

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ СРЕДЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

А. К. Крюков, Г. В. Осипов

Изучается синхронизация локально диффузионно связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Исследуется влияние индивидуальных частот элементов в одно- и двумерных осцилляторных средах на распространение возбуждения. Показывается, что скорость распространения возбуждения зависит от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов в ансамбле. Качественные и количественные зависимости, описывающие данный эффект, представлены результатами численного моделирования и объяснены теоретически.

Ключевые слова: Синхронизация, численное моделирование, пространственно-временные структуры.

Введение

В современных исследованиях распределенных систем большое внимание уделяется коллективным эффектам, таким как образование пространственно-временных структур и синхронизация [1–5]. В то же время многие эффекты, связанные с синхронным поведением и механизмы ряда коллективных эффектов в дву- и многомерных средах остаются не до конца понятными.

В данной работе исследуются эффекты при распространении волн в решетках неидентичных локально диффузионно связанных осцилляторов. В частности, исследуется влияние неидентичности элементов на формирование волн и пространственно-временных структур. Иллюстрируется общность механизмов коллективного поведения на примере двух связанных элементов, цепочек и решеток осцилляторов.

В работе показывается, что изменение неоднородности в одной части ансамбля может принципиально изменять характер колебаний и образующихся структур в другой части ансамбля, параметры которой были неизменны. Дается определение «быстрого» и «медленного» распространения возбуждения в ансамблях элементов с релаксационной динамикой.

1. Модель

В качестве модели рассматривается система Бонхоффера–ван дер Поля [6]:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,j} = F(x_{i,j}, y_{i,j}) + d(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 4x_{i,j}), \\ \dot{y}_{i,j} = G_{i,j}(x_{i,j}), \\ i = 1, \dots, M, \\ j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где $F(x_{i,j}, y_{i,j}) = x_{i,j} - x_{i,j}^3/3 - y_{i,j}$, $G_{i,j}(x_{i,j}) = \varepsilon(x_{i,j} + a_{i,j})$, M и N количество элементов вдоль соответствующих измерений решетки, d – сила связи между элементами, значения параметров $\varepsilon \ll 1$, $0 < a_{i,j} < 1$ обеспечивают асимметричные релаксационные колебания. Неидентичность индивидуальных частот элементов обуславливается различными значениями $a_{i,j}$. Граничные условия – «свободные концы». Каждый элемент, будучи изолированным, имеет неустойчивое состояние равновесия $(-a_{i,j}, a_{i,j}^3/3 - a_{i,j})$ и устойчивый предельный цикл.

2. Распространение возбуждения при различных условиях

Известно, что в двумерной среде могут реализоваться концентрические и спиральные волны. Типичные распределения x_{ij} для концентрической и спиральной волн показаны на рис. 1. В обоих случаях в решетке присутствует один генератор ритма. В случае с концентрической волной это самый высокочастотный элемент ансамбля. В случае спиральной волны ритм определяется радиусом кривизны фронта в окрестности ядра волны и удовлетворяет эйкональному уравнению [7].

Времена активации элементов в случаях спиральной и концентрической волны сравнимы и пропорциональны соотношению периодов колебаний элементов. Пространственные масштабы (ширина фронта возбуждения) отличаются значительно сильнее. Таким образом, фронт возбуждения концентрической волны распространяется быстрее, чем фронт спиральной. Однако для элементов, находящихся далеко от ядра спиральной волны и центра концентрической единственное отличие состоит

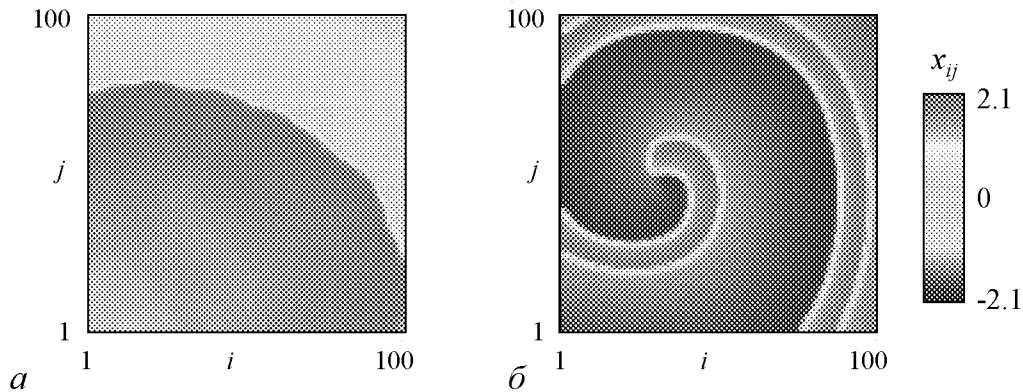


Рис. 1. Характерное мгновенное значение x_{ij} в решетке связанных неидентичных осцилляторов в синхронном режиме с одной (а) концентрической и (б) спиральной волнами

в том, с какой частотой приходят фронты возбуждения. На основании этих рассуждений можно предположить, что существует зависимость скорости распространения возбуждения от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов ансамбля.

3. Два связанных элемента

Для качественного объяснения зависимости скорости распространения возбуждения от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов рассмотрим систему двух связанных слабо неидентичных осцилляторов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, y_1) + d(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = G_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_2, y_2) + d(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = G_2(x_2). \end{cases} \quad (2)$$

Неидентичность элементов определяется разностью параметров $\Delta a = a_2 - a_1$, входящих в $G_{1,2}$. Фазовый портрет несвязанного элемента показан на рис. 2, *a*.

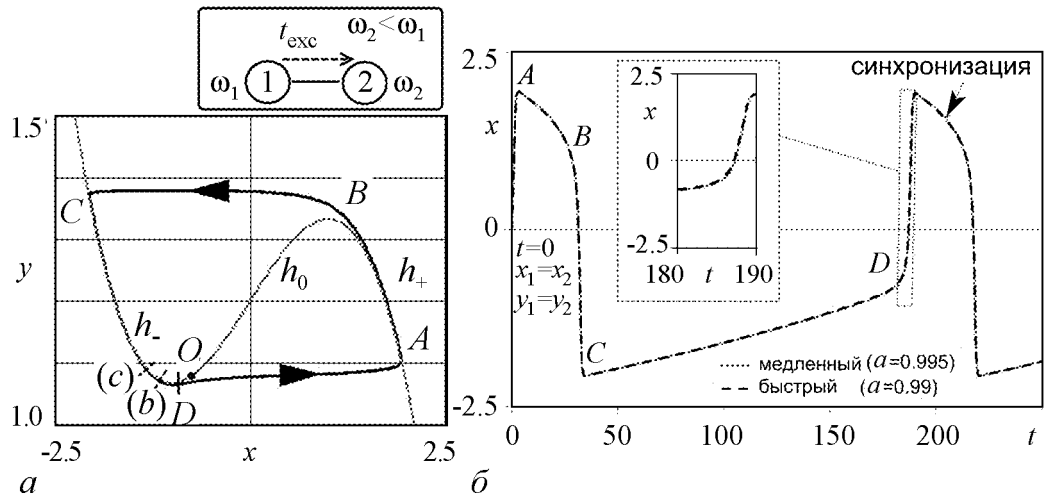
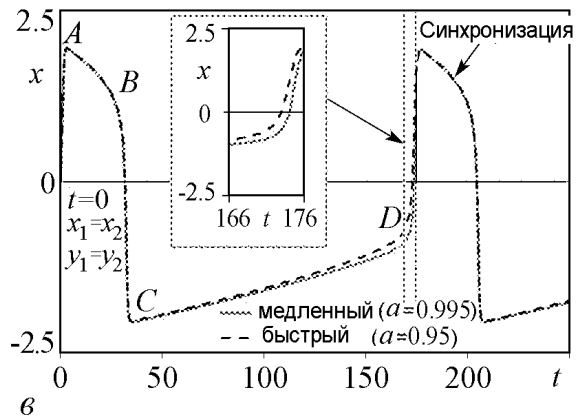


Рис. 2. *a* – Фазовый портрет одного автоколебательного элемента: *ABCD* – устойчивый предельный цикл, *O* – неустойчивое состояние равновесия, *h₋* и *h₊* – устойчивые ветви кривой медленных движений, *h₀* – неустойчивая ветвь кривой медленных движений; *б* – осциллограммы двух связанных осцилляторов (высокочастотный элемент показан штриховой линией) в случае малой расстройки Δa ; *в* – осциллограммы двух связанных элементов в случае большой расстройки Δa . Значения параметров: $d = 0.003$, $\varepsilon = 0.02$



Здесь $ABCD$ – устойчивый предельный цикл, O – неустойчивое состояние равновесия (координаты состояний равновесия для рассматриваемых элементов различны). Разница периодов элементов обуславливается различными временами прохождения участка предельного цикла, близкого к их состоянию равновесия. Пусть изначально оба элемента находятся в точке D . В следующий момент времени по быстрым движениям они оба переходят в точку A . Далее вместе проходят устойчивую ветвь кривой медленных движений h_+ до точки B и практически одновременно приходят в точку C . Ветвь h_- элементы будут проходить с разными скоростями из-за влияния положения состояния равновесия. Поэтому когда «быстрый» (высокочастотный) элемент вновь достигнет точки D , медленный элемент достигнет некой координаты на h_- . Рассмотрим случаи слабо неидентичных рис. 2, б и сильно неидентичных рис. 2, в элементов. Как только «быстрый» элемент перешел в точку A , «медленный» элемент станет подстраиваться под ритм «быстрого». Очевидно, что чем выше разница индивидуальных частот, тем больше времени необходимо для возбуждения «медленного» элемента, что полностью подтверждается осциллограммами, приведенными на рис. 2, б и в. Когда подстройка компенсирует разность, возникающую в ходе движения элементов по h_- , можно говорить о режиме синфазной синхронизации. Частота синфазной синхронизации близка к индивидуальной частоте «быстрого» элемента [8].

4. Цепочка связанных элементов

Для определения зависимости скорости распространения фронта от разницы между частотой синхронизации и индивидуальными частотами рассмотрим цепочку связанных осцилляторных элементов. Распределение параметра a было случайным равномерным в заданном интервале, что приблизительно соответствует случайному равномерному распределению индивидуальных частот элементов [9,10].

Принимая во внимание анализ, приведенный в предыдущем разделе для двух связанных элементов, можно предположить, что в цепочке будет выполняться следующее.

i) Чем больше неидентичность элементов, тем больше разность между средней $\langle \omega \rangle$ и максимальной индивидуальной частотой колебаний элементов ω_{\max} и тем ниже скорость распространения возбуждения.

ii) При $\omega_{\max} - \langle \omega \rangle \rightarrow 0, V \rightarrow +\infty$.

Заметим, если $\omega_{\max} - \langle \omega \rangle$ становится больше некоего критического значения, синхронизация разрушается, и не имеет смысла говорить о скорости распространения возбуждения V .

Было проведено три серии экспериментов. В первой серии экспериментов (рис. 3) нижняя граница распределения индивидуальных частот оставалась неизменной (самый медленный элемент), а наибольшая частота (частота синхронизации) увеличивалась от первого эксперимента (рис. 3, а) к последующим (рис. 3, б–д). Таким образом, увеличивалась и неидентичность, так как использовалось случайное равномерное распределение индивидуальных частот в цепочке. Положение генераторов ритма (самых высокочастотных элементов) соответствует нижним изломам волновых фронтов (буквой «V») на пространственно-временной диаграмме, а места встречи волновых фронтов – верхним изломам.

Во второй серии экспериментов (рис. 4) постоянной оставалась наибольшая частота (равная частоте синхронизации), а наименьшая и средняя снижались от первого эксперимента (рис. 4, а) к последующим (рис. 4, б–д).

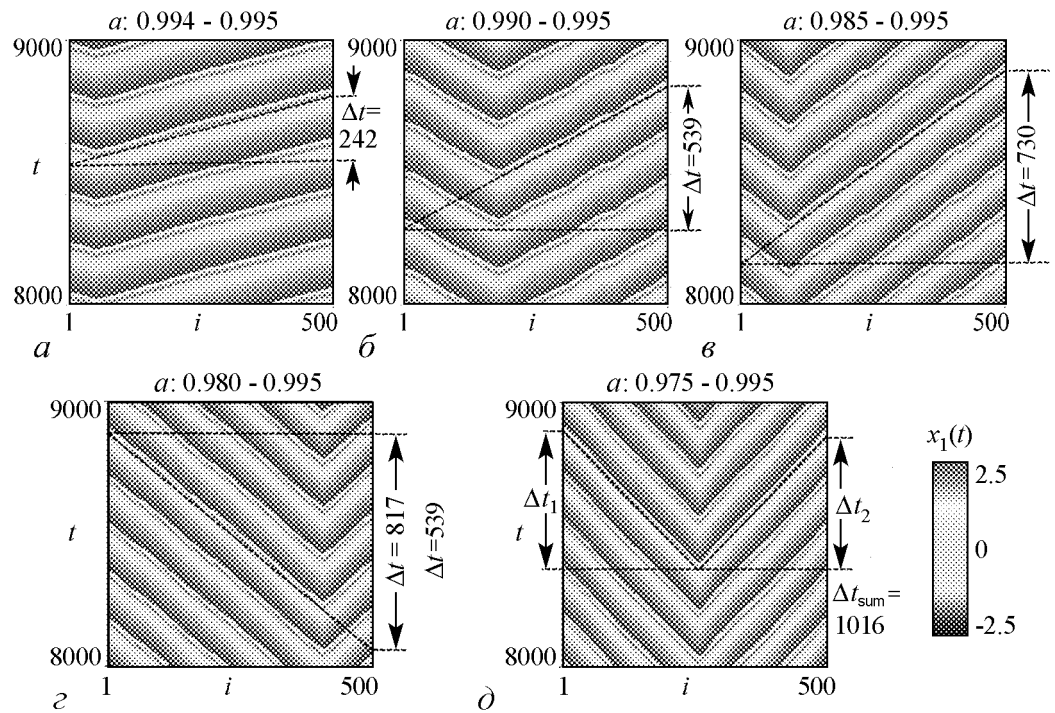


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Нижняя граница частоты неизменна $\omega_{\min} = \text{const}$, верхняя граница увеличивается от a к δ . $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

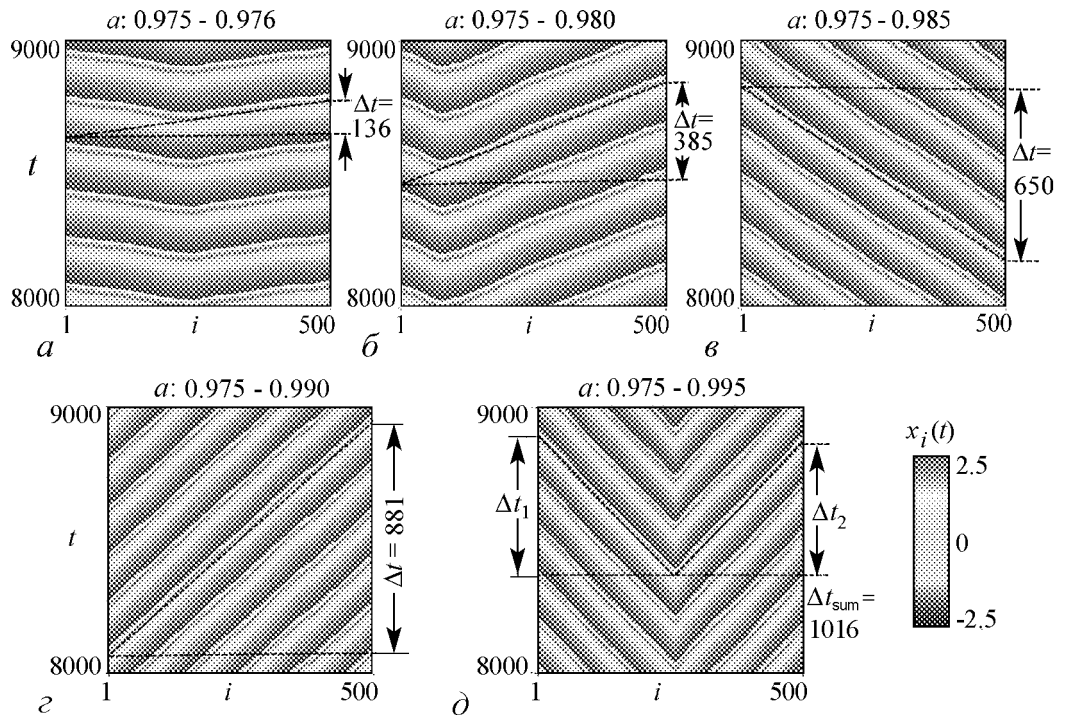


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Верхняя граница частоты неизменна $\omega_{\max} = \text{const}$, нижняя граница уменьшается от a к δ . $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

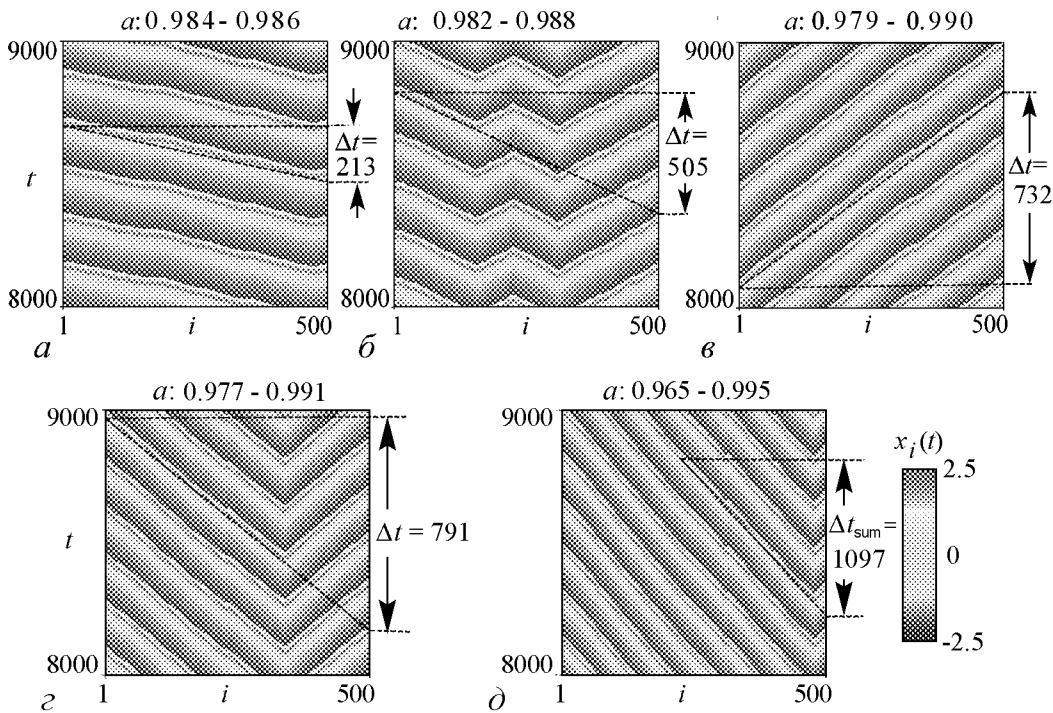


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Верхняя граница частоты увеличивается от a к d , нижняя граница уменьшается от a к d , но среднее значение частоты индивидуальных элементов в цепочке сохраняется $\langle \omega \rangle = \text{const}$. $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

В третьей серии экспериментов (рис. 5) верхняя граница частоты увеличивалась, а нижняя – уменьшалась таким образом, чтобы средняя частота оставалась неизменной, но увеличивалась неидентичность от первого эксперимента (рис. 5, a) к последующим (рис. 5, $b-d$).

Скорость распространения волны обратно пропорциональна Δt_{sum} – времени прохождения волны по цепочке, которая приведена на каждой пространственно-временной диаграмме. Во всех экспериментах эта скорость убывает с увеличением неоднородности. Зависимость скорости распространения возбуждения от соотношения между максимальным и минимальным индивидуальными периодами в цепочке из 500 элементов показана на рис. 6

Во всех экспериментах было получено, что скорость распространения возбуждения практически не зависит отдельно от средней частоты ансамбля или частоты синхронизации, а зависит от их разности.

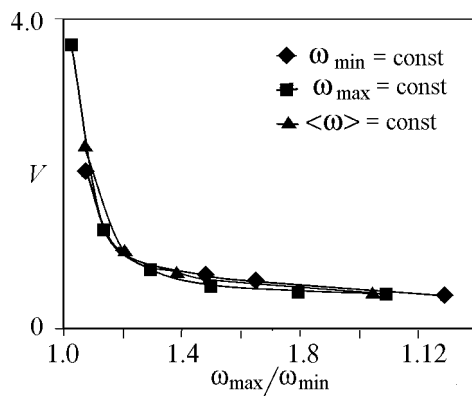


Рис. 6. Зависимости скорости распространения возбуждения для каждой из поставленных серий экспериментов (см. рис. 3–5)

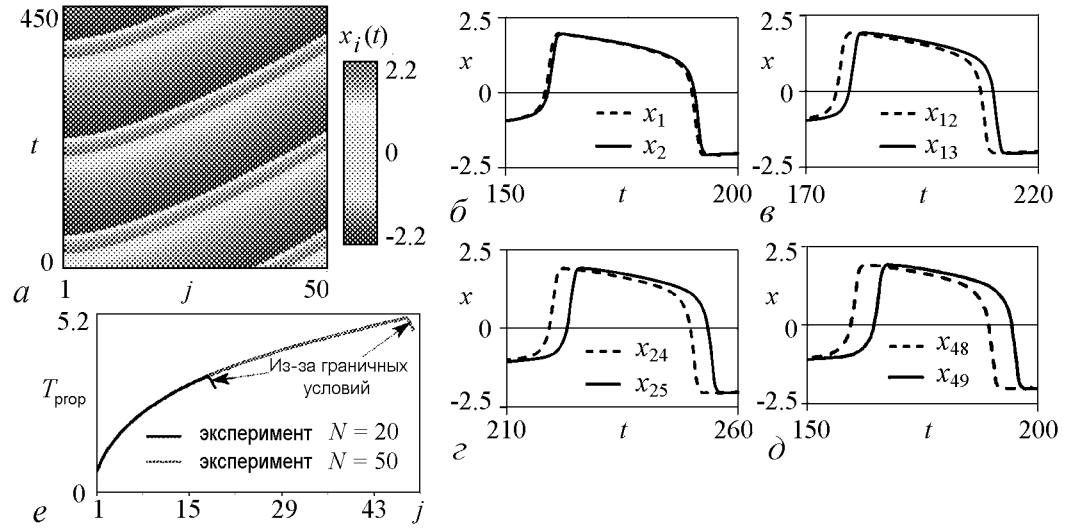


Рис. 7. *a* – пространственно-временная диаграмма динамики цепочки из 50 элементов с монотонным распределением a_j (наиболее высокочастотные элементы слева); *б–д* – участки осциллограмм пар соседних элементов, показывающие подстройку более медленного элемента под общую частоту; *е* – время передачи возбуждения от $(j - 1)$ -го к j -му элементу для цепочек из $N = 20$ и 50 элементов. $d = 0.03$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

Также был проведен эксперимент с цепочкой, в которой параметр a был распределен линейно. Пространственно-временная диаграмма, показывающая распространение возбуждения, приведена на рис. 7, *a*. На рис. 7, *б–д* показаны участки осциллограмм некоторых соседних элементов, иллюстрирующие временные задержки при передаче возбуждения между элементами. Зависимость времени передачи возбуждения от номера элемента показана на рис. 7, *е*. Видно, что при малых расстройках зависимость времени распространения носит нелинейный характер, при больших расстройках зависимость становится близкой к линейной.

5. Распространение возбуждения в релаксационных осцилляторах

Для теоретического исследования полученных выше закономерностей упростим модель [8], заменив нелинейную функцию в правой части на ее кусочно-линейную аппроксимацию

$$F_i = \begin{cases} \frac{-4}{3} x_i - 2 - y_i, & \text{при } x_i \leq -1, \\ \frac{2}{3} x_i - y_i, & \text{при } -1 < x_i < 1, \\ \frac{-4}{3} x_i + 2 - y_i, & \text{при } x_i \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Положим также малый параметр $\varepsilon = 0$ и таким образом понизим порядок системы. Рассмотрим два связанных элемента. Предельный цикл и возможный вариант взаимного расположения элементов показан на рис. 8.

Полученная система двух элементов – это кусочно-линейная система второго порядка, которую можно решить аналитически [8] для каждого из возможных случаев:

i) оба элемента находятся на правой ветви $h_+(x)$;

ii) оба элемента находятся на левой ветви $h_-(x)$;

iii) первый элемент находится на $h_+(x)$, а второй – на $h_-(x)$;

iv) первый элемент находится на $h_-(x)$, а второй – на $h_+(x)$.

В частности решения для случая (ii) выглядят следующим образом:

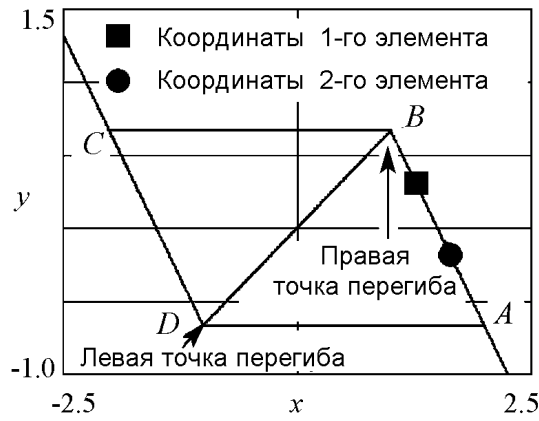


Рис. 8. Кусочно линейная аппроксимация правой части (3) и один из возможных случаев взаимного расположения элементов (оба в активной фазе)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) - a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) + a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_2 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_1, \\ y_2^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) - a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_2, \end{array} \right. \quad (4)$$

решения для (iii):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{+-}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - 2 - a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) + a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) + 2 - da_2 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_1, \\ y_2^{+-}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + 2 + a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) - a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_2. \end{array} \right. \quad (5)$$

Таким образом, есть возможность аналитически просчитать, как будет происходить набег разности фаз и подстройка в системе двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Получим зависимость времени передачи возбуждения от

более «быстрого» элемента к более «медленному» в зависимости от расстройки параметра a_i между ними. Следуя рассуждениям из раздела 3, оба элемента придут в точку C практически одновременно, это случай (ii). В момент времени t_1 «быстрый» элемент достигнет точки D ($y_1 = -2/3$).

В момент времени t_1 второй элемент будет находиться на ветви h_- , его координата может быть вычислена по формуле

$$y_2^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2} y_2^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2} y_1^{--}(\tau_0) + a_1 \left(\frac{2}{3} + d \right) - a_2 \left(\frac{2}{3} + d \right) \right] \exp \left(-\frac{t_1 - \tau_0}{4/3 + 2d} \right) + \left[\frac{1}{2} y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2} y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{3} a_2 \right] \exp \left(-\frac{3}{4} (t_1 - \tau_0) \right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d \right) a_2. \quad (6)$$

Поскольку время движения из точки D в точку A происходит мгновенно, начиная с t_1 первый элемент будет уже на ветви h_+ . В момент времени t_2 , который получается решением (5), «медленный» элемент достигнет точки D .

Разность $t_2 - t_1$ и будет временем передачи возбуждения, которое будет зависеть от параметров a_1, a_2 . Данная зависимость представлена на рис. 9. Весь коридор расстройек соответствует синхронизации в системе. Видно, что механизм подстройки может происходить в соответствии с двумя различными механизмами: при малых расстройках ($\Delta a < \Delta a^*$) и при больших расстройках ($\Delta a > \Delta a^*$). Действительно, переход первого элемента на h_+ как бы приподнимает точку перегиба y_2^{extr} для другого элемента за счет слагаемого $d(x_2 - x_1)$ в правой части уравнений. Если в этот момент координата второго элемента $y_2 < y_2^{\text{extr}}$, то второй элемент оказывается уже в области притяжения активной фазы. Из-за особенностей упрощенной модели, переключение осуществляется мгновенно. В исходной модели в рассматриваемом коридоре a время быстрых движений составляет порядка $t = 4$ счетных единиц.

Возможен и другой вариант переключения. Переход первого элемента на h_+ поднимает точку перегиба y_2^{extr} для другого элемента, но из-за $y_2 > y_2^{\text{extr}}$ второй

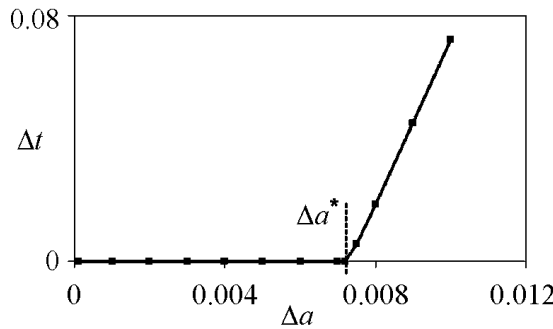


Рис. 9. Зависимость разности времен перехода элементов из пассивной фазы h_- в активную фазу h_+ от расстройки параметра a . При $\Delta a < \Delta a^*$ подстройка частоты «медленного» элемента осуществляется только за счет быстрых движений, при $\Delta a > \Delta a^*$ для синхронизации «медленному» элементу необходимо пройти некоторый участок по медленным движениям

элемент продолжает движение по пассивной фазе и лишь спустя некоторое время переходит на h_+ . Такое движение и формирует время передачи возбуждения между элементами. Аналитически показано, что эта зависимость линейна.

Аналогичное поведение наблюдается и в исходной модели (см. рис. 7, *e*): до некоторой величины частотной расстройки зависимость времени передачи возбуждения от Δa нелинейна и определяется неким ненулевым временем нахождения элементов на участках быстрых движений. При больших расстройках время передачи возбуждения нарастает по закону, близкому к линейному.

6. Двумерные ансамбли

Описанный выше эффект имеет ряд важных следствий. Рассмотрим две соединенные решетки элементов (рис. 10). Левая решетка состоит из низкочастотных элементов, правая – из высокочастотных. Этот пример реализуется в живых системах [11]. Рассмотрим случай, когда разница средних частот между решетками значительно превышает разброс индивидуальных частот внутри каждой из них (каждая из решеток в отдельности является слабо неоднородной). То есть $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \gg \gg \sigma(\Omega_{1,2})$, где Ω_i – средняя индивидуальная частота элементов в i -й части решетки, а $\sigma(\Omega_i)$, среднеквадратичное отклонение индивидуальных частот элементов в i -й части решетки.

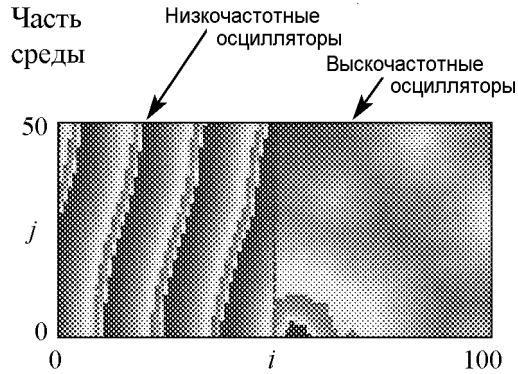


Рис. 10. Характерное мгновенное распределение x_{ij} в решетке, представляющей из себя соединение двух слабо неоднородных высокочастотной и низкочастотной решеток. $d = 0.007$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

Пусть сила связи достаточна для синхронизации всего ансамбля. В следствие случайного распределения индивидуальных частот генератор ритма находится в произвольной точке правой решетки. Численное моделирование показало, что в правой части решетки возбуждение распространяется быстро, и на масштабе 50 элементов укладывается не более одной пространственной длины волны. В левой же решетке распространение идет медленнее, и на масштабе 50 элементов укладывается более трех длин волн, что соответствует падению скорости распространения более чем в 3 раза и это при том, что элементы в левой части решетки являются слабо неоднородными. Замедление происходит именно из-за большой разницы между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов. Таким образом, данный эффект оказывает влияние на формирование пространственно-временных структур.

Рассмотрим еще один пример. Он показывает, что скорость распространения возбуждения в одной части ансамбля оказывает влияние не только на скорость распространения волн, но и на общий характер динамики в ансамбле. Пусть решетка 50×50 осцилляторных элементов окружена возбудимыми элементами: в результате получаем решетку 150×150 (рис. 11).

Одним из примеров такой среды, где соседствуют осцилляторные и возбудимые элементы является синусный узел (ансамбль осцилляторных элементов) в сердце, находящийся между соединением верхней полой вены с правым предсердием [12].

В случае (а) осцилляторные элементы слабо неидентичны, в результате скорость распространения возбуждения высокая, и пространственный период волны в решетке автоколебательных элементов значительно больше характерного размера решетки. Поэтому практически все время решетка автоколебательных элементов либо вся находится в покое, либо вся в возбужденном состоянии. Подобная динамика означает, что практически в каждый момент времени на периметре решетки значение x_{ij} близки. Это вызывает регулярные концентрические волны в возбудимой

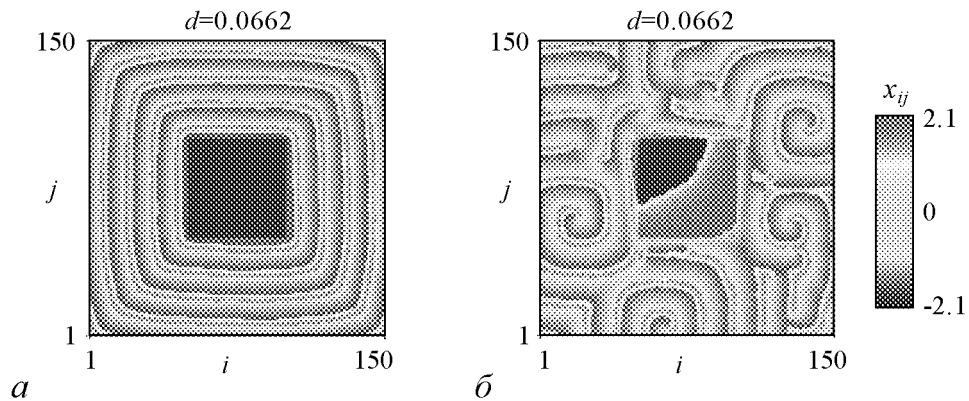


Рис. 11. Характерные мгновенные распределения x_{ij} в решетке автоколебательных и возбудимых элементов при малой (а) большой (б) степени неоднородности внутри осцилляторной решетки. Остальные параметры и начальные условия в (а) и (б) идентичны. $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

среде (рис. 11, а), что можно интерпретировать как нормальную сердечную деятельность.

В случае (б) осцилляторные элементы сильно неидентичны, в результате скорость распространения возбуждения низкая, и пространственный период волны в решетке автоколебательных элементов сравним с масштабами решетки осцилляторных элементов. Это означает формирование волновой структуры в осцилляторной решетке и соответствует сосуществованию пассивных и активных областей в ней (рис. 11, б). Таким образом, в каждый момент времени на периметре автоколебательной решетки значение x_{ij} претерпевает сильные перепады (так как осцилляторы релаксационные), что способствует формированию волн со свободными концами в возбудимой решетке. Такая динамика приводит к образованию множества спиральных волн. Подчеркнем, что индивидуальные параметры возбудимой решетки, сила связи d и начальные условия в (а) и (б), брались одинаковыми. Поэтому данный эксперимент, возможно, представляет собой не рассматривавшийся ранее способ формирования аритмий в сердце, в частности, тахикардии и фибрилляции.

Заключение

Таким образом, установлено, что скорость распространения возбуждения обратно пропорционально зависит от разности частоты возбуждения и индивидуальных частот осцилляторов. Проиллюстрированы механизмы, определяющие данную зависимость. Рассмотрены случаи «быстрого» и «медленного» распространения возбуждения между релаксационными осцилляторами. Получен эффект, при котором возникновение или изменение характера неоднородности в одном из участков ансамбля вызывает сильное изменение динамики всей системы и формирование сложных пространственно-временных структур.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (контракты № 11.519.11.2022 и № 11.519.11.2015)740.11.0919) и РФФИ (контракт 11-02-92003).

Библиографический список

1. *Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer Verlag, 2007.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. 7198.
4. *Torre V.* A theory of synchronization of heart pace-maker cells // *J. Theor. Biol.* 1976. Vol. 61. P. 55.
5. *Kryukov A.K., Petrov V.S., Averyanova L.S., Osipov G.V., Chen W., Drugova O. and Chan C.K.* Synchronization phenomena in mixed media of passive, excitable and oscillatory cells // *Chaos.* 2008. Vol. 18. 037129.
6. *Bonhoeffer K.F.* Models of nerve excitation // *Naturwissenschaften.* 1953. Vol. 40. P. 301.
7. *Зыков В.С.* Аналитическая зависимость скорости волны возбуждения в двумерной возбудимой среде от кривизны ее фронта // *Биофизика.* 1980. Vol. 25.
8. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths Jurgen* Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 046209.
9. *Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: два элемента // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 2. С. 16.
10. *Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: цепочка и решетка связанных элементов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 2. С. 29.
11. *Diamant N.E., Rose P.K., and Davidson E.J.* Computer simulation of intestinal slow-wave frequency gradient // *Am. J. Physiol.* 1970. Vol. 219. P. 1684.
12. *Фундаментальная и клиническая физиология / Под ред. А. Камкина и А. Каменского.* М.: Издательский центр «Академия», 2004. 1072 с.

*Нижегородский государственный
университет
Национальный исследовательский
университет*

*Поступила в редакцию 6.08.2012
После доработки 11.12.2012*

OSCILLATORY MEDIA PROPERTIES INFLUENCE ON EXCITATION PROPAGATION

A. K. Kryukov, G. V. Osipov

We study synchronization in ensembles of locally diffusive coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Individual elements frequencies influence on excitation propagation in one- and two-dimensional media is investigated. We show that excitation propagation

speed depends on frequency mismatch between synchronization frequency and elements' individual frequencies. Qualitative and quantitative results describing this effect are numerical modeling data and analytical research.

Keywords: Synchronization, numerical modeling, spatio-temporal structures.



Крюков Алексей Константинович – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Окончил аспирантуру кафедры теории управления и динамики машин ННГУ (2010). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по радиофизике (2010). Старший преподаватель кафедры теории управления и динамики машин ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Соавтор 19 публикаций.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: alkryukov@gmail.com



Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (НСК, 1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук (ННГУ, 2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин». Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: osipov@vmk.unn.ru