



ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ И ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ОДНОЙ ФИНАНСОВОЙ СИСТЕМЫ

А. Ю. Зинченко

На основе комплексного численного исследования для нелинейной финансовой системы Чена построен атлас карт динамических режимов в зависимости от бифуркационных параметров и выявлены все основные сценарии перехода к детерминированному хаосу. Доказаны теоремы существования глобального аттрактора системы, периодических решений системы, наличие бифуркаций Пуанкаре–Андронova–Хопфа, а также теоремы из области управления аттракторами.

Ключевые слова: Детерминированный хаос, странный аттрактор, бифуркация, характеристические показатели Ляпунова, сечение и отображение Пуанкаре, хаотическая синхронизация.

Введение

Основной задачей исследования нелинейных динамических систем разной природы, которые, как правило, не имеют точных аналитических решений, есть задача выявления областей хаотических, регулярных и установившихся режимов, а также закономерности перехода от одного режима к другому. Сложность такого исследования обуславливается экспоненциальной чувствительностью системы к малым возмущениям ее параметров, делающим невозможным предсказание состояний на временах, превышающих некоторый временной масштаб, логарифмически зависящий от неточности задания начальных условий. Однако динамика хаотического режима системы является детерминированной и в ней можно установить ряд закономерностей и свойств, которые отличают ее от классических случайных процессов.

Для численного исследования нелинейных динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями первого порядка, а также реконструкции их математических моделей по временной реализации предложена информационная технология и разработана многопоточная автоматизированная система*. Составлены

* Система внедрена на кафедре математических методов системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт».

программы для реализации девятнадцати методов, две программы сделаны автором. В частности, для исследований были использованы методы [1]: для вычисления спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) – метод Бенеттина и др.; для построения сечения и отображения Пуанкаре – метод Эно; для построения спектральной плотности аттракторов – метод Филона; для построения инвариантной меры и численного решения систем – метод Рунге–Кутты с постоянным и переменным шагом численного интегрирования (с использованием корректирующей процедуры Дорманда–Принса).

В данной работе исследуется финансовая система Г. Чена [2]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz,\end{aligned}\tag{1}$$

где $a \geq 0$ – параметр сохранения суммы процентной ставки, $b \geq 0$ – стоимость инвестиций, $c \geq 0$ – эластичность спроса на коммерческих рынках. Первое уравнение этой системы описывает изменение во времени процентной ставки, второе – инвестиционного спроса и третье – индекса цен.

1. Существование глобального аттрактора системы и оценка области, которой он ограничен

Пусть вектор X зависит от (x, y, z) и положим $X(t, t_0, X(t_0))$ – решение системы (1).

Определение 1. Будем называть глобальным притягивающим предельным множеством (глобальным аттрактором) системы (1) множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$, если существует такая константа $L_\lambda > 0$, что для любого $V_\lambda(X(t_0)) > L_\lambda$, $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$ выполняется $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda$.

Определение 2. Если для любого начального значения $X(t_0) \in \Omega_\lambda$ и для любого $t > t_0$ выполняется условие $X(t, t_0, X(t_0)) \in \Omega_\lambda$, тогда $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ будем называть положительным инвариантом.

Определение 3. Если существует такая константа $L_\lambda > 0$, фиксированное число $r_\lambda > 0$ и некоторое $X(t_0) \in R^3$, что для любого $V_\lambda(X(t_0)) > L_\lambda$, $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$ выполняется следующее экспоненциальное оценивание разницы: $V_\lambda(X(t)) - L_\lambda \leq (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda)e^{-r_\lambda(t-t_0)}$, тогда множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ называется глобальным «экспоненциальным» аттрактором.

Теорема 1. Система (1) имеет глобальный «экспоненциальный» аттрактор и положительный инвариант, причём ограниченный семейством функций Ляпунова $V_\lambda(\lambda > 0)$ вида

$$V_\lambda = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\dot{V}_\lambda &= \lambda x(z + (y - a)x) + \lambda y(1 - by - x^2) + \lambda z(-x - cz) = \lambda xz + \lambda yx^2 - \lambda ax^2 + \lambda y - \\ &- \lambda by^2 - \lambda yx^2 - \lambda xz - c\lambda z^2 = -\lambda ax^2 + \lambda y - \lambda by^2 - c\lambda z^2 + (\lambda x^2)/2 + (\lambda y^2)/2 + \\ &+ (\lambda z^2)/2 - V_\lambda = -V_\lambda + F(x, y, z),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F(X)}{\partial x} = -2\lambda ax + \lambda x = 0 \Rightarrow (x = 0), \quad (a = 1/2, x \neq 0),$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial z} = -2\lambda cz + \lambda z = 0 \Rightarrow (z = 0), \quad (c = 1/2, z \neq 0),$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x^2} = -2\lambda a + \lambda < 0 \Rightarrow a > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial y^2} = -2\lambda b + \lambda < 0 \Rightarrow b > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial z^2} = -2\lambda c + \lambda < 0 \Rightarrow c > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial z \partial x} = 0.$$

Следовательно, точка $(0; 1/(2b - 1); 0)$ есть точка локального максимума. Функция вогнутая, а значит, это глобальный максимум, поэтому

$$\begin{aligned}SUP_{X \in R^3} F(X) &= F(X) \Big|_{(0; 1/(2b-1); 0)} = \frac{\lambda}{2b-1} - \frac{\lambda b}{(2b-1)^2} + \frac{\lambda}{2(2b-1)^2} = \\ &= \frac{\lambda(2b-1)}{2(2b-1)^2} = L_\lambda, \quad L_\lambda > 0 \Rightarrow b > 1/2.\end{aligned}$$

Учитывая последнее, имеем оценку сверху производной: $dV_\lambda/dt \leq -V_\lambda + L_\lambda$. По определению 1, имеем

$$V_\lambda > L_\lambda \Rightarrow -V_\lambda + L_\lambda < 0 \Rightarrow \frac{dV_\lambda}{-V_\lambda + L_\lambda} \geq dt.$$

Решив неравенство, получаем

$$V_\lambda - L_\lambda \leq e^{-t} C_1,$$

$$V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda = e^{-t_0} C_1 \Rightarrow C_1 = e^{t_0} (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$V_\lambda - L_\lambda \leq e^{-t} e^{t_0} (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) = (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) e^{-(t-t_0)},$$

$$V_\lambda(X(t)) - L_\lambda \leq (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) e^{-(t-t_0)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda.$$

Таким образом, множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ является глобальным «экспоненциальным» аттрактором и положительным инвариантом системы (1). ■

Для оценки области, которой ограничен аттрактор, умножим каждое уравнение системы (1) соответственно на x , y , z и сложим. В итоге получим

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} = zx + yx^2 - ax^2 + y - by^2 - x^2y - xz - cz^2 = -ax^2 + y - by^2 - cz^2.$$

Представим $-by^2$ как $-y^2 - (b-1)y^2$, тогда $y - by^2$ запишется, как $y - y^2 - (b-1)y^2$.

$$\begin{aligned} y - (b-1)y^2 &= -(b-1) \left[y^2 - 2\frac{y}{2(b-1)} + \left(\frac{1}{2(b-1)}\right)^2 - \left(\frac{1}{2(b-1)}\right)^2 \right] = \\ &= -(b-1) \left(y - \frac{1}{2(b-1)} \right)^2 + \frac{b-1}{4(b-1)^2} \leq \frac{1}{4(b-1)^2}, \quad b \neq 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} = -ax^2 + y - by^2 - cz^2 \leq -ax^2 - cz^2 - y^2 + \frac{1}{4(b-1)^2}.$$

Пусть $l = \min\{a, c, 1\}$, тогда $\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} \leq -l(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{4(b-1)^2}$ или $\frac{d(R^2)}{2dt} \leq -lR^2 + \frac{1}{4(b-1)^2}$. Обозначая $\gamma^2 \equiv \frac{1}{4(b-1)^2}$, получим $\frac{d(R^2)}{dt} + 2lR^2 = e^{-2lt} \frac{d(e^{2lt} R^2)}{dt} \leq \gamma^2$. Интегрируя это неравенство от 0 до t , получаем

$$R^2 = Ce^{-2lt}, \quad C'e^{-2lt} - 2lCe^{-2lt} + 2lCe^{-2lt} = \gamma^2 \Rightarrow C' = \gamma^2 e^{2lt},$$

$$C = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + C_1, \quad R^2(t) = \left(\frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + C_1 \right) e^{-2lt},$$

$$R^2(0) = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + C_1 \Rightarrow C_1 = R^2(0) - \frac{\gamma^2}{2l},$$

$$R^2(t) = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + R^2(0) e^{-2lt} - \frac{\gamma^2}{2l} e^{-2lt} = \frac{\gamma^2}{2l} (1 - e^{-2lt}) + R^2(0) e^{-2lt}.$$

Тогда $R^2(t) \leq R^2(0) e^{-2lt} + \gamma^2 / (2l) (1 - e^{-2lt})$. Обозначив $R^2(0) e^{-2lt_0} + \gamma^2 / (2l) - \gamma^2 / (2l) e^{-2lt_0}$ как R_0 , можно сделать заключение: если притягивающим множеством выбрать шар, радиуса $R_0 > \gamma \equiv 1/(4(b-1))$, то траектория войдет в него за время, не превышающее

$$t_0 = \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{R^2(0) - \frac{\gamma^2}{2l}}{R_0^2 - \frac{\gamma^2}{2l}} \right) = \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{R^2(0) - \frac{1}{32l(b-1)^2}}{R_0^2 - \frac{1}{32l(b-1)^2}} \right),$$

после чего $R(t) < R_0$.

Действительно, если рассмотреть в 3-х мерном пространстве область, ограниченную неравенством $-ax^2 - cz^2 - y^2 + \frac{1}{4(b-1)^2} \geq 0$, то она ограничена поверхностью эллипсоида с центром в точке $(0; y - 1/b; 0)$. Вне этой области правая

часть этого неравенства отрицательная. Определим семейство эллипсоидов уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$, где присутствует данная комбинация, полученная от производной левой части. Выберем значение константы максимально большим, чтобы получить эллипсоид, целиком ограничивающим рассмотренную область. Тогда на данной поверхности эллипсоида всюду выполняется двойное неравенство $d(x^2 + y^2 + z^2)/dt \leq -1/(2(b-1)^2) \leq 0$. То есть величина $x^2 + y^2 + z^2$ убывает с течением времени, а это означает, что все траектории, пересекающие эллипсоид, стремятся только внутрь ограниченной эллипсоидом области.

2. Исследование устойчивости положений равновесия

Система (1) имеет три стационарные точки:

$$S_0 = (0; \frac{1}{b}; 0), \quad S_2 = \left(-\sqrt{1 - ba - d\frac{b}{c}}; \quad a + \frac{1}{c}; \quad \sqrt{\frac{1 - ba}{c^2} - \frac{b}{c^3}} \right),$$

$$S_3 = \left(\sqrt{1 - ba - \frac{b}{c}}; a + \frac{1}{c}; -\sqrt{\frac{1 - ba}{c^2} - \frac{b}{c^3}} \right)$$

при $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Запишем теперь условие диссипативности для динамической системы (1)

$$\text{div } X(x, y, z) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = y - a - b - c < 0, \quad \text{то есть} \quad a + b + c > y.$$

Теорема 2. Если в системе (1) выполняются следующие условия:

$1 - ba - b/c > 0$, $bc \neq 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1/c - c$, $c \neq 0$, $c \neq -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 + 1}$ и $c(b + c - 1/c)^2 + bc^2 + 2c - 2abc - 3b \neq 0$, то существуют зависящие от параметра ε непрерывные функции $a = a(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, $a(0) = a_0$, $T(0) = -2\pi\beta^{-1}$ (где β – мнимое собственное значение линеаризованной матрицы векторного поля системы (1) в стационарной точке) такие, что в системе (1) существуют периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые влипают в точку $(0, 1/b, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом имеет место бифуркация Андронова–Хопфа рождения предельного цикла, которая происходит при бифуркационных значениях параметра $a_0 = (c^4b + c^3b^2 - 3b^2c - 2c + 3b)/(2c^2b^2 - 2cb)$.

Доказательство. Сместим систему (1) линейным преобразованием $x(t) = x(t)$, $y(t) = y(t) + 1/b$, $z(t) = z(t)$ в начало координат так, чтобы она допускала нулевое состояние равновесия, то есть $X(\vec{0}) = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1/b - a)x + z + xy, \\ \dot{y} &= -by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz. \end{aligned} \tag{2}$$

Состояния равновесия данной динамической системы будут следующие: $(0,0,0)$, $(-\sqrt{1-ba-b/c}; a + 1/c - 1/b; \sqrt{(1-ba)/c^2 - b/c^3})$ и $(\sqrt{1-ba-b/c}; a + 1/c - 1/b; -\sqrt{(1-ba)/c^2 - b/c^3})$ при $b \neq 0, c \neq 0$. Легко заметить, что при $1 - ba - b/c > 0$ система (2), а также и система (1) (что следует из данного линейного преобразования) имеют две особые точки. Линеаризация векторного поля в третьей стационарной точке имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a + 1/c - 1/b + 1/b - a & \sqrt{1-ba-b/c} & 1 \\ -2\sqrt{1-ba-b/c} & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/c & \sqrt{1-ba-b/c} & 1 \\ -2\sqrt{1-ba-b/c} & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы имеет вид

$$\lambda^3 + (b + c - 1/c)\lambda^2 + (bc + 2 - 2ab - 3b/c)\lambda + 2(c - abc - b) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что $\lambda, \bar{\lambda}, \alpha$ – корни этого уравнения, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и α – действительный корень. Тогда для произвольного полинома, зависящего от x , можем записать $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})(x - \alpha) = 0$. Раскрывая скобки, получим

$$x^3 - (2\lambda_1 + \alpha)x^2 + (|\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha)x - \alpha|\lambda|^2 = 0. \quad (4)$$

Очевидно, что данный полином имеет два чисто мнимых корня тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при x^2 и x равно свободному члену. Действительно, пусть $\pm bi$ – чисто мнимые корни этого полинома, тогда $(x - bi)(x + bi) \times (x - \alpha) = 0$. Раскрывая скобки, получим $x^3 - ax^2 + b^2x - ab^2 = 0$. Следовательно, уравнение (3) имеет чисто мнимые корни тогда и только тогда, когда $\text{Im}(\lambda) = \lambda_2 \neq 0$ и выполняется соотношение

$$(b + c - 1/c)(bc + 2 - 2ab - 3b/c) = 2(c - abc - b).$$

Выбирая произвольные параметры b и c , будем предполагать, что бифуркация рождения предельного цикла происходит при определенном значении параметра a (обозначим его как a_0). Тогда, раскрывая скобки и приведя подобные члены, получаем $a_0 = (c^4b + c^3b^2 - 3b^2c - 2c + 3b)/(2c^2b^2 - 2cb)$, при этом $bc \neq 1$. Таким образом получили бифуркационное значение. Покажем теперь, что при бифуркационных значениях a_0 в системе (2) происходит бифуркация рождения предельного цикла. Для этого, пользуясь бифуркационной теоремой Хопфа [3], достаточно показать, что $\text{Re} \lambda'(a_0) \neq 0$, $\text{Im} \lambda(a_0) \neq 0$, $\text{Im} \bar{\lambda}(a_0) \neq 0$, $\alpha(a_0) < 0$.

1. Найдем $\operatorname{Re} \lambda'(a_0)$, то есть $\lambda'_1(a_0)$. Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в уравнениях (3) и (4). Получим

$$\begin{cases} -(b+c-1/c) = 2\lambda_1 + \alpha, \\ bc+2-2ab-3b/c = |\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha, \\ 2abc+2b-2c = |\lambda|^2\alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \alpha = -(b+c-1/c+2\lambda_1), \\ |\lambda|^2\alpha = 2abc+2b-2c, \\ \alpha(|\lambda|^2+2\lambda_1\alpha) = -(b+c-1/c+2\lambda_1)(bc+2-2ab-3b/c) = \\ = 2abc+2b-2c+2\lambda_1(b+c-1/c+2\lambda_1)^2. \end{cases}$$

Дифференцируя последнее уравнение по a , полагая $a = a_0$ и учитывая, что $\lambda_1(a_0) = 0$, получаем $-2\lambda'_1(a_0)(bc+2-2a_0b-3b/c) + (b+c-1/c)2b = 2bc+2\lambda'_1(a_0)(b+c-1/c)^2$. Тогда

$$\lambda'_1(a_0) = \frac{b^2c-b}{c(b+c-1/c)^2+bc^2+2c-2a_0bc-3b}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} \lambda'(a_0) \neq 0$ при $bc \neq 1$.

2. Найдем $\operatorname{Im} \lambda(a_0) = \lambda_2(a_0)$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) = -\lambda_2(a_0)$ из системы (5). Для этого перепишем второе уравнение: $2abc+2b-2c = |\lambda|^2\alpha = (\lambda_1^2+\lambda_2^2)(-b-c+1/c)$. Отсюда $\lambda_2^2(a_0) = \frac{2a_0bc+2b-2c}{1/c-b-c}$ и $\lambda_2(a_0) = \pm \sqrt{\frac{2(a_0bc+b-c)}{1/c-b-c}}$, $-\lambda_2(a_0) = \mp \sqrt{\frac{2(a_0bc+b-c)}{1/c-b-c}}$.

Найдем значения, при которых $\operatorname{Im} \lambda(a_0) \neq 0$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) \neq 0$. Запишем

$$\begin{cases} a_0bc+b-c=0, \\ 1-ba_0-b/c>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_0bc+b-c=0, \\ a_0bc+b-c<0. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{Im} \lambda(a_0) \neq 0$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) \neq 0$ при всех a, b, c таких, что $1/c-b-c \neq 0$, то есть, когда $b \neq 1/c-c$ и $c \neq -b/2 \pm \sqrt{b^2/4+1}$.

3. Найдем теперь $\alpha(a_0)$ (α – действительный корень уравнения (3)). Из системы (5) имеем $|\lambda|^2\alpha = 2abc+2b-2c$, то есть $\alpha(a_0) = 2(abc+b-c)/|\lambda|^2$. Поскольку система (2) имеет комплексные стационарные точки при $1-ba-b/c > 0$, то есть при $abc+b-c < 0$, то для всех значений параметров, удовлетворяющих выше наложенным условиям, будет справедливо $\alpha(a_0) = 2(abc+b-c)/|\lambda|^2 < 0$.

Таким образом, собственные числа линеаризованной матрицы M пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью, поэтому при бифуркационном значении a_0 происходит бифуркация рождения предельного цикла – бифуркация Андронова–Хопфа. А значит, пользуясь теоремой Хопфа [3], в системе (2), а следовательно, и в системе (1), что вытекает из данного линейного преобразования, существуют непрерывные функции $a = a(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε , $a(0) = a_0$, (для системы (2) $a(0) = 0$), $T(0) = -2\pi\beta^{-1}$ (где β – мнимое собственное значение линеаризованной матрицы в стационарной точке) и такие, что в системе (1) существуют периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, что влипают в точку $(0, 1/b, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для системы (2) – в начало координат при $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

3. Адаптивный контроль и глобальная экспоненциальная синхронизация

В данном разделе рассматривается управление детерминированным хаосом нелинейной финансовой хаотичной системы Чена с параметрами $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ с использованием адаптивного управления и хаотической синхронизации.

Теорема 3. *Финансовая система Чена в хаотическом режиме с управлением по второй координате $k\varphi(x, y, z)$ описывается системой уравнений*

$$\dot{x} = z + (y - a)x,$$

$$\dot{y} = 1 - by - x^2 + k\varphi(x, y, z),$$

$$\dot{z} = -x - cz,$$

где $y(1 + k\varphi(x, y, z)) \leq 0$, $\varphi(x, y, z) \in L_2 \cup L_\infty$ и $\dot{\varphi}(x, y, z) \in L_2 \cup L_\infty$ стремится к точке $(0; h; 0)$, где h есть корень уравнения $by - k\varphi(y) - 1 = 0$, $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a + b + c > y$. При этом динамический режим станет регулярным.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций Ляпунова вида $V_\lambda = \lambda/2(x^2 + y^2 + z^2)$, $\lambda > 0$. Тогда $\dot{V}_\lambda = \lambda x(z + (y - a)x) + \lambda y(1 - by - x^2 + k\varphi(x, y, z)) + \lambda z(-x - cz) = -\lambda(ax^2 + by^2 + cz^2 - y(1 + k\varphi(x, y, z))) < 0$.

Лемма. *Если $f(t) \in (L_2 \cup L_\infty)$ и $\dot{f}(t) \in L_\infty$, тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.*

Поскольку $\dot{V} < 0$, $x, y, z, \varphi(x, y, z) \in L_\infty$, $\int_0^t \dot{V} \leq 0$ и $x, y, z, \varphi(x, y, z) \in L_2$, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}(x, y, z) \in L_\infty$, то, согласно лемме, соответствующие функции равняются 0, а x и z стремятся к 0, то есть $by - k\varphi(y) - 1 = 0$. С учетом условий теоремы, налагаемых на параметры и на саму функцию φ , решение является единственным. Тогда, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, траектории данной системы асимптотически устойчивы в точке $(0; h; 0)$. ■

На рис. 1 приведено численное моделирование системы (1), иллюстрирующее применение теоремы, с выбранным управлением по координате 2. Параметры системы и начальные условия: $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ и $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. При этом система сходится к точке $(0; 0; 1; 0)$. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты 0.001.

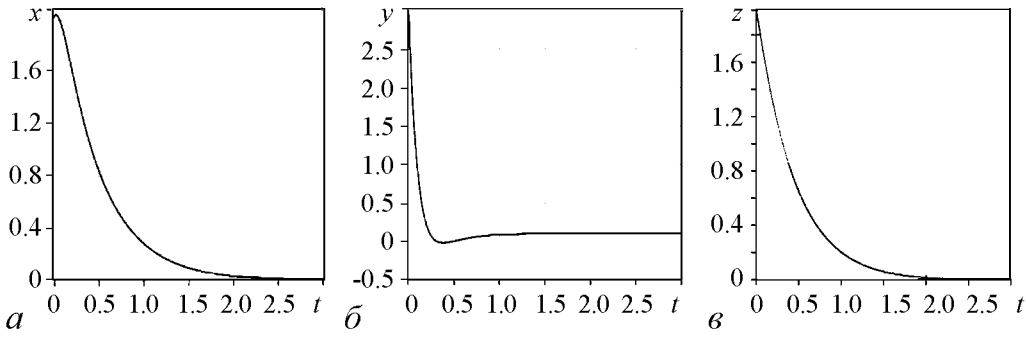


Рис. 1. Графики временных реализаций финансовой системы (1): a – координаты 1, $б$ – координаты 2, $в$ – координаты 3 при $k\varphi(x, y, z) = -9.9y$

Определение 4. Две нелинейные динамические системы

$$\dot{X} = F(t, X) \quad \text{и} \quad \dot{Y} = F(t, Y) + \mu(X, Y)$$

(где $X, Y \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния соответствующих систем, F – n -мерная нелинейная функция, μ – n -мерная функция управления) называются полностью синхронизированными (экспоненциально синхронизированными), если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$. При этом система \dot{X} называется ведущей, а \dot{Y} – ведомой.

Определение 5. Если существует такое $\alpha > 0$, что для любого $t > t_0$ выполняется соотношение $V_\lambda(X(t)) \leq V_\lambda(X(t_0))e^{-\alpha(t-t_0)}$, то ведущая система является экспоненциально устойчивой.

Рассмотрим ведомую систему для финансовой системы Чена (1) с выбранным управлением $\mu(X, Y) = \mu(X(t) - Y(t))$, тогда система запишется как

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= z_2 + (y_2 - a)x_2 + \mu_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \dot{y}_2 &= 1 - by_2 - x_2^2 + \mu_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= -x_2 - cz_2 + \mu_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем ошибки синхронизации $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$, $e_z = z_2 - z_1$ и вычтем из (6) начальную систему (1). Тогда получим систему ошибок вида

$$\begin{cases} \dot{e}_x = z_2 + x_2y_2 - ax_2 + \mu_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) - z_1 + x_1y_1 - ax_1, \\ \dot{e}_y = 1 - by_2 - x_2^2 + \mu_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) - 1 + by_1 - x_1^2, \\ \dot{e}_z = -x_2 - cz_2 + \mu_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) + x_1 + cz_1. \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку динамика хаотической системы ограничена, можно предположить, что $|y| \leq M_y$, $|x| \leq M_x$.

Теорема 4. Если существует такое управление, что $\mu_1 = -ke_x$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = e_x(y_2 - a)$, $k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}$, то система (7) будет экспоненциально устойчивой, а системы (1) и (6) полностью синхронизированными.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций Ляпунова вида

$$V_\lambda = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad \lambda > 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{e}_x = e_z - ae_x + x_2(y_2 - y_1) + y_2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + \mu_1(e_x, e_y, e_z) = \\ \quad = e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x + \mu_1(e_x, e_y, e_z) = \\ \quad = e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x - ke_x, \\ \dot{e}_y = -by_2 - e_x(x_2 + x_1) + \mu_2(e_x, e_y, e_z) = -by_2 - e_x(x_2 + x_1), \\ \dot{e}_z = -e_x - ce_z + \mu_3(e_x, e_y, e_z) = -e_x - ce_z + e_x(y_2 - a), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_x(e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x - ke_x) + e_y(-by_2 - e_x(x_2 + x_1)) + e_z(-e_x - ce_z + e_x(y_2 - a)) = \\ &= e_xe_z - e_x^2a + x_2e_xe_y + y_2e_x^2 - e_x^2e_y - ke_x^2 - be_y^2 - e_xe_yx_2 - \\ &\quad - e_xe_yx_1 - e_xe_z - ce_z^2 + e_xe_z(y_2 - a) = \\ &= e_x^2(y_2 - a - k) - be_y^2 - ce_z^2 - x_2e_xe_y + e_xe_z(y_2 - a) \leq \\ &\leq e_x^2(M_y - a - k) - be_y^2 - ce_z^2 - M_x|e_xe_y| + |e_xe_z|(M_y - a) = \\ &= -(|e_x||e_y||e_z|) \begin{pmatrix} a + k - M_y & \frac{1}{2}M_x & \frac{a - M_y}{2} \\ \frac{1}{2}M_x & b & 0 \\ \frac{a - M_y}{2} & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{pmatrix} = -E^T A E, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a + k - M_y & \frac{1}{2}M_x & \frac{a - M_y}{2} \\ \frac{1}{2}M_x & b & 0 \\ (a - M_y)/2 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для обеспечения экспоненциальной устойчивости системы ошибок (7) необходимо, чтобы матрица A была положительно определенной. А это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a + k - M_y > 0 \Rightarrow k > M_y - a, \\ ba - bM_y + bk - \frac{1}{4}M_x^2 > 0 \Rightarrow k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b}, \\ \frac{a - M_y}{2} \frac{M_y b - ba}{2} + c(ba - bM_y + bk - \frac{1}{4}M_x^2) > 0 \Rightarrow k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}. \end{cases}$$

Итак, когда $k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}$, матрица A является положительно определенной, а значит $\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(A)V$ и $V(X(t)) \leq V(X(t_0))e^{-\lambda_{\min}(A)(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. ■

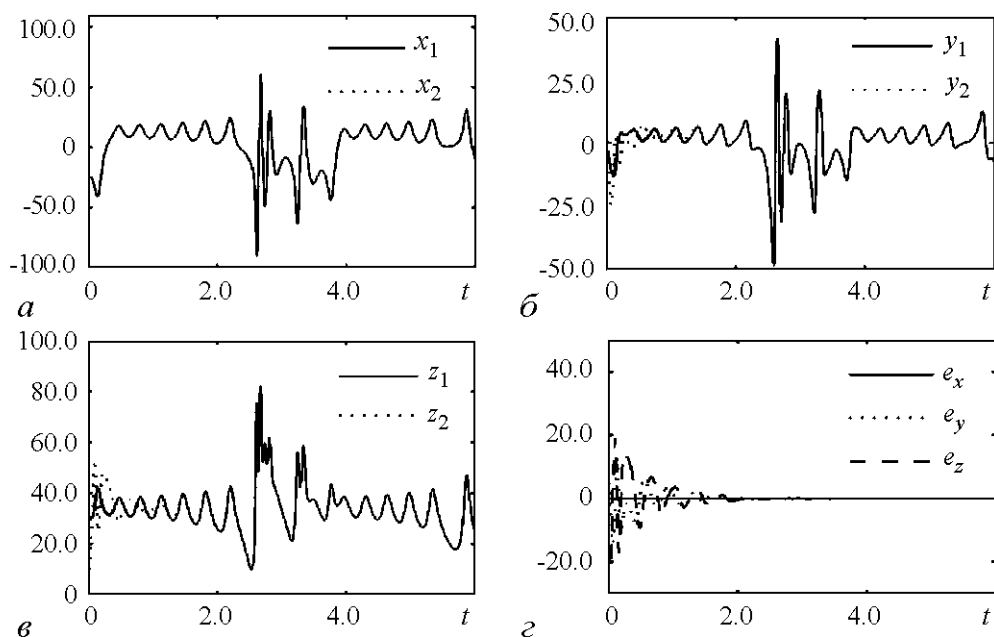


Рис. 2. Графики полной синхронизации временных реализаций финансовой системы Чена и экспоненциальной устойчивости системы ошибок (3) при $k = 20$

На рис. 2 приведено численное моделирование данной теоремы с выбранным $k = 20$. Параметры системы и начальные условия: $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ и $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты 10^{-3} .

4. Численное исследование регулярной и хаотической динамики

На рис. 3. приведена карта динамических режимов системы (1) относительно бифуркационных параметров a и c . Исследование финансовой системы Чена было проведено в окрестности рассчитанных стационарных точек системы при постоянном значении параметра $b = 0.1$ и начальных условиях $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты был выбран 0.001 на промежутке безразмерного времени от 0 до 100. Во избежание расчетов в переходном процессе (траектория еще не на аттракторе) вычисления спектра ЛХП происходило на временном интервале от 40 до 100 с шагом 0.04 по алгоритму Беннеттини и др. Параметр c изменялся в пределах от 0 до 9.525 включительно с шагом дискретизации 0.015, параметр a – в пределах от 0 до 3.28 включительно с шагом дискретизации 0.02. При вычислении спектра ЛХП было использовано свойство естественного параллелизма, присущего этой задаче, что позволило воспользоваться разработанной распределенной многопоточной автоматизированной системой. Построение всей карты динамических режимов при изменении двух вышеуказанных бифуркационных параметров на процессоре Pentium (R) Dual-Core CPU T4300 с тактовой частотой 2.10 GHz заняло 6 дней. Построение одного спектра и сечения Пуанкаре при тех же условиях на том же компьютере заняло около 6 часов.

На рис. 4 представлены зависимости параметра a от фазовой координаты z сечения Пуанкаре плоскостью $y = 2.6$ (а) и от фазовой координаты x сечения Пуанкаре

плоскостью $z = 1.0$ (*б*). Начальные условия: $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$; значения параметров – $b = 0.1$, $c = 1.0$. Параметр a менялся от 1 до 1.5 с шагом 0.001 (*а*) и от 7 до 7.2 с шагом 0.00001 (*б*). Переход от регулярных аттракторов к хаотическим осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода – сценарий Фейгенбаума (*а*) и через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю (*б*). При перемежаемости к точке бифуркации двигаются навстречу устойчивый предельный цикл и неустойчивый. После их слияния происходит процесс реинжекции, то есть возвращения траекторий в область исчезнувшего предельного цикла, затем вновь уход и возвращение и т.д. Характер поведения системы в точке бифуркации определяется ее устойчивостью по Лагранжу (наличие диссипации) и по Пуассону (режим установившийся) и неустойчивостью по Ляпунову (наличие положительного показателя).

На рис. 5 представлены проекции фазовых портретов, иллюстрирующих каскад бифуркаций устойчивого цикла при тех же начальных условиях, что и на рис. 4, с шагом численного интегрирования 0.001, при бифуркационных значениях $a = 3.0$,

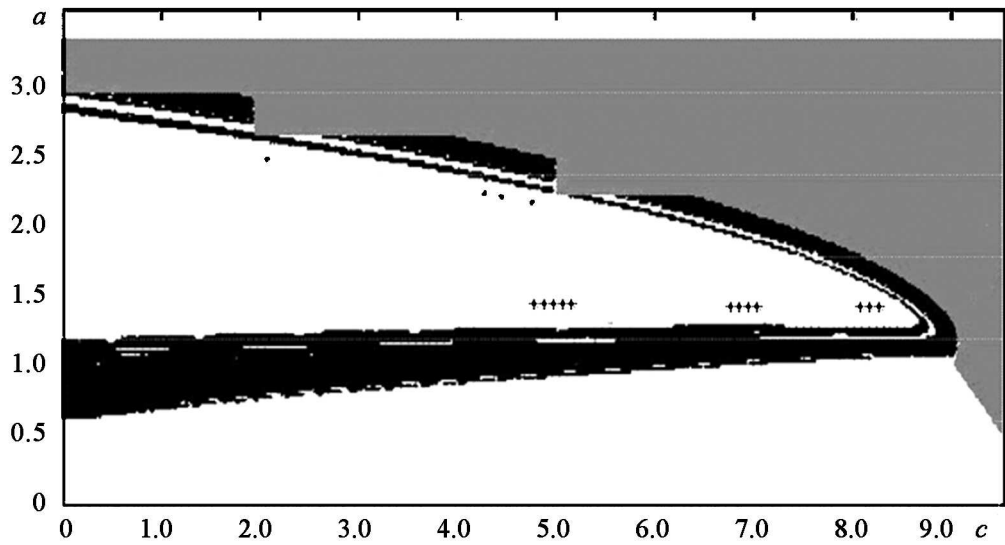


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1): черный цвет – хаотический режим, серый – положения равновесия, белый – периодический режим, «звездочки» – торы

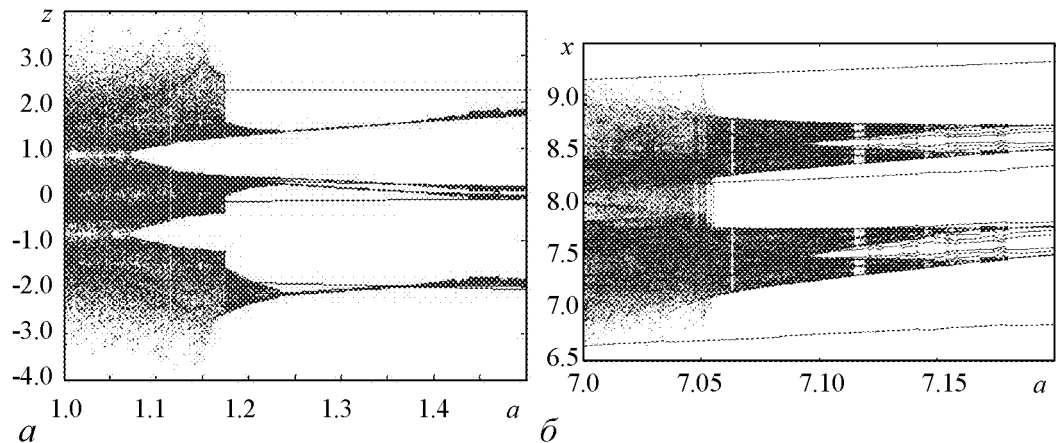


Рис. 4. Фазопараметрические характеристики системы (1). По оси абсцисс – параметр a , по оси ординат – сечение Пуанкаре плоскостью $y = 2.6$ (*а*) и $z = 1.0$ (*б*)

$b = 0.25$, $c = 1.0$. Изменение параметра b до 0.2 порождает хаос (г). Из рисунка можно сделать предположения, что для каскада бифуркаций устойчивых циклов имеет место порядок Шарковского (исследования для нелинейных систем см., например, в [4]), так как наличие цикла периода 3 (а) означает существование цикла любого периода из последовательности Шарковского, например цикла периода 5 (б). Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов порождает бесконечное число циклических субгармонических сингулярных аттракторов, которые являются значительно более сложными аттракторами – каждый из таких аттракторов порождается каскадом бифуркаций удвоения периода некоторого устойчивого цикла из ряда Шарковского, родившегося в результате соответствующей седло-узловой бифуркации, и является неполным циклическим субгармоническим аттрактором. Полный циклический субгармонический сингулярный аттрактор (г) возникает после каскада бифуркаций удвоения периода цикла периода три.

В заключение приведем сценарий Рюэля–Такенса – переход к хаосу через несколько бифуркаций Андронова–Хопфа. Исследования проводились в окрестно-

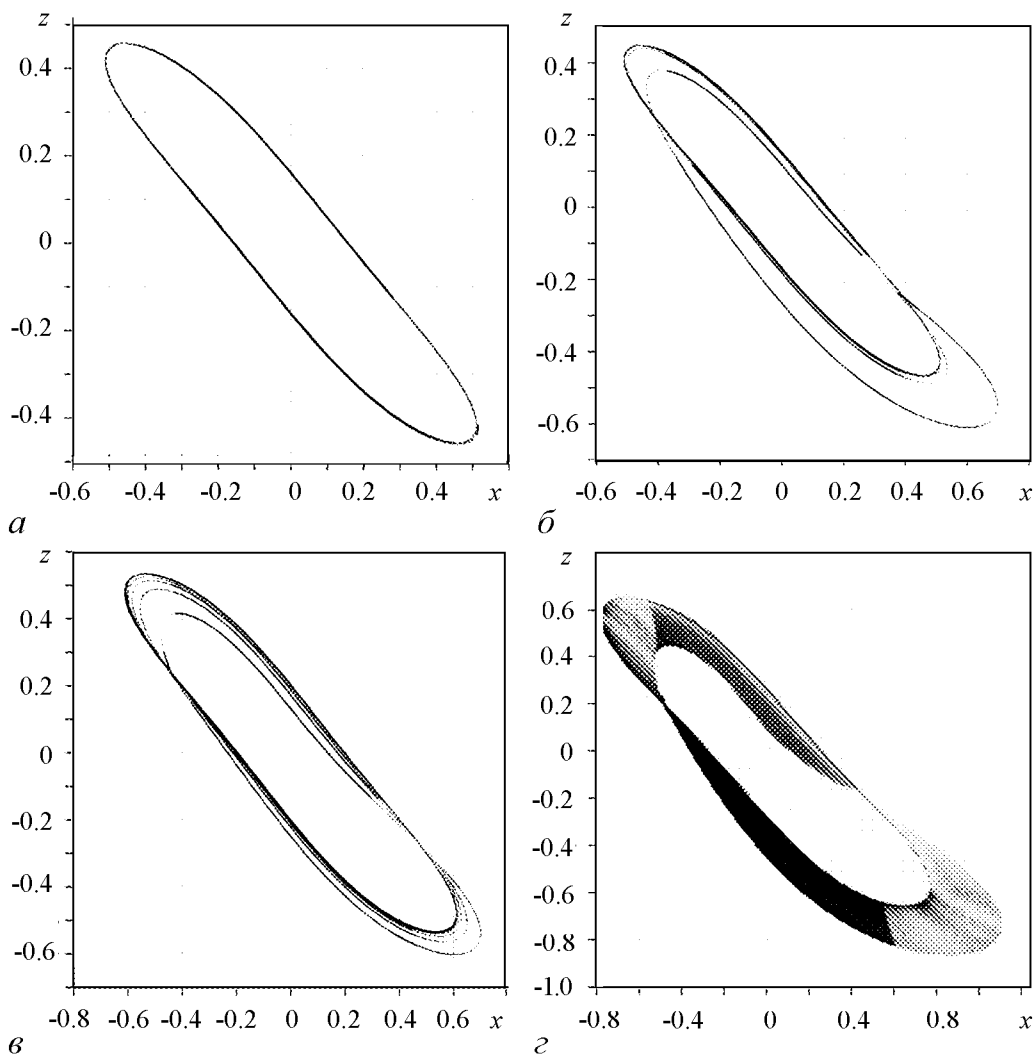


Рис. 5. Проекция каскада бифуркаций устойчивого цикла

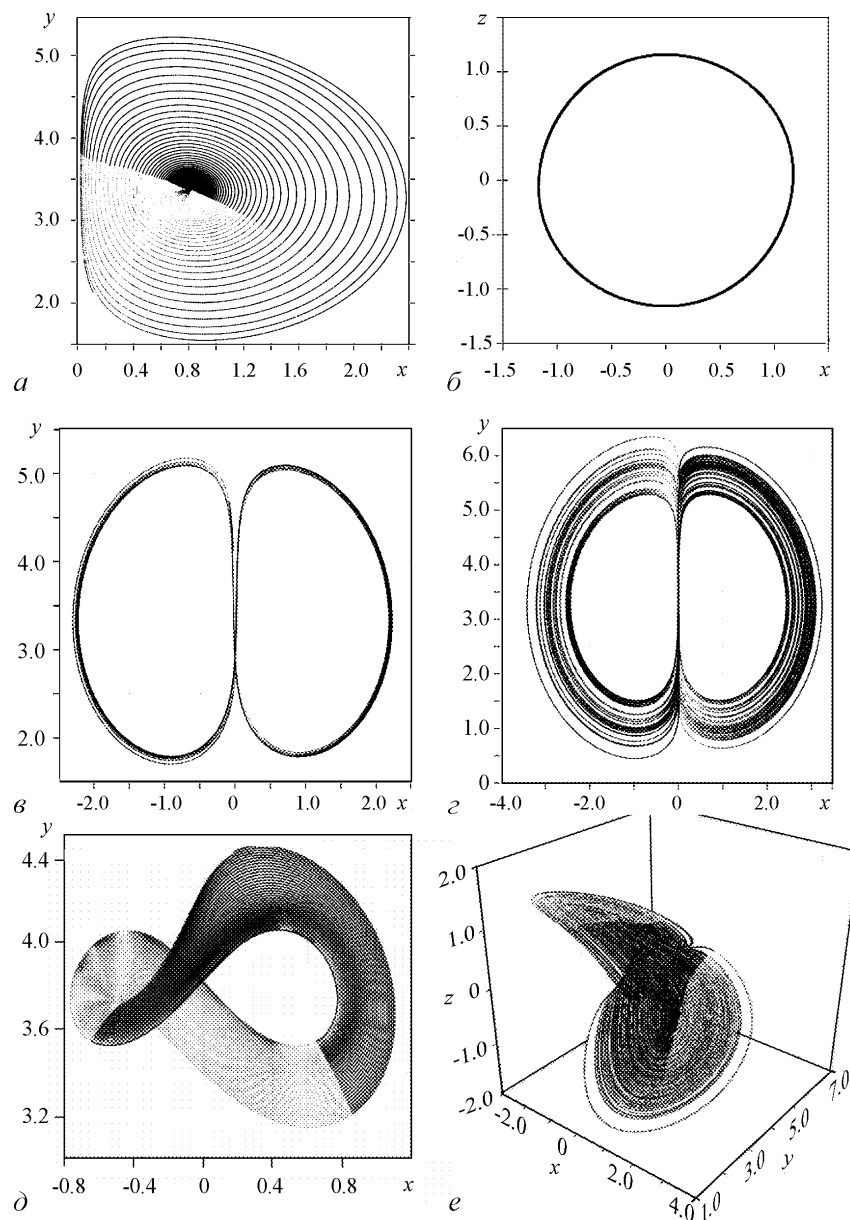


Рис. 6. Переход к хаосу через бифуркации Андронова–Хопфа (фокус теряет устойчивость)

сти полученных по теореме 2 бифуркационных точек a_0 . Как видно из рис. 6, особая точка-фокус теряет устойчивость. При этом из нее рождается небольшой устойчивый предельный цикл – мягкая потеря устойчивости, который при уменьшении параметра a_0 превращается в хаотический аттрактор системы.

Заключение

Доказаны теоремы: существования аттракторов в системе, существования периодических решений системы (регулярных режимов); найдены управления детерминированным хаосом, переводящие систему из хаотического режима в регулярный;

найлены управления для ведомой системы общего вида, при которых она полностью синхронизируется с ведущей системой. Построена карта динамических режимов системы и найдены основные три сценария перехода к хаосу: за сценарием Фейгенбаума, Рюэля–Тakensа и Помо–Манневиля.

Библиографический список

1. Данилов В.Я., Зинченко А.Ю. Синергетические методы анализа // Киев: НТУУ «КПИ» ВПИ ВПК «Политехника», 2011. 340 с.
2. Ma J.H., Chen Y.S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I // Applied Mathematics and Mechanics. 2001. Vol. 22, № 11. P. 1240.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004. 320 с.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия: Уч. пособие. Изд. 2-е. М.: КомКнига, 2009. 240с.

Национальный технический
университет Украины «КПИ»

Поступила в редакцию
После доработки

31.01.2013
22.03.2013

INVESTIGATION OF REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS OF ONE FINANCIAL SYSTEM

A. Yu. Zinchenko

Based on complex numerical investigation for the nonlinear financial system introduced by Chen a map of dynamic regimes has been built, depending on the bifurcation parameters. All the major scenarios of transition to deterministic chaos have been found. Theorems of the existence of the globally exponentially attractive set and positive invariant, of periodic solutions, of Poincare–Andronov–Hopf bifurcation existence and theorems in the field of control of attractors are proved.

Keywords: Deterministic chaos, strange attractor, bifurcation, Lyapunov characteristic exponent, Poincare section and map, chaotic synchronization.



Зинченко Артем Юрьевич – родился в Киеве (1986), окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт» (2009). После окончания КПИ работает на кафедре математических методов системного анализа. В настоящее время аспирант этой кафедры. Автор пособия «Синергетические методы анализа» и методических указаний и задания к выполнению самостоятельных работ «Синергетические методы анализа» (в соавторстве с научным руководителем). Опубликовал 24 научных статьи и зарегистрировал авторское право на 2 компьютерные программы по направлениям, указанным выше.

Украина, 03056, Киев-56, проспект Победы, 37
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»
E-mail: arrttem@yandex.ru