

НОВЫЙ ТИП БИФУРКАЦИЙ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ О КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА

И. А. Судаков, С. А. Вакуленко, Т. Г. Сукачева

Классическая конвекция Рэля–Бенара является стандартным примером системы, в которой при изменении управляющего параметра возникают бифуркации. В данной статье рассматривается модифицированная задача о конвекции Рэля–Бенара, включающая радиационные эффекты и источник газа на поверхности. В такой формулировке в указанной задаче возникает новый тип бифуркаций, помимо хорошо известных ячеек Бенара. Данная задача имеет большое значение для математической теории климата, так как обосновывает возникновение «критической точки» климатической системы, связанной с эмиссией парниковых газов в атмосферу Земли.

Ключевые слова: Конвекция Рэля–Бенара, бифуркации, радиация, эмиссия газа, критическая точка, климат.

Введение

Явлению термогравитационной конвекции обязаны многие атмосферные и климатические процессы, поэтому развитие теории конвекции является важной задачей, широко востребованной в математической теории климата. Современная точка зрения на климатическую систему как на динамическую систему [1], а на климат – как на статистический ансамбль состояний, проходимых климатической системой за промежутки времени в несколько десятилетий [2], способствует применению различных методов математического анализа и математического моделирования для описания эволюции климатической системы.

Применение идей теории динамических систем к климатическим задачам началось после работ Э. Лоренца (1963) [3]. Исследуя конвективное движение газа в атмосфере, и применив метод Галеркина к системе типа Буссинеска, он ввел систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, известную теперь как система Лоренца. Далее им был изучен так называемый странный аттрактор Лоренца – компактное инвариантное множество L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока, которое имеет определённую сложную топологическую структуру и является асимптотически устойчивым [4]. Система Лоренца привлекла внимание крупных

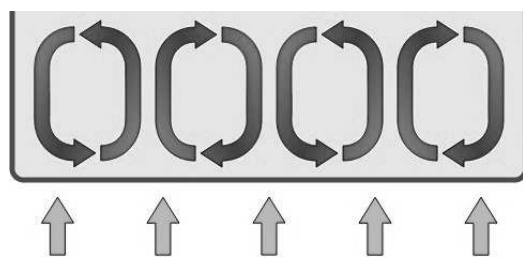


Рис. Ячейки Бенара в гравитационном поле – возникновение упорядоченности в виде конвективных ячеек в форме правильных шести-гранных структур в слое вязкой жидкости с вертикальным градиентом температуры

С 50-х годов XX века интерес к изучению климата методами теории динамических систем несколько упал вследствие перехода от аналитических моделей климата к достаточно сложным комплексным численным моделям всей земной системы. Из работ этого периода можно выделить работу Р. Гуди (1956), предложившего радиационно-конвективную модель атмосферы [6], устойчивость которой в последующем изучал В. Ларсон (1999) и подтвердил существование в ней ячеек Бенара [7] (см. рисунок).

Радиационно-конвективная модель Гуди моделирует конвекцию Рэлея–Бенара в пограничном слое атмосферы с учетом теплового переноса излучения, при этом учитывается основной температурный профиль в вертикальном направлении, а также радиационное затухание. Как известно, возникновение конвекции Рэлея–Бенара служит простым примером механической неустойчивости и турбулентности газа. Однако в моделировании климата моделям атмосферы на основе конвекции Рэлея–Бенара уделяется достаточно мало внимания, потому что такие модели не включают описание теплового переноса излучения, тогда как в реальной радиационно-конвективной атмосфере радиационное излучение в значительной степени определяет основное её состояние, а также затухание температурных возмущений.

В основополагающих работах [6, 8, 9] исследовался слой газа, который заключен между параллельными пластинами при заданных температурах, конвекция в котором происходит по типу Рэлея–Бенара. Кроме того, учтен тепловой перенос излучения, однако температура верхней пластины фиксирована. Отметим, что данная модель имеет некоторые преимущества над комплексными моделями атмосферы. Во-первых, работоспособность данной модели была проверена путем лабораторных экспериментов, о чем свидетельствует работа [8]. Во-вторых, результаты моделирования можно сравнить непосредственно с подобными моделями конвекции Рэлея–Бенара, выделяя таким образом эффект влияния теплового переноса излучения на конвективную устойчивость. В работах [10–12] отмечено, что введение в модель радиации оказывает два стабилизирующих воздействия на возникновение конвекции Рэлея–Бенара. Во-первых, радиационное затухание ведет к уменьшению малых температурных возмущений. Во-вторых, радиация приводит к более устойчивому температурному градиенту для основных состояний профиля температуры в исследуемой области.

Гуди [6, 8, 9] использовал вариационные методы и двухпотоковую радиационную модель, чтобы найти критические условия линейной устойчивости. Он рассматривал пределы оптически тонких и толстых газов и свободное скольжение, оптиче-

специалистов по теории динамических систем, что способствовало её детальному изучению (например, Дж. Гукенхеймер, 1976), однако строгое доказательство существования хаоса в этой модели было получено лишь в 1999 году В. Такером [5].

С 50-х годов XX века интерес к изучению климата методами теории динамических систем несколько упал вследствие перехода от аналитических моделей климата к достаточно сложным

ски черные границы. В следующих работах рассматриваются более реалистичные системы, и делаются дальнейшие расчеты. В [13,14] был рассчитан полный спектр оптических толщин, доказана смена устойчивости для линейного состояния основного профиля температуры и представлен приблизительный критерий устойчивости в форме радиационного числа Рэлея. Некоторыми авторами [7] были изучены отдельные вклады основного состояния профиля температуры и радиационного затухания в конвективную устойчивость и сделаны расчеты для вертикального потока тепла при возникновении конвекции. Например, некоторые авторы рассчитывали граничные коэффициенты излучения. В [7,15] была изучена модель Гуди в пределе почти прозрачного газа. В этой работе получены два основных результата: во-первых, модель Гуди упрощена в пределе, когда коэффициент тепловой диффузии стремится к нулю, и было получено полное аналитическое решение задачи линейной стабильности. Линейный порог стабильности в точности определяется единственным параметром (радиационным числом Рэлея), который напоминает число Рэлея, используемое для характеристики конвекции Рэлея–Бенара [16–18]. Во-вторых, изучена нелинейная устойчивость решений для модели Гуди.

В настоящем исследовании предлагается распространить радиационно-конвективную модель атмосферы на случай существования постоянного динамического источника на земной поверхности, из которого эмитирует парниковый газ, и провести её бифуркационный анализ. В такой постановке это, прежде всего, позволит выявить новый тип бифуркаций в модифицированной задаче о конвекции Рэлея–Бенара, помимо ячеек Бенара. Кроме того, данное исследование имеет важное прикладное значение: модифицированная модель может быть применена для изучения эмиссии метана из вечной мерзлоты в атмосферу [19]. Метан – опасный парниковый газ; его влияние на дополнительный разогрев атмосферы в двадцать один раз больше, чем у углекислого газа. Огромный метановый пул захоронен в виде газогидратов в вечной мерзлоте. В связи с изменением климата вечная мерзлота оттаивает, и метан поступает в атмосферу, где влияет на ее разогрев. Это еще больше усиливает оттаивание мерзлоты, благодаря явлению положительной обратной связи. Таким образом, это явление ведет климатическую систему к прохождению точки бифуркации, идентификация которой является на сегодняшний день достаточно актуальной задачей.

1. Классическая модель Гуди и её обобщение

Модель, которая исследована в настоящей работе, рассматривает атмосферу в области типа бесконечной пластины, ограниченной верхней и нижней твердыми, свободными от скольжения границами. Ненулевой адиабатический градиент скорости $\Gamma_* = g_*/c_{P*}$ (здесь обозначаем звездочками размерные величины) входит в уравнения, так как вертикальный градиент имеет большое значение для моделирования процессов в атмосфере. Тепловое излучение поглощается, но не рассеивается в газе. Предположим, что рассматриваемая система – радиационно-серое тело, то есть ее оптические свойства считаются независимыми от длины волны излучения. Рассмотрим только прозрачные слои газа, то есть слои газа с малой оптической глубиной.

Следуя [7,15], запишем в аппроксимации Обербека–Буссинеска уравнение движения:

$$\mathbf{v}_{*t} + (\mathbf{v}_* \nabla_*) \mathbf{v}_* = -\frac{1}{\rho_*} \nabla_* P_*' + g_* \alpha_{\theta_*} \theta_*' \mathbf{z} + \nu_* \nabla_*^2 \mathbf{v}_*, \quad (1)$$

где \mathbf{v}_* – скорость, θ_*' – отклонения температуры от некоторого основного уровня $\bar{\theta}_*$, P_* – давление, t_* – время, ρ_* – постоянная, относящаяся к плотности, α_{θ_*} – постоянный коэффициент объемного расширения, z – компонента вертикального вектора, ν_* – кинематическая вязкость и g_* – гравитационная постоянная.

Уравнение теплопроводности:

$$\theta_{*t} + (\mathbf{v}_* \nabla_*) \theta_* + \omega_* \Gamma_* = -\frac{1}{\rho_* c_{P_*}} \nabla_* \mathbf{F}_* + k_* \nabla_*^2 \theta_*. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \bar{\theta}_* + \theta_*'$ – общая температура, полученная путем сложения температуры в равновесном состоянии и температуры после перехода из этого состояния, ω_* – вертикальная компонента скорости \mathbf{v}_* , \mathbf{F}_* – радиационный поток, c_{P_*} – удельная теплоемкость при постоянном давлении, адиабатический градиент скорости $\Gamma_* = g_*/c_{P_*}$, k_* – коэффициент теплопроводности.

В приближении Обербека–Буссинеска уравнение неразрывности имеет вид

$$\nabla_* \mathbf{v}_* = 0. \quad (3)$$

Следуя [15], введем новые безразмерные переменные и перепишем уравнения (1)–(3) для модели Гуди в безразмерной стандартной форме в приближении Обербека–Буссинеска с учетом действия внешней периодической силы и записи некоторых физических констант для удобства проведения последующих вычислений

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \sigma \Delta \mathbf{v} - \gamma \nabla P + f(x, y, z, t) + \sigma_1 (\theta - \Theta_0) \mathbf{z}, \quad (4)$$

$$\theta_t + (\mathbf{v} \nabla) \theta + \omega \Gamma = \Delta \theta - \nabla \mathbf{F} + Q, \quad (5)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), \omega(x, y, z, t))$ – скорость потока газа с вертикальной компонентой ω , $\theta(x, y, z, t)$ – температура потока, P – давление, C – концентрация эмитирующего газа (фактически, примесей), Γ – безразмерный адиабатический градиент, σ – число Прандтля, σ_1 – параметр плавучести, \mathbf{z} – единичный вектор в вертикальном направлении, $\Theta_0 = \theta_{m*}$ – основное температурное состояние $\bar{\theta}$, вычисленное в средних точках слоя, f – внешняя сила, γ – коэффициент, подобный числу Рэлея, который умножается на член, описывающий плавучесть в уравнении движения, \mathbf{F} – радиационный поток и Q – тепловой источник. Для простоты предположим, что движение происходит в тонком слое Ω , определенном как $0 < z < h$, $(x, y) \in \Pi$, здесь Π – плоский прямоугольник с размерами l_1, l_2 .

Уравнение радиационного потока \mathbf{F} может быть получено путем аппроксимации Эддингтона для уравнения Шварцшильда [20–23]. В результате

$$\nabla(\alpha^{-1} \nabla \mathbf{F}) - 3\alpha \nabla \mathbf{F} = 3\nabla \theta, \quad (7)$$

где предполагается, что α является достаточно малой постоянной, пропорциональной коэффициенту поглощения излучения в единицу объема. Тогда (7) может быть упрощено

$$-\nabla \mathbf{F} = 3\alpha\theta. \quad (8)$$

В самом деле, подстановка (8) в (7) дает, что (7) удовлетворяется с точностью до слагаемых порядка $o(\alpha^2)$. Тогда (5) примет вид

$$\theta_t + (\mathbf{v}\nabla)\theta + \omega\Gamma = \Delta\theta - 3\alpha\theta + Q. \quad (9)$$

Это уравнение уже не содержит радиационный поток. Таким образом, основные уравнения для модели даются формулами (4), (6) и (9). Расширим эту модель, включая уравнение для конвекции, деградации и диффузии газа, поступающего с поверхности (фактически этими процессами моделируется поведение любого парникового газа, поступающего с земной поверхности в атмосферу)

$$C_t + (\mathbf{v}\nabla)C = d\Delta C - b_0^2 C, \quad (10)$$

где $C(x, y, z, t)$ является концентрацией эмитирующего газа, b_0^2 – положительная постоянная (член $-b_0^2 C$ описывает деградацию молекул газа в атмосфере в результате химических реакций), d – коэффициент диффузии эмитирующего газа.

Уравнение (10) может быть решено, если известна скорость потока в сплошной среде \mathbf{v} и уравнения θ , \mathbf{v} и C независимы [24,25]. Для описания влияния газа на циркуляцию в рассматриваемой системе, предполагается, что коэффициент α в (9) зависит от C : $\alpha = \alpha(C)$. Так как концентрация газа C очень мала (исходя из физических соображений), естественно предположить, что эта зависимость линейная. Тогда, используя ряд Тейлора для α , получим

$$\alpha \approx \alpha_0 + \alpha_1 C, \quad (11)$$

где α_0, α_1 – постоянные; α_1 – феноменологический коэффициент, который может быть определен путем анализа экспериментальных данных. Тогда уравнения (4), (6), (9) и (10) становятся взаимосвязанными и, следовательно, эта система может описывать обратную связь между сплошной средой (скорость потока, температурные поля) и концентрацией газа.

Рассмотрим граничные условия. Условия для \mathbf{v} – это стандартные условия отсутствия скольжения

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=0} = \mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=h} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия для температуры θ имеют вид

$$\theta_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \theta_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0 \quad (13)$$

и означают отсутствие потока на границе.

Граничные условия для C описывают отсутствие потока газа при $z = h$ и задают поток газа с поверхности $z = 0$:

$$\begin{aligned} C_z(x, y, z, t)|_{z=h} &= 0, \\ C_z(x, y, z, t)|_{z=0} &= -\mu(x, y, \theta(x, y, 0, t)), \end{aligned} \quad (14)$$

где μ –функция, которая описывает интенсивность потока газа с поверхности. Предполагается, что этот поток, вообще говоря, неоднороден в пространстве и зависит от температуры. Для упрощения математического анализа используем периодические граничные условия по x, y . Если $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \mathbf{v}(x + l_1, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y + l_2, z, t), \\ P(x, y, z, t) &= P(x + l_1, y, z, t) = P(x, y + l_2, z, t), \\ \theta(x, y, z, t) &= \theta(x + l_1, y, z, t) = \theta(x + l_2, y, z, t). \end{aligned} \quad (15)$$

В зависимости от вида функции μ возможны различные ситуации. Можно предположить, следуя реальным физическим ситуациям (например, парниковый газ, поступающий в атмосферу, образовывается за счет биохимических процессов), что имеет место соотношение типа Аррениуса

$$\mu(x, y, t) = g(x, y) \exp\left(-\frac{V_0}{k_B \theta}\right), \quad (16)$$

где V_0 является потенциальным барьером для химической реакции образования газа, k_B – постоянная Больцмана. Здесь будем считать, что газ с поверхности поступает не сплошным потоком, а из динамических отверстий (подобно тому, как метан поступает в атмосферу из мерзлотных озер [26]), тогда можно предположить, что

$$g(x, y, t) = c_g \sum_{i=1}^N \chi_V \Omega_i(t),$$

где c_g – константа, Ω_i – двумерная область, занятая i -м отверстием, и χ_V является характеристической функцией множества V : $\chi_V = 1$, если $(x, y) \in V$ и $\chi_V = 0$ в противном случае. Обратим внимание, что области Ω_i могут медленно меняться, тогда необходимо рассматривать случай, когда g зависит от времени. Основываясь на физических соображениях, будем считать, что изменение формы отверстий (по аналогии с мерзлотными озерами) идет медленно [26]: $\Omega_i = \Omega_i(\tau)$, где τ является медленным временем $\tau = \varepsilon_1 t$, $\varepsilon_1 \ll 1$, и возможно предположить, что в первом приближении Ω_i – фиксированные области.

2. Существование и единственность решения краевой задачи

Опишем общий подход, который позволяет доказать существование и единственность решения для системы дифференциальных уравнений (4), (6), (9)–(11) с краевыми условиями (12)–(16). Этот подход хорошо известен – см. [27,28].

Функциональные пространства. Определим некоторые функциональные пространства. Обозначим через $B_{\alpha,p}$ стандартные интерполяционные пространства

$$B_{\alpha,p} = \left\{ \omega : \|\omega\|_{\alpha,p} = \|(I - \Delta_D)^\alpha \omega\|_p < \infty \right\},$$

где Δ_D – оператор Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле и символ $\|\dots\|$ обозначает норму функции. Интерполяционные пространства $B_{\alpha,p}$ тесно связаны со стандартными пространствами Соболева. Их теория подробно изложена в [27,29].

Краевая задача как абстрактное эволюционное уравнение. Обозначим через u тройку (v, θ, C) и $V_{\alpha, p}$ – пространство векторных полей (v_1, v_2, v_3) . Предполагается, что каждый компонент лежит в соответствующем функциональном пространстве: $v \in V_{\alpha, p}$ и θ, C лежат в $B_{\alpha, p}$. Для реализации стандартной схемы доказательства существования решений уравнения (4) скорости потока будем применять определенный для данной задачи оператор Лере P [27, 30]. Обратим внимание, что $P \nabla P = 0$, поэтому этот метод исключает давление [27, 31]. В результате можно переписать всю систему как эволюционное уравнение:

$$u_t = Au + F(u) + f(t), \quad (17)$$

где A – некоторый самосопряженный отрицательно определенный оператор $A = (\sigma P \Delta, \Delta, d\Delta)^{tr}$, F определяет другие нелинейные и линейные члены, которые не входят в A , $\text{tr}(u)$ – след функции на нижней границе s , подчиняющийся следующему вложению [31]: $\|\text{tr}(u)\|_{L_p(s)} \leq c \|u\|_{\alpha, p}$, $\alpha > 1/2p$.

Локальное существование. Чтобы показать локальное существование решений во времени, применим стандартный подход [27]. Выберем такие p, α , что

$$C^s(\Omega) \subset B_{\alpha, p}, \quad 0 \leq s < 2(\alpha - 1/p).$$

Тогда $\sup |\nabla \theta| < C \|\theta\|_{\alpha, p}$, если $\theta \in B_{\alpha, p}$. Это показывает, что отображение $\theta \rightarrow (v \nabla) \theta$ является C^1 -отображением из $B_{\alpha, p}$ в L_p . Аналогично, для отображения $C \rightarrow (v \nabla) C$. Таким образом, F является C^1 -отображением из $V_{\alpha, p} \times B_{\alpha, p}^2$ в $V_{0, p} \times L_p^2$. Это доказывает существование локальных (по времени) решений (17).

Априорные оценки. Описанная выше конструкция позволяет доказать существование решений краевой задачи на ограниченном интервале времени. Чтобы показать, что на самом деле решения краевой задачи существуют для всех t , необходимо получить априорную оценку решений. Допустим, что имеет место

Лемма. Пусть функция $\mu \geq 0$, $\mu \in C^1$ ограничена в θ :

$$\sup_{x, y \in \Omega, \theta \in (0, +\infty)} \mu(x, y, \theta) < c_0 < \infty$$

и внешние источники и силы $Q, f \in C^0$ определены так, что

$$\begin{aligned} \sup_{x, y \in \Omega, t > 0} Q(x, y, z, t) &= q_0 < \infty, \quad Q \geq 0, \\ \sup_{x, y \in \Omega, t > 0} |f(x, y, z, t)| &= f_0 < \infty. \end{aligned}$$

Тогда поля концентрации эмитирующего газа C и температуры θ равномерно ограничены.

Доказательство. Учитывая, что $\sup_{x, y, z} \theta(x, y, z, 0) = M_0$, при помощи верхних и нижних решений [32] можно легко доказать, что

$$0 < \theta(x, y, z, t) \leq \max \{M_0, q_0(3\alpha_0)^{-1}\} = M_1 \quad \text{и} \quad 0 < C(x, y, z, t) < c_0 z,$$

если начальные поля θ , $C(x, y, z, t)$ положительны при всех $(x, y, z) \in \Omega$. Если температура θ равномерно ограничена, тогда уравнение для скорости потока дает стандартную оценку

$$\frac{d \|\mathbf{v}\|^2}{2dt} \leq -\sigma \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c_0 M_0 \|\mathbf{v}\| + \sup |f(x, y, z, t)| \|\mathbf{v}\|,$$

что в соответствии с рассуждениями [32] доказывает, что норма $\|\mathbf{v}(t)\|$ ограничена по t .

Таким образом, предложенная модель является корректной, и соответствующая краевая задача хорошо поставлена. Сформулируем теорему, которая является итоговым результатом данного раздела и следует из рассуждений, приведенных выше.

Теорема. Пусть выполнены условия Леммы. Тогда решение краевой задачи (4)–(16) существует и единственно при всех $t \in (0, \infty)$ и лежит в пространстве $B_{\alpha,p}^3 B_{\alpha,p} B_{\alpha,p}$ (то есть $\forall t > 0$, $\theta \in B_{\alpha,p}$, $C \in B_{\alpha,p}$, $v_j^{(t)} \in B_{\alpha,p}$, $j = 1, 2, 3$), $\alpha > 1/p$.

Соотношение для средней температуры. Сначала получим некоторые интегральные соотношения для средней температуры $\langle\langle \theta \rangle\rangle$, где $\langle\langle f \rangle\rangle$ обозначает значения функции f , усредненной по всей области Ω : $\langle\langle f \rangle\rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f$ и $|\Omega| = hl_1 l_2$ – объем элементарной периодической ячейки. Проинтегрируем уравнение теплопроводности (9) по Ω . Предполагая, что нет источников на границах, проинтегрируем по частям, и, учитывая граничные условия, получаем

$$\frac{d \langle\langle \theta \rangle\rangle}{dt} = -3 \langle\langle (\alpha_0 + \alpha_1 C) \theta \rangle\rangle + \langle\langle Q \rangle\rangle.$$

Тогда вклад эмитирующего газа определяется как

$$R_{\text{met}} = -3\alpha_1 \langle\langle C\theta \rangle\rangle. \quad (18)$$

Используя эти балансовые соотношения и имеющиеся экспериментальные данные, можно найти коэффициент α_1 .

3. Бифуркационный анализ обобщенной модели Гуди

Здесь возможны несколько различных ситуаций. Для их описания введем безразмерный параметр

$$k = \frac{V_0}{k_B \theta_0},$$

который определяет типичные скорости эмиссии газа, когда выполняется соотношение типа Аррениуса. Здесь θ_0 является температурой на поверхности. Будем считать, что $\alpha_1 = \varepsilon$ – малый параметр в теории возмущений, что позволяет оценить R_{met} .

Существует три основных возможных случая.

I. Параметр k ограничен, и система находится далеко от точки бифуркации.

II. Параметр k ограничен, и система близка к точке бифуркации.

III. Параметр k имеет достаточно большие значения, и система близка к точке бифуркации.

Случай I (система вдали от точки бифуркации). Фактически, цель этого раздела состоит в построении теории возмущений, что позволяет получить систему уравнений для некоторого X_i и вычислить X_i , оценивая влияние эмитирующего газа на динамику системы. Это подход из теории возмущений, основан на том, что концентрация этого газа мала (как и в реальных физических ситуациях).

Пусть отверстия, из которых эмитирует газ, имеют относительно малый диаметр r_i по отношению к размерам l_1, l_2 области П. Таким образом, можно предположить, что температура $\theta(x, y, 0, t)$ является постоянной внутри всей области отверстия. Обозначим усредненное значение через $\theta(x, y, 0, t)$ для i -го отверстия $W_i(t)$, тогда формально получим

$$W_i = \text{area}(\Omega_i)^{-1} \iint_{\Omega_i} \theta(x, y, 0, t) \chi_{\Omega_i}(x, y) dx dy.$$

Кроме того, представим неизвестные функции в виде суммы основного вклада (переменные с индексом «0») и малых поправок, тогда основные условия для \mathbf{v}_0 могут быть найдены из (4), (6) и (9) и из уравнения переноса тепла при $\alpha = \alpha_0$:

$$\theta_{0t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \theta_0 + \omega_0 \Gamma = \Delta \theta_0 - 3\alpha_0 \theta_0.$$

Следующим шагом является решение краевой задачи для C :

$$C_t + (\mathbf{v}_0 \nabla) C = d\Delta C - b_0^2 C, \quad (19)$$

$$C_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (20)$$

$$C_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t)}\right) \sum_{i=1}^N \chi_{\Omega_i}. \quad (21)$$

Явные решения (19)–(21) можно найти только в некоторых частных случаях. Рассмотрим случай, когда невозмущенный поток газа стационарен во времени и внешняя сила отсутствует. Тогда вспомогательная краевая задача запишется так:

$$G_{it} + (\mathbf{v}_0 \nabla) G_i = d\Delta G_i - b_0^2 G_i,$$

$$G_{iz}(x, y, z, t)|_{z=h} = 0,$$

$$G_{iz}(x, y, z, t)|_{z=0} = \delta(t) \chi_{\Omega_i}(x, y).$$

Здесь решение для C может быть выражено через G_j :

$$C(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t G_i(x, y, z, t - t') \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t')}\right) dt'. \quad (22)$$

Подставляя соотношение (22) в (18), получаем

$$R_{\text{met}}(t) = -3\alpha_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \langle\langle G_i(x, y, z, t - t') \theta_0(x, y, z, t) \rangle\rangle \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t')}\right) dt'.$$

В следующем пункте рассмотрим ситуацию вблизи бифуркации, когда данный подход нуждается в модификации.

Случай II. Система около точки бифуркации. Фундаментальные вариационные соотношения, полученные В.С. Сорокиным в 1954 году [33], а также в работах [34–36], могут быть применены в данном исследовании, что позволяет оценить влияние эмиссии газа с поверхности на бифуркацию в рассматриваемой системе. Положим $\mathbf{F}, Q = 0$ и удалим нелинейные члены из основных уравнений Навье–Стокса (4), (6) и (9). Постулируем, что основное состояние системы дано соотношениями $\mathbf{v}_0 = 0$, температура $\theta_0 = \bar{T}(z) = \bar{b}z + \bar{a}$, радиационный поток $\mathbf{F} = F(z)\mathbf{z}$, и радиационный коэффициент поглощения α является постоянным, $\alpha = \alpha_0$. Получим уравнения, линеаризованные вблизи основного решения

$$\mathbf{v}_t = \sigma\Delta\mathbf{v} - \nabla P + \sigma_1\theta\mathbf{z}, \quad (23)$$

$$\theta_t = \Delta\theta + \omega(\gamma - \Gamma) - 3\alpha_0\theta, \quad (24)$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0. \quad (25)$$

При этих предположениях скорость потока и тепловых полей можно определить с точностью до малых значений при помощи нормальных мод [15, 34], при этом $\mathbf{V}(x, y, z)$, $\theta = T(x, y, z)$ являются собственными функциями некоторого линейного оператора L [7, 34], действующего на малые поправки \mathbf{v} , θ . Если рассмотреть линеаризованные уравнения (предполагаем, что внешняя сила равна нулю, тепловой источник тоже ноль и члены $\alpha_1 C$ пренебрежимо малы), то $X(t) = X(0)\exp(-\lambda t)$, где $X(t)$ является неизвестной функцией времени, определяющей временную эволюцию, λ – в общем случае, комплексное собственное значение $\lambda = \beta + i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$. Точки бифуркации определяются условием $\beta = 0$.

Теперь можно получить некоторые важные вариационные отношения для λ , повторяя известные расчеты В.С. Сорокина [33, 34] применительно к (23)–(25), и тогда для скорости потока $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ и температуры T имеют место соотношения:

$$-\lambda\mathbf{V} = \sigma\Delta\mathbf{V} - \nabla P + \sigma_1 T\mathbf{z}, \quad (26)$$

$$-\lambda T = \Delta T + V_3(\gamma - \Gamma) - 3\alpha T, \quad (27)$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0. \quad (28)$$

Умножим (26) на комплексно-сопряженную V^* и (27) на T^* . Тогда получим два соотношения, обобщающие известные соотношения для конвекции Рэлея–Бенара [33]:

$$\begin{aligned} -\lambda \int_{\Omega} |\mathbf{V}|^2 dv &= -\sigma \int_{\Omega} |\text{rot } \mathbf{V}|^2 dv + \sigma_1 \int_{\Omega} T\mathbf{z}\mathbf{V}^* dv, \\ -\lambda \int_{\Omega} T^2 dv &= - \int_{\Omega} (|\nabla T|^2 + 3\alpha T^2) dv + \gamma' \int_{\Omega} T^* \mathbf{z}\mathbf{V} dv, \end{aligned}$$

где $dv = dx dy dz$ и $\gamma' = \gamma - \Gamma$. Комбинируя эти соотношения, при некоторых условиях получаем $\text{Im } \lambda = 0$ (следовательно, здесь нет колебаний по времени). Далее, следуя

В.С. Сорокину [33], можно получить, что

$$-\lambda \int_{\Omega} (|\mathbf{V}|^2 - \gamma'^{-1} \sigma_1 |\nabla T|^2) dv = \int_{\Omega} -\sigma |\text{rot } \mathbf{V}|^2 + \gamma'^{-1} \sigma_1 (3\alpha_0 |T|^2 + |\nabla T|^2) dv + H_0,$$

$$H_0 = 3\gamma'^{-1} \sigma_1 \alpha_1 \int_{\Omega} \bar{C} |T|^2 dv.$$

Для малых α_1 этот вклад описывает сдвиг собственного значения линейного оператора задачи благодаря эмиссии газа с поверхности. Заметим, что этот сдвиг имеет довольно простую форму и может иметь любой знак. Следовательно, он описывает либо ускорение, либо замедление релаксационного процесса вблизи точки бифуркации. Это соотношение также позволяет найти небольшой сдвиг значений бифуркационного параметра.

Величина H_0 может быть вычислена в ряде случаев, когда возможно получить некоторые выражения для \bar{C} . При условии, что конвективный член мал, можно это выражение найти из уравнения

$$d\Delta \bar{C} - b_0^2 \bar{C} = 0$$

при граничном условии

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \mu(x, y, \theta_0),$$

где функция μ определена в (16).

Если параметр b_0 мал по отношению к \sqrt{d} , то концентрация газа достаточно однородна и возможно получить новое соотношение для

$$H_0 = 3\gamma'^{-1} \sigma_1 \alpha_1 \langle\langle \bar{C} \rangle\rangle \int_{\Omega} |T|^2 dv, \quad (29)$$

где $\langle\langle \bar{C} \rangle\rangle$ является усредненной концентрацией примесей газа в системе. Для малых возмущений $\delta_{\text{met}} \lambda$ параметра релаксации λ , связанных с воздействием эмитирующего газа, получаем

$$-\delta_{\text{met}} \lambda = H_0 K^{-1}, \quad K = \int_{\Omega} (|\mathbf{V}|^2 - \gamma'^{-1} \sigma_1 |T|^2) dv^{-1}.$$

В заключение этой части обратим внимание, что интеграл в (29) всегда положителен. Таким образом, видно, что, если состояние системы близко к точке бифуркации, в обоих случаях ячейки Бенара будут сохраняться, а эмиссия газа может влиять на процесс по-разному в зависимости от параметра $\gamma' K$. С одной стороны, это может приводить к усилению демпфирования основных режимов, и тогда эмиссия газа создает препятствие для бифуркации, и бифуркации могут исчезать (отрицательная обратная связь). С другой стороны, это может привести к уменьшению скорости затухания возмущений, и бифуркации могут появиться раньше (положительная обратная связь). Важно отметить, что в реальных задачах это будет зависеть от динамики атмосферы, поскольку скорость газа и температурные поля нетривиально входят в основные функционалы.

Случай III. Система около точки бифуркации: взрывообразные выбросы. Третий случай описывает ситуацию, когда переходные процессы связаны с эмиссией газа, которая происходит взрывообразно с очень большой скоростью. Например, в реальности, для некоторых температур (зимой, когда поверхность мерзлого озера заморожена) эмиссия метана практически отсутствует; однако, если температура становится достаточно высокой, то эмиссия начинает происходить (когда озеро тает). Возьмем μ как «сигмоидальную» функцию в граничном условии (16)

$$\mu(x, y, t) = g(x, y)S(\beta_0\theta),$$

где $u_0 = \beta_0\theta$, S – монотонно возрастающая функция, такая что $\lim_{u \rightarrow +\infty} S(u_0) = 1$ и $\lim_{u \rightarrow -\infty} S(u_0) = 0$.

Параметр β_0 характеризует скорость переходного процесса (чем больше β_0 , тем быстрее возрастает μ как функция от θ). Круто возрастающая $\mu(\theta)$ может описывать взрывообразный выброс газа с поверхности. В качестве простейшего приближения можно взять кусочно-линейную функцию S :

$$S(u_0) = 0, \quad u_0 < 0, \quad S = u_0, \quad 0 < u_0 < 1, \quad S(u_0) = 1 \quad u_0 > 1.$$

Получим здесь уравнения для амплитуд мод $X_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, где N представляет собой число бифуркационных мод, участвующих в медленной динамике, в точке бифуркации. Например, для *случая II*, такие уравнения достаточно просты и напоминают известные модели Лоренца [3]. Кроме того, для *случая III* и $N = 1$ уравнение эволюции является относительно простым. Наиболее интересный случай – это *случай III* с $N > 1$, где уравнения могут быть более сложными. Остановимся на нем более детально. Рассмотрим случай, когда $N \geq 1$ – некоторые основные режимы могут сосуществовать. Представим здесь температуры и скорость потока как

$$\theta = \theta_0 + \sum_{n=1}^N X_n(t)T_n(x, y, z),$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N X_n(t)\mathbf{V}_n(x, y, z),$$

где \mathbf{V}_n, T_n – заданные функции (которые обычно выбирают в качестве собственных функций линейной части), X_n являются неизвестными функциями времени. Рассмотрим сначала обычный случай для α_1 . Тогда, применяя стандартную процедуру Галеркина, получаем

$$\frac{dX_n}{dt} = \sum_{ij} M_{nij}X_iX_j - \lambda_n X_n + f_n \quad (30)$$

где M – матрица, $\lambda_n > 0$ – коэффициенты, f_n – определяет внешний эффект силы, $-\lambda_n X_n$ является диссипативным членом, а первый член нелинейно связан с конвекцией. Если M_{nij} антисимметрична для n, i, j , то (30) является случаем известной системы Колмогорова. К тому же, известную систему Лоренца можно рассматривать как частный случай (30).

В рассматриваемом случае, получаем (учитывая, что $3\alpha_1 C\theta$ достаточно мало):

$$\frac{dX_n}{dt} = \sum_{i,j=1}^N M_{nij} X_i X_j - \sum_{j=1}^N \lambda_{nj} X_j + f_n + \alpha_1 F_n(X),$$

где Λ является положительной матрицей с элементом λ_{nj} , который отвечает за диссипацию в системе,

$$F_n = \sum_{j=1}^N B_{nj} X_j S(\rho_j(X)).$$

Здесь $\rho_j(X) = \theta_0(x_i, y_j, t) + \sum_{m=1}^N \sum_m a_{jm} X_m$, а a_{jm}, B_{nj} – матрицы, (x_j, y_j) – координаты, которые определяют центр j -го отверстия. Теперь опишем, как получить вклад F . Применяя стандартную процедуру Галеркина, имеем

$$F_n = 3 \langle \bar{C} \langle X \rangle \theta, T_n \rangle,$$

где $\langle f, g \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Чтобы найти \bar{C} , необходимо использовать приближения, где можно пренебречь эффектами, связанными с конвекцией и распадом примесей газа в уравнении (19) для C . Тогда можно искать для плотности квазистационарных потоков газа решение краевой задачи

$$\Delta \bar{C} = 0, \quad (31)$$

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (32)$$

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \chi_{\Omega_i}(x, y) S(\theta(X)). \quad (33)$$

Тогда решение (31)–(33) для \bar{C} может быть выражено через функцию Грина, и здесь получается (с учетом того, что отверстия достаточно малы по размерам) следующее соотношение:

$$\bar{C}(x, y, z, X) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{lakes}}} G_i(x, y, z, x_i, y_i) S(\theta_0 + \sum_j T_j(x_i, y_i) X_j).$$

В результате,

$$a_{jm} = T_j(x_m, y_m),$$

$$B_{nm} \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{lakes}}} \langle G_i(x, y, z, x_i, y_i) T_m, T_n \rangle.$$

Рассмотрим теперь возможный механизм хаоса, связанного с взрывообразными выбросами газа с поверхности. Даже для $\alpha_1 = 0$, то есть без эмитирующего газа, влияние динамики может быть сложным (частный случай этих систем – система Лоренца, может порождать динамику со сложными бифуркациями и хаосом). Рассмотрим некоторые дополнительные хаотические эффекты, связанные с учетом эмиссии газа

в модели Гуди. Эти эффекты возможны даже в *случае II*. Удалим все нелинейные члены из (30), кроме членов, отвечающих за эмиссию газа, а также удалим член с $\sum_m a_{jm} X_m$. Получим систему

$$\frac{dX_n}{dt} = - \sum_{j=1}^N \lambda_{nj} X_j + f_n + \alpha_1 B_{nj} X_j S(\theta_0(x_j, y_j, \tau)). \quad (34)$$

Исследуем теперь динамику системы (34). Будем рассматривать $\eta_j = S(\theta_0(x_j, y_j, \tau))$ как сезонный длительный фактор времени (так как в реальном случае озера, из которых эмитирует метан, то тают, то замерзают), включающийся или выключающийся в случайные моменты времени (из-за сигмоидального характера S). Динамика системы (34) при $\alpha_1 = 0$ вполне тривиальна, поскольку все траектории сходятся к состоянию равновесия, а динамика системы при $\alpha_1 \neq 0$ может генерировать фрактальные аттракторы.

Чтобы показать это, рассмотрим отображение Пуанкаре $P : X(t) \rightarrow X(t + \Delta T)$ для (34), где ΔT является длительным промежутком времени (например, год). С учетом рассуждений, сделанных выше, ясно, что за год интервал $(n\Delta T, (n+1)\Delta T)$ этого отображения P определяется линейным отображением

$$P_n X = (A + \alpha_1 \tilde{B}_n) X + f, \quad (35)$$

где A есть фиксированная матрица ($A = \exp(-\Lambda \Delta T)$), \tilde{B}_n – случайная матрица в зависимости от n . Эта случайность возникает из-за сезонного фактора $\eta_j = S(\theta_0(x_j, y_j, \tau))$. Отображение, подобное (35), детально изучено в [31]. Оно определяет так называемые системы итерируемых функций (IFS) [37]. К тому же, хорошо известны аттракторы этих случайных отображений, в общем случае это – фрактальные множества.

В заключение этого раздела отметим, что эмиссия газа приводит к медленной модификации аттрактора системы. Это нетривиальный процесс, в котором может появиться фрактальная структура в фазовом пространстве, даже если динамика системы очень проста и зависит единственным образом от эволюции основной моды X_1 (которая имеет место для модели Гуди в некоторых самых простых ситуациях).

Заключение

В данном исследовании рассматривалась радиационно-конвективная модель Гуди, в основу которой легла модифицированная задача о конвекции Рэлея–Бенара. В оригинальной модели Гуди помимо классической конвекции были введены радиационные эффекты, описывающие поведение солнечного излучения в атмосфере. Однако бифуркационный анализ этой модели показал наличие в ней всё тех же ячеек Бенара, что и в классической задаче о конвекции Рэлея–Бенара. Для нужд математической теории климата (задачи об эмиссии парниковых газов в атмосферу) нами была расширена оригинальная модель Гуди: введен поток эмитирующего газа с поверхности из отверстий, которые имеют собственную динамику, и предполагается в дальнейшем, что примеси эмитирующего газа подвержены конвекции, диффузии и

распаду (фактически, такое поведение в атмосфере наблюдается у любого парникового газа).

Далее была сформулирована краевая задача для такой системы и показано существование и единственность решений этой задачи на основе построения оператора Лере и метода верхних и нижних решений.

После этого был введен параметр, зависящий от скорости эмиссии и температуры поверхности, на основании которого проводился бифуркационный анализ данной задачи. Были рассмотрены три случая поведения системы. Первый случай – когда система находилась далеко от точки бифуркации. В этом случае новых особенностей системы, по сравнению с классической задачей, не выявлено; кроме того была найдена формула для расчета скорости эмиссии газа. Второй случай – система вблизи точки бифуркации. Показано существование как ячеек Бенара, так и новых бифуркаций (по сравнению с классической задачей) и описана динамика системы возле точки бифуркации. Третий случай подобен второму, однако здесь эмиссия газа с поверхности происходит взрывным образом. В этом случае эмиссия газа приводит к медленной модификации аттрактора системы, который должен представлять собой фрактальное множество.

Таким образом, применение данной задачи в математической теории климата позволит изучить «критические точки» (точки бифуркации) в климатической системе, что является, несомненно, важным для прогнозирования будущих изменений климата.

Работа выполнена в рамках государственного задания НовГУ (проект «Исследование моделей, методов и алгоритмов многопараметрических систем», № 438/АиГ-с (2011–2013)), программы стратегического развития НовГУ (проект «Исследование обобщенных решений нелинейных интегро-дифференциальных и разностных уравнений», № 456/АиГ-с (2012–2016)) и при поддержке РФФИ (грант 12-01-90803-мол_рф_нр).

Библиографический список

1. *Thompson J.M.T., Sieber J.* Predicting climate tipping as a noisy bifurcation: A review // *Int J. Bif. Chaos.* 2011. Vol. 21, № 2. P. 399.
2. *Монин А.С., Шликов Ю.А.* Климат как проблема физики // *Успехи физических наук.* 2000. № 4. С. 419.
3. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
4. *Чуличков А.И.* Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2000.
5. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1999. Vol. 328. P. 1197.
6. *Goody R.M.* The influence of radiative transfer on cellular convection // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 424.

7. *Larson V.E.* The effects of thermal radiation on dry convective instability // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 2001. Vol. 34. P. 45.
8. *Goody R.M.* Atmospheric Radiation. I. Theoretical Basis. Oxford University Press, New York, 1964.
9. *Goody R.M.* Corrigendum // *J. Fluid Mech.* 1956. Vol. 1. P. 670.
10. *Goody R.M., Yung Y.L.* Atmospheric Radiation: Theoretical Basis, 2nd Edition. Oxford University Press, New York, 1989.
11. *Gille J., Goody R.M.* Convection in a radiating gas // *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 20. P. 47.
12. *Goody R.M.* Principles of Atmospheric Physics and Chemistry. Oxford University Press, New York, 1995.
13. *Spiegel E.A.* The convective instability of a radiating fluid layer // *Astrophys. J.V.* 1960. Vol. 132. P. 716.
14. *Spiegel E.A., Veronis G.* On the Boussinesq approximation for a compressible fluid // *Astrophys. J.* 1960. Vol. 131. P. 442.
15. *Larson V.E.* Stability properties of and scaling laws for a dry radiative-convective atmosphere // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2000. Vol. 126. P. 145.
16. *Murgai M.P., Khosla P.K.* A study of the combined effect of thermal radiative transfer and a magnetic field on the gravitational convection of an ionized fluid // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14. P. 433.
17. *Narasimha R., Vasudeva Murthy A.S.* The energy balance in the Ramdas layer // *Bound. Layer Meteorol.* 1995. Vol. 76. P. 307.
18. *Vasudeva Murthy A.S., Srinivasan J., Narasimha R.* A theory of the lifted temperature minimum on calm clear nights // *Phil. Trans. R. Soc. London A.* 1993. Vol. 344. P. 183.
19. *Sudakov I., Vakulenko S.* Bifurcations of the climate system and greenhouse gas emissions // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2013: 371(1991):20110473.
20. *Bledoui F., Soufani A.* The onset of Rayleigh–Benard instability in molecular radiating gases // *Phys. Fluids A.* 1997. Vol. 9. P. 3858.
21. *Getling A.V.* On the scales of convection flows in a horizontal layer with radiative energy transfer // *Atmos. Oceanic Phys.* 1980. Vol. 16. P. 63.
22. *Veronis G.* Penetrative convection // *Astrophys. J.* 1963. Vol. 137. P. 641.
23. *Vincenti W.G., Traugott S.C.* The coupling of radiative transfer and gas motion // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1971. Vol. 3. P. 89.
24. *Полежаев В.И., Яремчук В.П.* Численное моделирование двумерной нестационарной конвекции в горизонтальной слое конечной длины, подогреваемом снизу // *Механика жидкости и газа*. 2001. № 4. С. 34.
25. *Joseph D.D.* Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1965. Vol. 22. P.163.
26. *Судаков И.А.* Динамика протаивания мерзлотных озер и изменения климата // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного поли-*

- технического университета. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 74.
27. *Генри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1984.
 28. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, New York, 1981.
 29. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
 30. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
 31. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
 32. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
 33. *Сорокин В.С.* О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу // ПММ. 1954. № 18, вып. 2. С. 197.
 34. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
 35. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость // Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». 1978. Т. 11. С. 66.
 36. *Straughan B.* The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection. Springer, New York, 1992.
 37. *Barnsley M.F., Demko S.* Iterated function systems and the global construction of fractals// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1978. Vol. 399. 1817. P. 243.

Университет Юты, США

*Институт проблем машиноведения РАН
Новгородский госуниверситет*

Поступила в редакцию

16.10.2012

После доработки

1.05.2013

NEW TYPE OF BIFURCATIONS IN THE MODIFIED RAYLEIGH–BÉNARD CONVECTION PROBLEM

I. A. Sudakov, S. A. Vakulenko, T. G. Sukacheva

The original Rayleigh–Bénard convection is a standard example of the system where bifurcations occur with changing of a control parameter. In this paper we consider the modified Rayleigh–Bénard convection problem including radiative effects as well as gas sources on a surface. Such formulation leads to the identification of new type of bifurcations in the problem besides the well-known Bénard cells. This problem is very important for mathematics of climate because it proves the occurrence of the climate system tipping point related to greenhouse gas emission into the atmosphere.

Keywords: Rayleigh–Bénard convection, bifurcations, radiation, gas emission, tipping point, climate.



Судаков Иван Алексеевич – родился в Свердловской области (1985), окончил физический факультет Уральского государственного университета им. А.М. Горького (2008). После окончания университета обучался в аспирантуре Санкт-Петербургского государственного университета по специальности «Климатология», а также Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого по специальности «Математическое моделирование». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НовГУ (2012) в области прикладной математики. В настоящее время занимает должность профессора, ассистирующего в исследованиях, математического департамента Университета Юты (США). Награжден именными стипендиями: имени Фридьофа Нансена (2008), имени Отто Шмидта (2011), имени Эдварда Лоренца (2012). Лауреат премии правительства СПб в области научно-педагогической деятельности за 2010 год.

University of Utah, 155 S 1400 E, Room 233
Salt Lake City, UT 84112-0090 USA
E-mail: sudakov@math.utah.edu



Вакуленко Сергей Августович – родился в Ленинграде (1953), окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (1976), защитил кандидатскую диссертацию в 1981, докторскую диссертацию (по теоретической и математической физике) в 1993 в Санкт-Петербургском государственном университете. Являлся приглашенным профессором в Лионском Университете (1998–2003), университетах г. Ренна и г. Монпелье (2004–2012). С 2006–2011 заведовал кафедрой высшей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Соавтор двух книг и автор свыше 70 работ по математической и теоретической физике, математической биологии и механике, опубликованных в ведущих журналах. Был одним из ведущих организаторов международной конференции «Patterns and Waves» (Пушкин, 2002). В настоящее время работает в должности ведущего научного сотрудника Института проблем машиноведения РАН.

199178 Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., д. 61
Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: vakulenfr@mail.ru



Сукачева Тамара Геннадьевна – родилась в Новгороде (1955), окончила физико-математический факультет Новгородского государственного педагогического института (1977). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «дифференциальные уравнения» в Воронежском государственном университете (1990) и доктора физико-математических наук по специальности «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в Новгородском государственном университете (2004). Автор монографии «Расширенные фазовые пространства моделей Осколкова». Имеет более 100 различных публикаций. В настоящее время работает в должности профессора кафедры алгебры и геометрии Института Электронных и Информационных Систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

173003 Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, д. 41
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
Институт электронных и информационных систем
E-mail: tamara.sukacheva@novsu.ru