых построено сечение $t_n = nT$, соответствует стадии активности осциллятора x , амплитуда которого является самой большой, амплитуда осциллятора z меньше, а осциллятора y – самая малая. На портрете аттрактора на фазовой плоскости осциллятора y лучше всего различима структура в виде проекции вложенного в шестимерное пространство состояний отображения Пуанкаре двумерного тора, по которому в процессе динамики перемещается изображающая точка.

Фазы колебаний трех осцилляторов можно определить, используя соотношения

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \arg(x + i\dot{x}/\omega_0), \\ \varphi_y &= \arg(y + i\dot{y}/\omega_0), \\ \varphi_z &= \arg(z + i\dot{z}/\omega_0).\end{aligned}\tag{10}$$

На рис. 3 представлен график, иллюстрирующий приблизительное выполнение соотношения фаз (7) при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров. По вертикальной оси представлена фаза третьего осциллятора, определенная в момент времени $t = nT$. По горизонтальной оси отложена сумма фаз первого осциллятора в момент $t = (n - 2/3)T$ и второго осциллятора в момент $t = (n - 1/3)T$. Как можно видеть из графика, точки располагаются вдоль диагонали, то есть выражение (8) достаточно хорошо описывает трансформацию фаз при возбуждении очередного осциллятора системы (4).

Другой способ продемонстрировать соответствие динамики фаз отображению «кот Арнольда» состоит в том, чтобы представить действие отображения для фаз на плоскости с использованием традиционного изображения области в виде головы кота, преобразование которой определяется на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений. В системе (4), как видно из приведенного выше анализа, отображение для фаз за треть периода модуляции соответствует отображению Фибоначчи, а за две трети – отображению «кот Арнольда». За полный же период модуляции поведение фаз описывается отображением (9). Графическое построение производится следующим образом. Выполняется численное интегрирование уравнений (4) и накапливается массив значений фаз, вычисляемых через каждую треть периода модуляции для осциллятора, находящегося в данный момент в стадии активности. Взяв пару соседних чисел из этого массива, определяем, попадает ли точка с такими координатами на плоскости двух переменных в область в виде головы кота. Если да, то она отображается на графике, а пары, отвечающие моментам времени через период и через два периода модуляции, отображаются на двух следующих диаграммах, приведенных на рис. 4, а. Если точка не попадает в заданную область, она игнорируется, и для продолжения построения берется следующая пара чисел, и

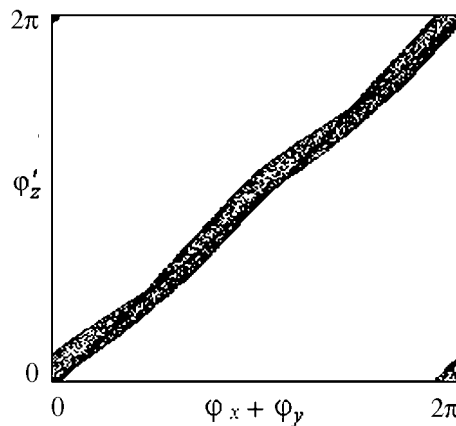


Рис. 3. График, иллюстрирующий соотношение фаз при передаче возбуждения третьему осциллятору от его партнеров

так далее. Полученные картинки можно сравнить с теми, которые тем же методом получаются для отображения (9) и показаны на рис. 4, б.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную методику Бенеттина [1, 3]. Проводится совместное решение уравнений (4) и шести комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{x} &= [B + A \cos(2\pi t/T) - x^2] \frac{d\tilde{x}}{dt} - 2x\tilde{x} \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{y}z + y\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 1/3) - y^2] \frac{d\tilde{y}}{dt} - 2y\tilde{y} \frac{dy}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}z + x\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t, \\ \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{z} &= [B + A \cos 2\pi(t/T - 2/3) - z^2] \frac{d\tilde{z}}{dt} - 2z\tilde{z} \frac{dz}{dt} + \varepsilon \frac{d(\tilde{x}y + x\tilde{y})}{dt} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (11)$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполняется ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \tilde{z}, \dot{\tilde{z}}\}$. Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Значения показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре, реализующегося при значениях параметров $A = 3, B = 1, \varepsilon = 0.1, \omega_0 = 2\pi, T = 12$, согласно результатам расчетов:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.444, & \Lambda_2 &= -1.552, & \Lambda_3 &= -5.247, \\ \Lambda_4 &= -7.058, & \Lambda_5 &= -21.75, & \Lambda_6 &= -27.16. \end{aligned}$$

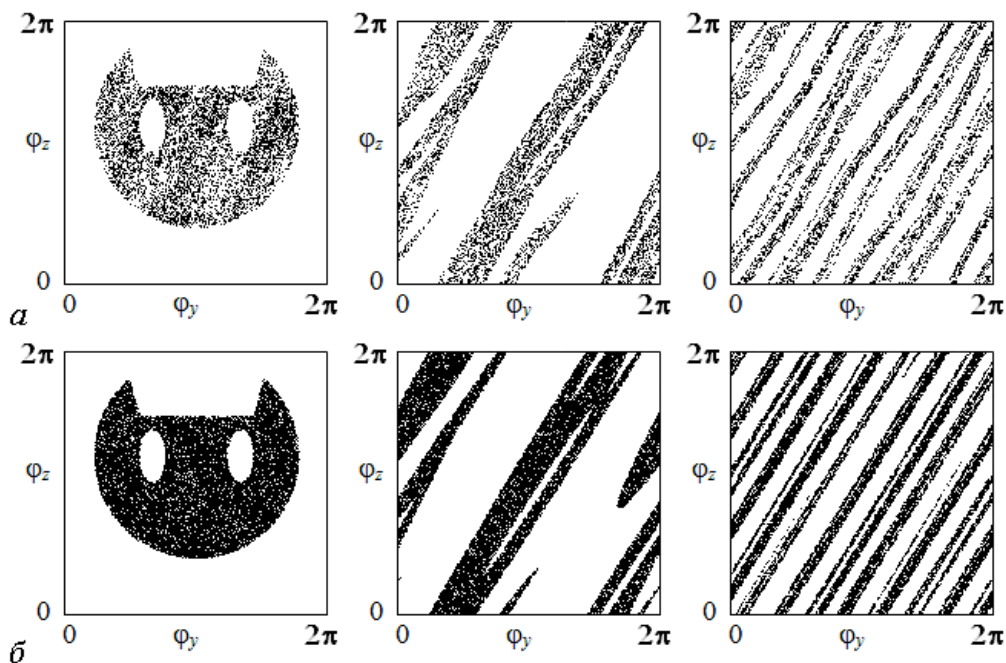


Рис. 4. Иллюстрация действия отображения, описывающего динамику фаз, полученного на основе результатов численного решения дифференциальных уравнений (4) (а) и действия отображения (9) (б)

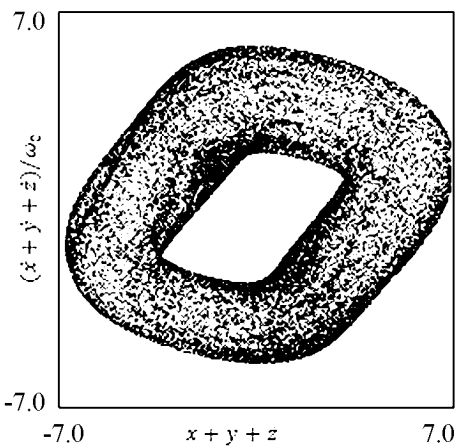


Рис. 5. Фазовый портрет аттрактора системы (4) в проекции на плоскость (средняя координата – средняя скорость трех осцилляторов)

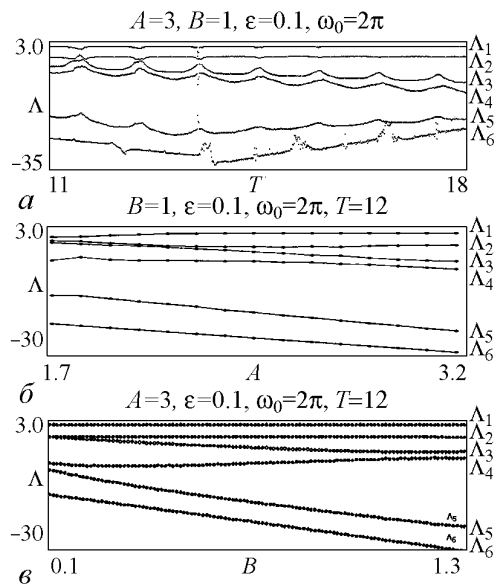


Рис. 6. Графики показателей Ляпунова системы (4) в зависимости от параметров T , A и B . Значения остальных параметров указаны в надписи для каждой диаграммы

Величины двух старших показателей Ляпунова близки к значениям, рассчитанным аналитически для системы (9), при этом они незначительно различаются по модулю и их сумма приблизительно равна нулю. Остальные показатели – большие по модулю отрицательные числа, что соответствует сильному сжатию фазового объема по оставшимся четырем из шести направлений в пространстве состояний. Это указывает на существование в шестимерном фазовом пространстве некоторого объекта, представляющего собой, по крайней мере в грубом приближении, двумерный тор, динамика на котором соответствует действию гиперболического отображения Аносова². На рис. 5 этот аттрактор показан в проекции из шестимерного пространства состояний отображения Пуанкаре на плоскость. Сжатие по четырем направлениям в пространстве состояний обеспечивает сходимость фазовых траекторий к данному объекту.

На рис. 6 приведены графики показателей Ляпунова для системы (4) в зависимости от периода модуляции T , а также от параметров A и B при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, в достаточно широком диапазоне изменения параметров два старших показателя Ляпунова остаются примерно постоянными. Это обстоятельство наряду с отсутствием окон периодичности в рассматриваемой области параметров свидетельствует в пользу предположения о гиперболической природе аттрактора в данной системе.

²Поскольку отображение Аносова на торе обладает структурной устойчивостью, а динамика на аттракторе системы (4), описываемая посредством стробоскопического отображения, к ней близка, как следует из вычислений, то можно полагать, что динамика на аттракторе в топологическом смысле соответствует отображению Аносова. Однако замена переменных на аттракторе для перехода от естественных переменных модели (4) к отображению (9), очевидно, гладкой не будет. На это обстоятельство указывает отличие двух старших показателей Ляпунова от значений, соответствующих отображению (9), которое явно выходит за пределы численной погрешности. (В самом деле, показатели Ляпунова определяются на основе линеаризованных уравнений в вариациях, вывод которых подразумевает использование операции дифференцирования, и если замена переменных дается недифференцируемой функцией, то совпадения показателей Ляпунова ожидать не приходится.)

Заключение

В данной работе введена в рассмотрение и исследуется неавтономная система трех связанных, поочередно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля. В этой системе при динамике на аттракторе поведение фаз пары входящих в нее осцилляторов описывается отображением, имеющим сходство с гиперболическим отображением Аносова («кот Арнольда»). Аттрактор системы, вложенный в шестимерное фазовое пространство отображения Пуанкаре, представляет собой объект, приблизительно соответствующий двумерному тору, на котором осуществляется динамика, характерная для систем Аносова, в то время как по остальным размерностям в фазовом пространстве имеет место сжатие, обеспечивающее приближение траекторий к аттрактору.

Модель системы трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля представляет практический интерес, так как может быть физически реализована в виде радиотехнического устройства. Также, являясь достаточно простой, данная модель может быть использована в учебном процессе, например, в компьютерных практикумах.

Как уже было отмечено, важным свойством гиперболических аттракторов, позволяющим варьировать систему, сохраняя тип аттрактора, является структурная устойчивость. Это свойство, с одной стороны, открывает широкие возможности для построения на основе исходной модели новых систем с гиперболическим хаосом, а с другой – дает перспективы для применения такого рода устройств (например, генераторов хаоса), в частности, в информационно-коммуникационных системах. Во второй части статьи будет рассмотрена модификация предложенной системы, в которой вместо динамики Аносова на торе реализуется однородно гиперболический аттрактор, типа предложенного Смейлом так называемого DA-аттрактора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-00342.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во Физматлит, 2001. 296 с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
6. Afraimovich V. and Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
7. Гукенхаймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и

бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2002. 559 с.

8. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison–Wesley, 1989.
9. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. 1353.
10. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
11. *Кузнецов С.П.* Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 403.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011 Т. 181, № 2. С. 121.
13. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, вып. 2. С. 400.
14. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. 3567.
15. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // CHAOS. 2011. Vol. 21. 043105.
16. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. 046207.
17. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica. 2007. Vol. D232. P. 87.
18. *Coudene Y.* Pictures of Hyperbolic Dynamical Systems // Notices of the American Mathematical Society. 2006. Vol. 53, № 1. P. 8.

*Саратовский госуниверситет
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 22.06.2012
После доработки 4.09.2012*

SYSTEM OF THREE NONAUTONOMOUS OSCILLATORS WITH HYPERBOLIC CHAOS

Part I

The model with dynamics on attractor governed by Arnold's cat map on torus

D. S. Arzhanukhina, S. P. Kuznetsov

In this paper a system of three coupled nonautonomous self-oscillatory elements is studied, in which the behavior of oscillators phases on a period of the coefficients variation in the equations corresponds to the Anosov map demonstrating chaotic dynamics. Results of numerical studies allow us to conclude that the attractor of the Poincaré map can be

viewed as an object roughly represented by a two-dimensional torus embedded in the six-dimensional phase space of the Poincaré map, on which the dynamics is the hyperbolic chaos intrinsic to Anosov's systems.

Keywords: Attractor, hyperbolic chaos, Anosov map, Arnold's cat map, Fibonacci map.



Аржанухина Дарья Сергеевна – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arzhanukhinadarja@rambler.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», опубликованной в 2011 г. в рамках совместной серии издательства Шпрингера и Министерства образования КНР, монографии Strange Nonchaotic Attractors (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель, издательство World Scientific), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал около 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: spkuz@rambler.ru