



ДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ДАЛЬНИХ СВЯЗЕЙ НА СИСТЕМУ С ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ

А. В. Шабунин

Рассматриваются закономерности разрушения фазовой мультистабильности в ансамблях осцилляторов с удвоениями периода под действием дальних связей, возникающих случайным образом между произвольными ячейками. Исследования проводятся на примере ансамбля осцилляторов Ресслера с периодическими граничными условиями, в которой наряду с локальными связями между элементами действуют дальнедействующие глобальные связи. Определяется последовательность бифуркационных переходов, происходящих при увеличении силы глобальных связей, которая завершается установлением пространственно-однородных синфазных колебаний.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, сети.

Введение

В последние годы, наряду с изучением распределенных систем с простой структурой связей между элементами, все больший интерес привлекают к себе сети со сложной топологией. Один из видов таких сетей – системы «малых миров» (small world networks), в которых наряду с регулярными локальными связями возникают спонтанные дальнедействующие связи между элементами. Интерес к подобным системам спровоцирован революцией в сфере информационных технологий, поскольку, наряду с возможностью их использования для биофизики, моделирования химических реакций, электронных цепей, модели «малых миров» очень хорошо описывают информационные системы и социальные сети. Первые исследования систем «малых миров» начались с конца 1990-х годов [1] и были посвящены, как правило, изучению процессов синхронизации и самоорганизации [2–4]. Общий обзор свойств динамики подобных систем в зависимости от топологии связей приводится в работе [5].

Наличие дальнедействующих связей может существенно влиять не только на синхронизацию, но и на другие явления, характерные для взаимодействующих систем. Одним из таких феноменов является фазовая мультистабильность [6], при ко-

торой в ансамбле осцилляторов сосуществует несколько аттракторов, соответствующих разным значениям установившихся разностей фаз между колебаниями подсистем. Фазовая мультистабильность достаточно хорошо изучена в цепочках осцилляторов с простым поведением, где она реализуется в виде иерархии режимов бегущих волн [7–11]. В системах с более сложным поведением фазовая мультистабильность может приводить к неограниченному росту числа сосуществующих колебательных режимов, как это происходит в связанных системах с бифуркациями удвоения периода [12–17]. Развитие фазовой мультистабильности в ансамблях с большим числом автогенераторов со сложной динамикой исследовано в ряде работ [18–20]. В работе [21] рассматривался постепенный переход от регулярных бегущих волн к хаотическим в ходе каскада бифуркаций удвоения периода.

Известные на сегодняшний день работы по фазовой мультистабильности рассматривают это явление в ансамблях осцилляторов с локальными связями. Возможно ли это явление при других типах связей, например, далекодействующих? Какое влияние такие связи оказывают на мультистабильность при действии наряду с локальными? Каковы результаты конкуренции между двумя типами связи? Эти вопросы пока не исследованы.

В настоящей работе на примере ансамбля осцилляторов Ресслера рассматривается явление фазовой мультистабильности при сосуществующих локальных и далекодействующих связях. Локальные связи постоянны во времени и регулярны в пространстве, в то время как глобальные связи периодически меняют свою конфигурацию, создавая в каждый момент времени случайную сеть из осцилляторов. Методом компьютерного эксперимента исследуется, к каким эффектам приводит постепенное увеличение силы дальних связей при фиксированных локальных связях. Исследования проводятся как для регулярных периодических колебаний, так и для хаотических режимов.

1. Фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов Ресслера

Рассмотрим ансамбль из N ($N > 1$) идентичных осцилляторов Ресслера с периодическими граничными условиями, в котором наряду с локальной диффузионной связью присутствуют далекодействующие связи между элементами, структура которых меняется во времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \varepsilon(x_I - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i + 0.2y_i, \\ \dot{z}_i &= 0.2 + z_i(x_i - c). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x_i , y_i и z_i – динамические переменные i -го осциллятора ($i = 1, \dots, N$), c – управляющий параметр, ответственный за бифуркации удвоения периода, $\gamma > 0$ – параметр локальной связи, ε – параметр далекодействующей связи, которая устанавливается между текущим осциллятором и осциллятором с номером I (правило выбора I будет описано в разделе 2).

Динамика системы (1) при отсутствии далекодействующих связей ($\varepsilon = 0$) была исследована в работе [22]. При слабой связи в ансамбле наблюдается множество сосуществующих режимов, характеризуемых одинаковой формой колебаний в каж-

дом из осцилляторов, но отличающихся от своих соседей на величину текущей фазы, то есть наблюдается явление фазовой мультистабильности. Под текущей фазой здесь и далее понимается 2π -периодическая величина, пропорциональная текущему времени t в соответствии с формулой, предложенной А. Пиковским [23]

$$\varphi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_n^{(i)}}{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}} - \pi. \quad (2)$$

Здесь $t_n^{(i)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) – момент времени n -го (предыдущего), а $t_{n+1}^{(i)}$ – $n+1$ -го (последующего) пересечения траекторией i -й подсистемы некоторой гиперплоскости.

В работе [11] было показано, что при случайном выборе начальных условий в кольце диффузионно связанных генераторов реализуются только такие режимы, для которых разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)$ постоянна и не зависит от положения в цепочке

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_j = \text{const}. \quad (3)$$

Их можно рассматривать как автоволны с длиной волны $\Lambda = 2\pi/\Delta\varphi$, бегущие вдоль цепочки с постоянной фазовой скоростью $v = 2\pi/(\Delta\varphi T)$. Если число осцилляторов в ансамбле (N) конечно, то и число возможных бегущих волн также конечно и равно N . Значение фазового сдвига для каждой волны рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N} \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Индекс $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$ определяет пространственную структуру колебаний цепочки осцилляторов и может использоваться как индекс волны. Значению $k = 0$ соответствует пространственно-однородное состояние, когда колебания в каждом из осцилляторов синфазны, $k = \pm N/2$ относятся к одному и тому же режиму, при котором колебания в соседних осцилляторах противофазны. В остальных случаях каждое положительное значение k соответствует прямой волне, а отрицательное – обратной. Поскольку прямые и обратные волны отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будут рассматриваться только прямые волны: $k \geq 0$.

Из анализа устойчивости бегущих волн в квазигармоническом приближении [11, 24] известно, что при положительных значениях диффузионной связи могут быть устойчивыми только те волны, для которых разность фаз между соседними осцилляторами не превосходит $\pi/2$. Это означает, что только волны с $|k| \leq N/4$ могут быть устойчивыми, а с $N/4 < |k| \leq N/2$ – нет. В данной работе для определенности выбрано число осцилляторов, равное тридцати: $N = 30$. В этом случае устойчивыми могут быть режимы с $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Проведенные численные исследования поведения ансамбля

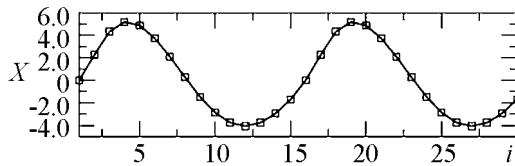


Рис. 1. «Пространственный снимок» бегущей волны с $k = 2$

показали, что при достаточно слабой связи ($\gamma = 0.005$), выбирая специальным образом начальные условия, можно получить каждый из волновых режимов со значениями индекса k из данного диапазона. На рис.1 изображено сечение

Пуанкаре колебаний в каждом из осцилляторов для волны с $k = 2$, которое дает визуальную картину пространственного распределения – «пространственный снимок» режима. Чтобы его получить, использовалась следующая методика:

- строилось сечение Пуанкаре траектории гиперплоскостью $y_1 = 0$, для чего отслеживались моменты времени t_n , в которые переменная y_1 меняет знак с положительного на отрицательный;
- строился график зависимости значений $x_i(t_n)$ от номера осциллятора i : $X(i) = x_i(t_n)$.

Таким образом получался «мгновенный снимок» волны, привязанный к определенному значению фазы одного из генераторов (в данном случае – первого). Полученная картина является стационарной, то есть она воспроизводится во времени. Характер пространственного профиля волн полностью определяется значением индекса k ; последний равен числу максимумов или минимумов на длине цепочки. Например, для изображенного на рис. 1 случая $k = 2$, на длине цепочки укладывается два минимума и два максимума.

Каждая из k -волн является родоначальником семейства колебательных режимов, для которых набег фазы вдоль ансамбля равен $2\pi k$. При увеличении параметра c на базе каждой такой волны происходят бифуркации рождения двумерных торов, синхронизация на торе, и каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к колебаниям более сложной формы, а затем – к хаотическим колебаниям. Например, для волны с $k = 2$ последовательность усложнения колебательных режимов показана на рис.2. Вначале, при $c = 2.85$ наблюдается мягкий переход к квазипериодическим колебаниям в каждом из осцилляторов (рис. 2, *a*). Данный режим, в результате синхронизации на торе сменяется периодическими колебаниями удвоенного периода (рис. 2, *б*), на базе которых через каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 2, *в*) развиваются хаотические колебания (рис. 2, *г*).

Семейства пространственно-периодических режимов, образованных на базе бегущих волн с разным индексом k , сосуществуют в фазовом пространстве при слабой, стремящейся к нулю, связи. При конечной силе связи область существования у каждого из режимов своя и зависит от параметра c . Как показывают исследования, чем больше k (или чем короче длина волны) – тем меньше оказывается область существования для данного семейства и тем ближе она «прижимается»

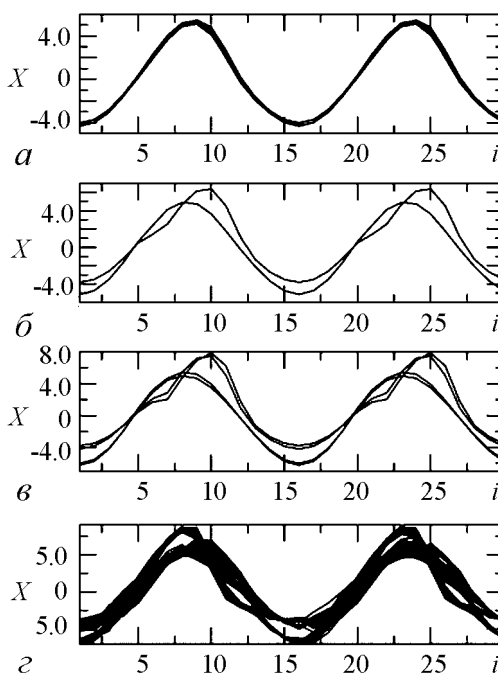


Рис. 2. Пространственные профили колебательных режимов, образованных на базе волны с $k = 2$ при увеличении параметра c : $c = 2.85$ (*a*), 3.05 (*б*), 4.1 (*в*), 4.4 (*г*)

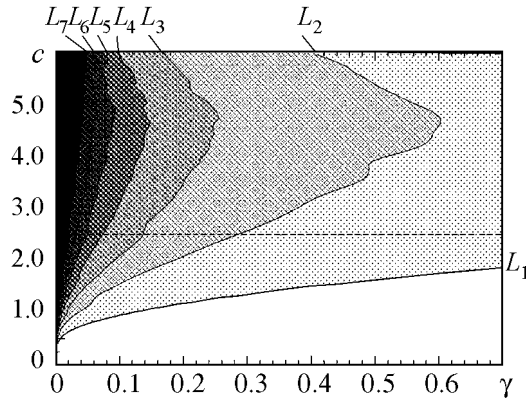


Рис. 3. Расположение режимов с разным набегом фазы (разным значением индекса волны k) вдоль ансамбля на плоскости параметров γ - c . Области с разными k отмечены разными оттенками серого цвета: от белого для $k = 0$ до черного для $k = 7$

к оси $\gamma = 0$. В совокупности, области устойчивости для разных фазовых мод составляют вложенную структуру: области для более коротковолновых режимов располагаются внутри областей для более длинноволновых. Для рассматриваемой системы (1) расположение таких зон устойчивости показано на рис. 3. На нем области устойчивости семейства режимов, образованных на базе каждой из k -волн, ограничены: слева – осью $\gamma = 0$, справа – кривой L_k . Цвет области маркирует длину волны – области более коротковолновых режимов выделены более темным цветом.

2. Разрушение мультистабильности и переход к пространственно-однородным колебаниям под действием «дальних» связей

Рассмотрим теперь, к каким эффектам приводит появление «дальних» связей, действующих наряду с существующими локальными связями в системе (1). Для этого предусмотрим возможность для каждого из N осцилляторов цепочки (1) устанавливать связь с любым другим элементом ансамбля. Сила таких далекодействующих связей определяется параметром ε . Связь устанавливается между текущим осциллятором с номером $i \in [1 : N]$ и осциллятором со случайно выбранным номером $I \neq i$. Составленная таким образом случайная сеть существует в течение фиксированного времени τ , после которого происходит обновление системы связей. Соответственно, индекс I в уравнении (1) – функция времени, принимающая случайные целочисленные значения, изменения которых происходят с периодом τ .

Для начала оценим влияние интервала τ на поведение системы (1) и выберем подходящее значение этого параметра. Его естественно сопоставить с характерным временным масштабом системы, которым является период колебаний в режиме однооборотного предельного цикла (T). Например, условие $\tau \ll T$ соответствует случаю быстроменяющихся связей, когда в течение одного периода функция $I(t)$ может поменять значение несколько раз. Другой крайностью является случай «замороженных связей»: $\tau \rightarrow \infty$, при котором переходные процессы успевают закончиться до перестройки системы связей и I можно рассматривать как постоянную величину. Поскольку при замороженных связях структура сети случайна и постоянна, динамика такой системы будет определяться конкретным выбором структуры связей и не будет воспроизводиться при следующих экспериментах. Соответственно, по одной временной реализации, даже очень длительной, нельзя судить о динамике такой системы. Между этими двумя крайними вариантами располагается случай, когда интервал стационарности принимает значения, близкие к характерному временному масштабу: $\tau \approx T$.

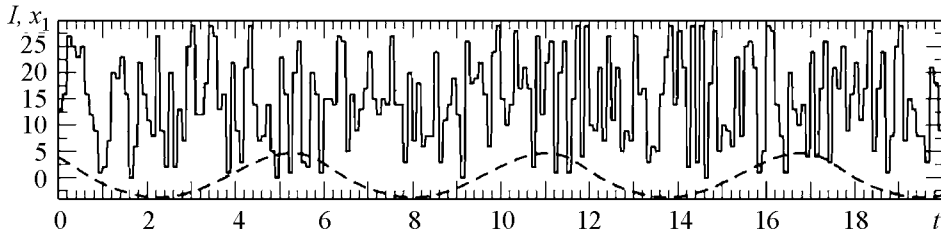


Рис. 4. Зависимость номера осциллятора, связанного с 1-м осциллятором ансамбля, от времени при $\tau = 0.1$. Для сопоставления на графике штриховой линией приведена временная реализация колебаний $x_1(t)$

Для того чтобы оценить влияние интервала τ , были проведены численные исследования с последовательно увеличивающимися значениями данного параметра. Они показали, что величина τ вплоть до очень больших, но конечных значений, практически не влияет на поведение системы (1). Поэтому в дальнейшем τ было фиксировано на значении 0.1, которое удобнее для численного эксперимента. Зависимость индекса I от времени для данного случая отобразена на рис. 4.

Итак, будем исследовать поведение системы (1) в зависимости от ε при фиксированном значении $\tau = 0.1$. Рассмотрим, к каким эффектам приводит введение глобальных связей, когда колебания в каждом из осцилляторов имеют простейший вид – периодические колебания с периодом T . Из анализа уравнений (1) ясно, что при синфазных колебаниях ($k = 0$) динамика системы не зависит от величины связи. Поэтому в качестве исходного режима нужно выбрать одну из пространственно-периодических мод с $k > 0$. Выберем в качестве исходного режима моду с длиной волны $\Lambda = N/2$, что соответствует $k = 2$ (см. рис. 1). Для этого установим значения параметров $c = 2.5$ и $\gamma = 0.005$, и выберем начальные условия из бассейна притяжения данной моды (способ выбора начальных условий приведен в работе [11]). Будем постепенно увеличивать коэффициент дальних связей ε , следя за происходящими изменениями в динамике системы. При малых ε , вплоть до $\varepsilon \simeq 0.0017$ никаких видимых изменений с данным режимом не происходит. Колебания остаются периодическими и пространственно-однородными. При $\varepsilon \simeq 0.0017$ пространственно-периодическая структура нарушается (рис. 5, а). Расчет текущих фаз колебаний показывает, что разность фаз между соседними осцилляторами для данного режима уже не является постоянной величиной: она флуктуирует вокруг среднего значения $\Delta\varphi = 4\pi/N$, как это показано на правой части рис. 5, а. Таким образом, появляется пространственная модуляция разности фаз вдоль цепочки. Изображенное на рисунке распределение разностей фаз не является стационарным, оно движется вокруг ансамбля с постоянной скоростью $v \simeq 0.005$. Это легко заметить, если построить зависимость $\Delta\varphi_i$ для двух разных моментов времени, отстоящих друг от друга на интервал $\Delta t = 500$ (отмечено штриховой линией на рис. 5, а). Соответственно, колебания характеризуются двумя временными масштабами: квазипериодом колебаний в каждом из осцилляторов и временем обхода фазового профиля вдоль кольца – то есть они становятся квазипериодическими.

Дальнейший рост параметра связи ведет к увеличению неоднородности в распределении фазы (увеличению глубины модуляции), что сопровождается выстраиванием осцилляторов в кластеры с синфазным поведением. При $\varepsilon = 0.00237$ колебания

в бóльшей части ансамбля становятся почти синфазными, а вся цепочка распадается на два кластера, границей между которыми являются «фазовые дефекты» – осцилляторы ансамбля, в которых значение разности фаз существенно отличается от разностей фаз между основной частью осцилляторов. Эта граница является подвижной, она вращается вдоль кольца с постоянной фазовой скоростью. Несмотря на то, что бóльшая часть осцилляторов ансамбля колеблется синфазно, за счет наличия дефектов суммарный набег фазы вдоль кольца сохраняется тем же, что и в исходном режиме, то есть равным 4π . Наконец, при $\varepsilon \simeq 0.0024$ происходит необратимый переход на колебательный режим с меньшим значением k : либо на синфазный режим с $k = 0$ (как правило), либо на режим с длиной волны, равной длине цепочки (достаточно редко). Последний случай представлен на рис. 5, *в*.

Описанная выше последовательность качественных изменений в динамике ансамбля воспроизводится и для других пространственных мод: $k = 1, 2, \dots, 7$. В каждом из случаев мы наблюдаем два перехода, каждый из которых происходит при определенном значении ε . При $\varepsilon < \varepsilon_t^{(k)}$ ($\varepsilon_t^{(k)}$ – пороговое значение ε для k -волны) наличие глобальных связей никак не проявляется на видимой динамике ансамбля. При $\varepsilon = \varepsilon_t^{(k)}$ происходит переход к квазипериодическим колебаниям, сопровождающийся модуляцией разности фаз, глубина которой растет с ростом ε . Рост неоднородности в распределении разности фаз вдоль цепочки сопровождается постепенным выравниванием фаз соседних осцилляторов и формированием кластеров синфазного поведения, границами между которыми являются «фазовые дефекты». Число кластеров и дефектов совпадает с индексом k . Наконец, при достижении еще одного порогового

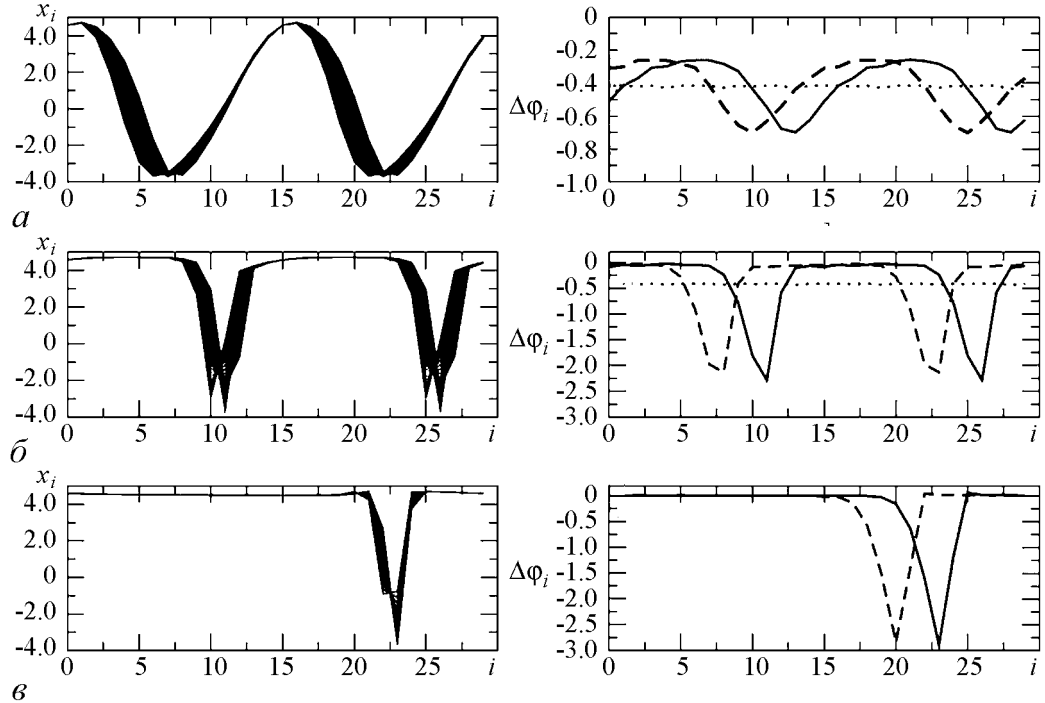


Рис. 5. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки при различных ε : 0.0017 (*a*), 0.00237 (*б*), 0.0024 (*в*). Штриховой линией отмечено распределение разности фаз вдоль ансамбля при $\Delta t = 500$

значения $\varepsilon = \varepsilon_c^{(k)}$ волна с данным k теряет устойчивость и траектория переходит на более длинноволновый режим, чаще всего на пространственно-однородный, при котором колебания во всех осцилляторах синфазны. Далее глобальные связи не оказывают никакого влияния на динамику системы, поскольку при $x_i = x_j$ все слагаемые, соответствующие связям в (1), обнуляются.

Для того чтобы количественно характеризовать глубину модуляции фазы вдоль цепочки, будем использовать величину среднеквадратичного отклонения разности фаз от ее среднего значения $\sigma = \sqrt{\langle \Delta\varphi_i^2 - \langle \Delta\varphi_i \rangle^2 \rangle}$ ($\langle \rangle$ – среднее по ансамблю осцилляторов). Графики зависимости σ от коэффициента глобальных связей для режимов с разными k построены на рис. 6. Из них ясно виден пороговый характер фазовой динамики: для каждого из типов колебаний существует свое значение $\varepsilon_t^{(k)}$, отмеченное на рисунке стрелкой, после которого начинается резкий рост σ . Последовательность критических значений $\varepsilon_t^{(k)}$ возрастает с ростом индекса k . От пространственного периода волны также зависит интервал значений ε , в котором наблюдаются квазипериодические колебания с данным k . При достижении следующего критического значения $\varepsilon = \varepsilon_c^{(k)}$ волна с данным индексом теряет устойчивость, и траектория необратимо переходит на другой режим, чаще всего на пространственно-однородный. На рис. 6 значения $\varepsilon_c^{(k)}$ отмечены стрелками со штриховыми линиями. Для волны с $k = 1$ этот интервал достаточно протяженный, а зависимость $\sigma(\varepsilon)$ плавная, в то время как для режимов с $k = 3$ или $k = 4$ система очень быстро переходит от пространственно-периодического к пространственно-однородному состоянию.

Рассмотрим теперь динамику системы в зависимости от соотношения между коэффициентами локальных и глобальных связей. Как показывают исследования, все описанные переходы наблюдаются и при других, отличных от $\gamma = 0.005$ значениях параметра связи, однако бифуркационные значения $\varepsilon_t^{(k)}$ и $\varepsilon_c^{(k)}$ при этом, естественно, меняются. На рис. 7 построены графические зависимости $\varepsilon_t^{(k)}(\gamma)$ и $\varepsilon_c^{(k)}(\gamma)$ для $k = 2, 3, 4$. Из рисунка видно, что область существования пространственно-периодического режима с заданным k ограничена линией l_k , которая представляет собой график зависимости критического значения $\varepsilon_t^{(k)}$ от γ . Кроме этого, на рисунке представлены линии L_k , ограничивающие области, где существует колебательный режим с набегом фазы вдоль кольца, равным $2\pi k$. Данные линии представляют

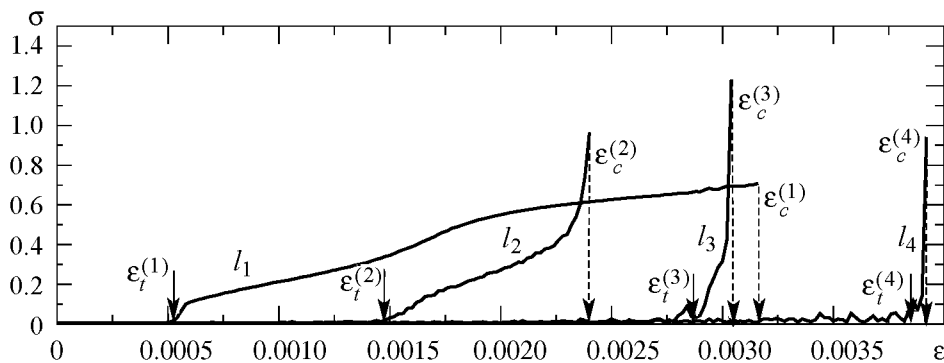


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичного отклонения разности фаз от ε

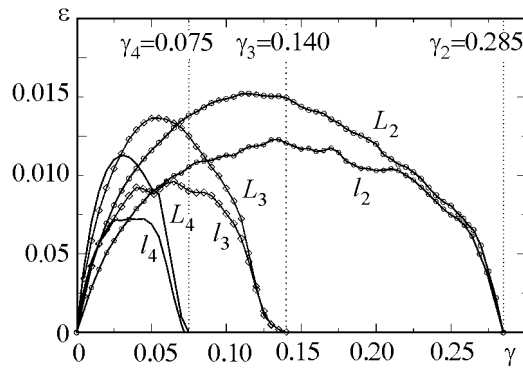


Рис. 7. Области существования различных пространственных мод на плоскости параметров $\gamma - \varepsilon$

собой графики $\varepsilon_c^{(k)}(\gamma)$. Все линии начинаются из точки с координатами $(0 : 0)$ и каждая из пар линий l_k, L_k сходится к точке с координатами $(\gamma_k : 0)$. Значения γ_k ($k = 2, 3, 4$) отмечены на рисунке вертикальными пунктирными линиями. Если сопоставить рис. 7 и рис. 3, то можно заметить, что значения γ_k представляют собой точки границы области существования режима $1C^k$ при заданном $c = 2.5$.

3. Влияние дальних связей на режимы с более сложными пространственными структурами

Представленные в предыдущем разделе результаты относятся к простейшим пространственным структурам, существующим в цепочке осцилляторов с периодическими граничными условиями – бегущим волнам. При усложнении временной динамики осцилляторов, которая происходит с ростом параметра c , в ансамбле возникают сложные неупорядоченные структуры. Эти структуры существуют на базе каждой из бегущих волн с заданным $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Рассмотрим, как спонтанные дальнедействующие взаимодействия осцилляторов влияют на данную пространственную организацию.

Рассмотрим систему (1) при $c = 3.05$, $\gamma = 0.005$, что соответствует предельному циклу удвоенного периода в каждом осцилляторе. Выберем в качестве примера одну из волн с $k = 2$, профиль которой показан на рис. 8, а. Как видно из рисунка, разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов более не является постоянной. Она «флуктуирует» вокруг среднего уровня в $\Delta\varphi^{(2)} = (4\pi)/N$, который отмечен на правом рисунке пунктирной линией. При «включении» дальнедействующих связей пространственное распределение в цепочке сохраняется, пока интенсивность связей не превышает пороговое значение $\varepsilon \simeq 0.0018$, после чего колебания становятся квазипериодическими (рис. 8, б). В распределении разности фаз появляется пространственная модуляция, которая накладывается на существующую ранее картину. На правой части рис. 8, б видны два характерных глобальных минимума, положение которых смещается вдоль ансамбля с постоянной скоростью. Как и в предыдущем случае, распределение разности фаз приведено на рисунке в два разных момента времени, различающихся на $\Delta t = 500$. При увеличении ε до $\varepsilon \simeq 0.002$ происходит необратимый переход на пространственный режим с набегом фазы вдоль цепочки, равным нулю. Однако данный режим также не является пространственно-однородным (рис. 8, в). Данная пространственная структура является чрезвычайно устойчивой. Она существует вплоть до $\varepsilon = 0.295$, то есть до значений величины глобальных связей, многократно превосходящих величину локальной связи $\gamma = 0.005$. Наконец, при $\varepsilon > 0.295$ происходит жесткий переход к пространственно-однородному состоянию (рис. 8, г).

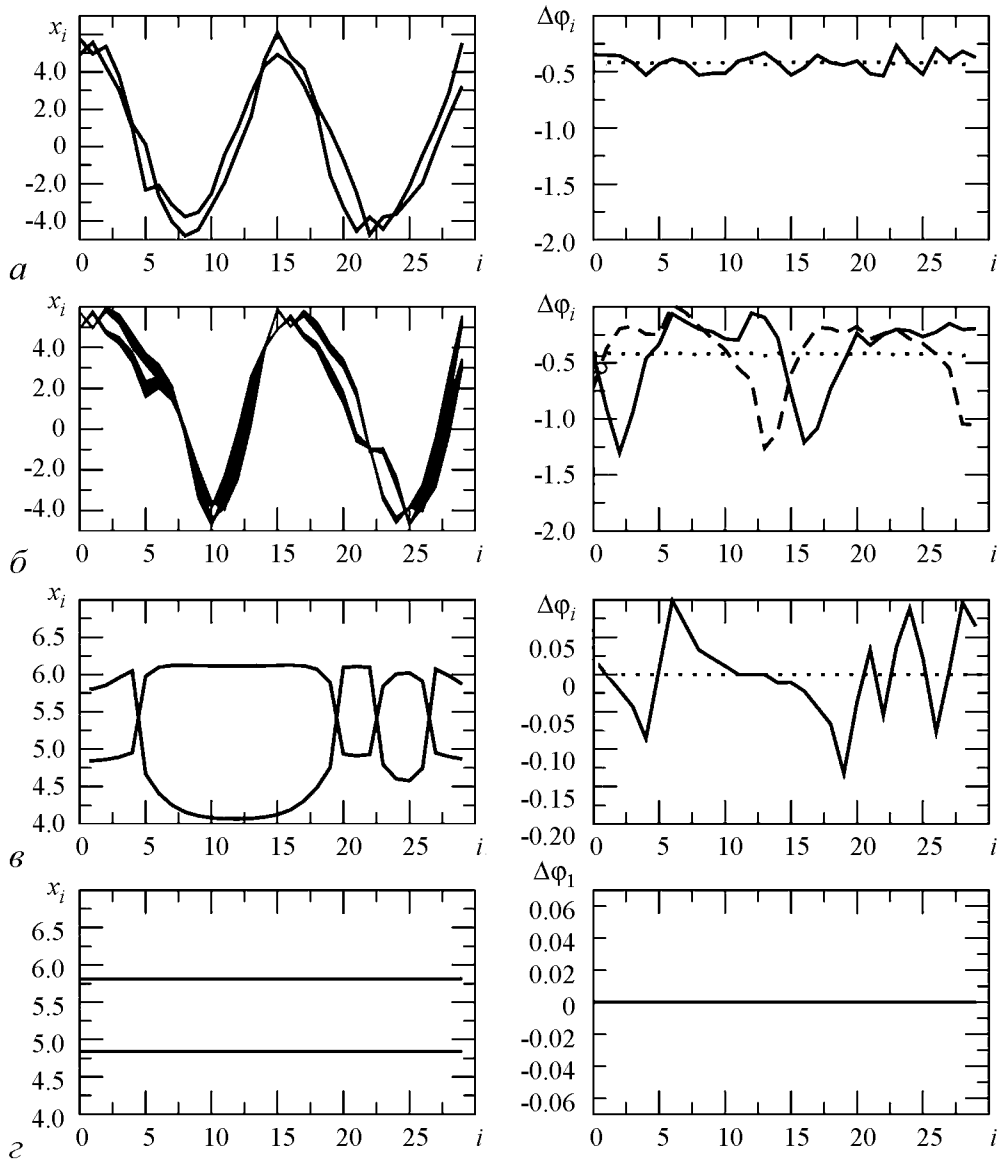


Рис. 8. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки при различных ε : 0.0017 (а); 0.0022 (б); 0.003 (в); 0.295 (г)

4. Влияние дальнедействующих связей на мультистабильность хаотических аттракторов

Рассмотрим теперь, что произойдет, если колебания в элементах ансамбля являются хаотическими. Выберем, например, режим развитого одноленточного хаоса. Для этого установим значения параметров $c = 4.6$, $\gamma = 0.005$.

При данных значениях параметров в фазовом пространстве сосуществует $N/2$ хаотических аттракторов, каждый из которых возник на базе одного из предельных циклов: $1C^0, 1C^{\pm 1}, \dots, 1C^{\pm 7}$. Соответственно, обозначим их $1A^0, 1A^{\pm 1}, \dots, 1A^{\pm 7}$. Здесь, как и для периодических режимов, верхний индекс в обозначении $1A^k$ ра-

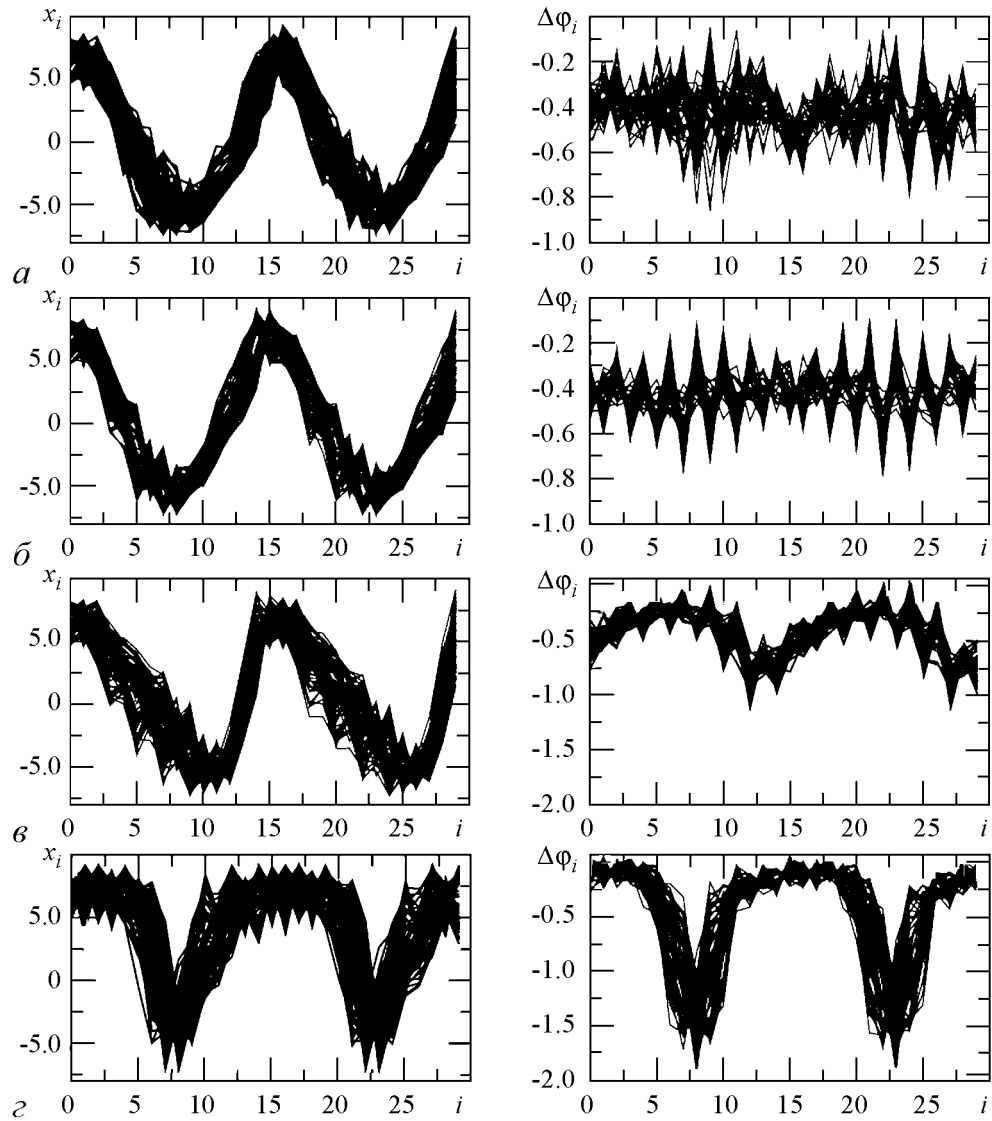


Рис. 9. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки (справа) для хаотического режима $1A^2$ при различных ϵ : 0 (*a*), 0.0015 (*б*), 0.0019 (*в*), 0.0026 (*г*)

вен суммарному набегу фазы вдоль цепочки осцилляторов, деленному на 2π . Выбор конкретного режима определяется начальными условиями. Для определенности выберем режим с $k = 2$, пространственный профиль которого и распределение разности фаз вдоль пространственной координаты показаны на рис. 9, *a*. Из рисунка видно, что значение разности фаз является случайной величиной, флуктуирующей относительно среднего значения $(4\pi)/N$.

Будем постепенно увеличивать коэффициент дальних связей. Включение дальнедействующих связей приводит, вначале, к периодической модуляции значения разности фаз вдоль цепочки (рис. 9, *б*). Затем, при $\epsilon \simeq 0.0018$ возникает длинноволновая пространственная модуляция разностей фаз, сходная с аналогичной модуляцией

для случая периодических колебаний. На эту длинноволновую модуляцию «накладываются» случайные флуктуации. Рост силы дальнедействующих связей ведет к увеличению глубины модуляции. При этом колебания в большинстве осцилляторов выравниваются по фазе: в цепочке появляется два кластера, внутри которых разность фаз флуктуирует вокруг нулевого значения, между которыми располагаются два «фазовых дефекта» (рис. 9, z). Наконец, при $\varepsilon > 0.0036$ происходит жесткий переход на пространственный режим с $k = 0$. Данный вид колебаний существует в достаточно широком диапазоне величин глобальной связи, до $\varepsilon \simeq 0.2$, после чего возникает режим пространственно-однородных хаотических колебаний, когда колебания во всех точках ансамбля происходят синфазно. Данный режим можно считать режимом полной синхронизации хаоса в ансамбле.

Заключение

В результате проведенных исследований обнаружено, что дальнедействующие случайные связи между элементами ансамбля разрушают мультистабильность и ведут к установлению в системе единственного режима пространственно-однородных колебаний. Данный эффект носит пороговый характер и имеет общие черты для колебаний с разной временной динамикой, как периодической, так и хаотической. Последовательность наблюдаемых переходов и бифуркационные значения параметров практически не зависят от интервала стационарности связей τ и определяются только силой связей ε . Общий сценарий наблюдаемых изменений в динамике системы следующий. Вначале, при достижении некоторого критического значения параметра связи появляется пространственная модуляция фазы колебаний, глубина которой растет с ростом параметра связи. В результате в цепочке возникает несколько кластеров с синфазными колебаниями, между которыми располагаются «фазовые дефекты». Данное распределение разности фаз движется вдоль цепочки с постоянной скоростью. Наконец, при достижении следующего критического значения происходит жесткий переход на пространственный режим с большей длиной волны (обычно с $\Lambda = N$ или $\Lambda = \infty$). При больших значениях коэффициента дальнедействующей связи в фазовом пространстве остается единственный пространственно-однородный режим, при котором колебания всех элементов являются синфазными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-01298-а).

Библиографический список

1. *Watt D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of «small-world» networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 440.
2. *Lago-Fernandes L.F., Huerta R., Corbacho F., Siguenza J.A.* Fast response and temporal coherent oscillations in small-world networks // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 2758.
3. *Barahona M., Pecora L.M.* Synchronization in small-world systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. 054101.

4. *Mori F., Odagaki T.* Synchronization of coupled oscillators on small-world networks // *Physica D.* 2009. Vol. 238. P. 1180.
5. *Wang X., Chen G.* Synchronization in small-world dynamical networks // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12. P. 187.
6. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П.* Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 2. С. 291.
7. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980.
8. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
9. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
10. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
11. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
12. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Журнал Технической Физики.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
13. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
14. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // *Радиотехника и Электроника.* 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
15. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Известия вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
16. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
17. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
18. *Matias M.A., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villa V.* Size instabilities in ring of chaotic synchronized systems // *Europhys. Lett.* 1997. Vol. 37. P. 379.
19. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 219.

20. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // *Physica D*. 2000. Vol. 128. P. 224.
21. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895.
22. *Шабунин А.В., Астахов В.В.* Фазовая мультистабильность в ансамбле генераторов с удвоениями периода // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 6. С. 99.
23. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
24. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // *Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов*. Изд. Нижегородского университета, 1991. С. 84.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*12.11.2012
31.01.2013*

RANDOM DISTANT COUPLINGS INFLUENCE TO A SYSTEM WITH PHASE MULTISTABILITY

A. V. Shabunin

We explore the destruction of phase multistability which takes place in an ensemble of period doubling oscillators under the action of long-distance couplings, which appear randomly between the arbitrary cells. The investigation is carried out on the example of a chain of Rossler's oscillators with periodic boundary conditions, where alongside with local couplings between the elements exist long-range interconnections. The sequence of bifurcations, which accompany increasing of the strength of the global coupling is determined.

Keywords: Phase multistability, synchronization, networks.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 60 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru