



АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА – ГЕНЕРАТОР ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА: СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ

С. П. Кузнецов, В. И. Пономаренко, Е. П. Селезнев

Рассмотрена схема электронного устройства, представляющего собой автономную динамическую систему с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, и выполнено моделирование хаотической динамики в программной среде Multisim. Генератор гиперболического хаоса реализован в виде лабораторного макета, проведено его экспериментальное исследование и продемонстрировано соответствие наблюдаемой динамики результатам численного и схемотехнического моделирования. Привлекательной для возможных приложений является грубость, или структурная устойчивость, системы обусловленная гиперболической природой аттрактора, то есть нечувствительность характеристик генерируемого хаоса к помехам, шумам, погрешностям изготовления.

Ключевые слова: Хаос, аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, автономная система, эксперимент, операционный усилитель, Multisim.

Введение

Равномерно гиперболические хаотические аттракторы, обладающие свойством грубости, или структурной устойчивости, такие как соленоид Смейла–Вильямса или аттрактор Плыкина, были введены математиками нескольких десятилетий назад [1–4]. В то время ожидалось, что они могут служить для описания хаоса и турбулентности, однако впоследствии выяснилось, что встречающиеся в приложениях хаотические аттракторы обычно не попадают в этот класс. Физически реализуемые системы с гиперболическим хаосом были обнаружены (или, скорее, сконструированы) только совсем недавно [5–8]. В связи с этим возникли предпосылки для создания на этой основе реально функционирующих устройств, демонстрирующих структурно устойчивый хаос, например, в электронике с возможным их применением в схемах скрытой коммуникации [9, 10], шумовой локации [11], в криптографии [12, 13], для генерации случайных чисел [14]. Привлекательность структурно устойчивых систем [15–17], с практической точки зрения, обусловлена нечувствительностью характеристик генерируемого хаоса к погрешностям изготовления, шумам, помехам и т.п.

При разработке нетривиальных вопросов, связанных с приложениями, важным моментом будет существование надежной теоретической базы, обеспеченной наличием хорошо развитой математической теории. Например, возможность полного символического описания траекторий на однородно гиперболическом аттракторе позволяет трактовать динамический процесс в контексте идей и представлений теории информации и кодирования, что, по-видимому, важно с точки зрения информационных и коммуникационных приложений.

Первое экспериментальное исследование системы с аттрактором Смейла–Вильямса было представлено в работе [18]; также реализованы и изучены экспериментально варианты систем, использующих запаздывающую обратную связь [19, 20]. Несколько схем, отвечающих устройствам с аттракторами типа Смейла–Вильямса и Плыкина, рассмотрено в работах [21, 22] с привлечением схемотехнического моделирования в программной среде Multisim.

Приходится отметить, однако, что все реальные схемы электронных устройств, где пока удалось осуществить гиперболический хаос, отвечают *неавтономным системам*, требующим для своего функционирования заданного определенным образом периодического внешнего воздействия. До последнего времени не был решен вопрос о реализации равномерно гиперболического аттрактора в *автономной системе*, то есть о создании полноценного генератора гиперболического хаоса с демонстрацией его функционирования в лабораторном эксперименте. В этом состоит цель исследования, результаты которого представлены в настоящей статье.

1. Автономная система дифференциальных уравнений с аттрактором Смейла–Вильямса

В работе [6] рассмотрено несколько искусственных примеров автономных систем с гиперболическими аттракторами, одна из которых имеет минимальную размерность, допускающую существование аттрактора Смейла–Вильямса. Здесь она будет принята за основу с некоторой модификацией, имеющей целью упрощение схемотехнической реализации.

Следуя [6], обратимся сначала к двумерной системе типа «хищник–жертва», мгновенное состояние которой задается парой неотрицательных переменных r_1, r_2 ,

$$\dot{r}_1 = 2[1 - r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{50}(r_1 - 1)^2]r_1, \quad \dot{r}_2 = 2(r_1 - 1)r_2. \quad (1)$$

В установившемся режиме она демонстрирует периодические автоколебания, причем на плоскости переменных r_1, r_2 изображающая точка посещает окрестность начала координат раз за разом. После каждого такого прохождения происходит сначала возбуждение первой подсистемы (переменная r_1 , «жертва»), потом возбуждение второй (r_2 , «хищник»), далее затухание первой подсистемы, более медленное затухание второй, и затем цикл повторяется.

Пусть теперь r_1 и r_2 представляют собой квадраты модуля двух комплексных величин a_1 и a_2 . Запишем уравнения для этих переменных и дополним их членами, описывающими связь подсистем, пропорциональными, соответственно, a_2^2 и a_1 , что приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= [1 - |a_2|^2 + \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{50}(|a_1|^2 - 1)^2]a_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 a_2^2, \\ \dot{a}_2 &= (|a_1|^2 - 1)a_2 - \varepsilon_2 a_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ε_1 и ε_2 – параметры связи, которые в дальнейшем изложении фиксированы и приняты равными $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$.

В системе с комплексными переменными (2) активизация второй подсистемы происходит в присутствии воздействия со стороны первой подсистемы, благодаря чему аргумент a_2 наследует величину аргумента, отвечавшую переменной a_1 . Затем на стадии затухания вторая подсистема, в свою очередь, обеспечивает затравочное воздействие для первой при очередном прохождении орбиты вблизи начала координат. Поскольку соответствующий член содержит *квадрат* комплексной переменной a_2^2 , передача возбуждения сопровождается удвоением аргумента комплексного числа. Далее процесс повторяется, причем на каждом новом цикле угловая переменная, отвечающая аргументу комплексных величин, умножается на фактор 2. Это соответствует растягивающему отображению окружности – отображению Бернулли $\Phi_{n+1} = 2\Phi_n$, которое характеризуется хаотической динамикой и имеет положительный показатель Ляпунова $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$.

Полагая $a_1 = x + iu$ и $a_2 = y + iv$, можно отделить в (2) действительные и мнимые части и перейти к уравнениям в действительных переменных

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2 - 1)^2]x - \frac{1}{2}\varepsilon_1(y^2 - v^2), \\ \dot{u} &= [1 - (y^2 + v^2) + \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \frac{1}{50}(x^2 + u^2 - 1)^2]u - \varepsilon_1 yv, \\ \dot{y} &= (x^2 + u^2 - 1)y - \varepsilon_2 x, \\ \dot{v} &= (x^2 + u^2 - 1)v - \varepsilon_2 u. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания динамики в терминах отображения Пуанкаре введем сечение в четырехмерном фазовом пространстве подходящей гиперповерхностью и определим соответствующее трехмерное отображение на этой гиперповерхности. Его аттрактором будет служить объект в виде соленоида Смейла–Вильямса, поскольку имеется угловая переменная, претерпевающая удвоение на каждой очередной итерации, и, как следует из анализа показателей Ляпунова (см. ниже), это сопровождается сжатием фазового объема по остальным направлениям в пространстве состояний.

На рис. 1 приведены графики зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (3). Можно видеть, что стадии активности одной и другой подсистемы перемежаются со стадиями подавления. Согласно вычислениям, средний временной период повторения стадий для данного режима $\langle T \rangle = 5.68$.

На рис. 2 показаны портреты аттрактора – один на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме (x, u) , а другой на плоскости амплитудных переменных двух подсистем $(r_1, r_2) = (x^2 + u^2, y^2 + v^2)$.

На рис. 2, б возбуждение первой подсистемы соответствует уходу траектории от начала координат вправо, возбуждение второй – уходу вверх с последующим подавлением сначала первой, а затем второй подсистемы, и новым возвращением в окрестность начала координат.

Для задания секущей Пуанкаре используем соотношение $r_2 = y^2 + v^2 = c_0$, $c_0 = 3$, причем учитываем проходы траекторий только в направлении увеличения амплитуды r_2 .

На рис. 3 показан портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных второй подсистемы и приведена диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной – аргумента комплексной амплитуды

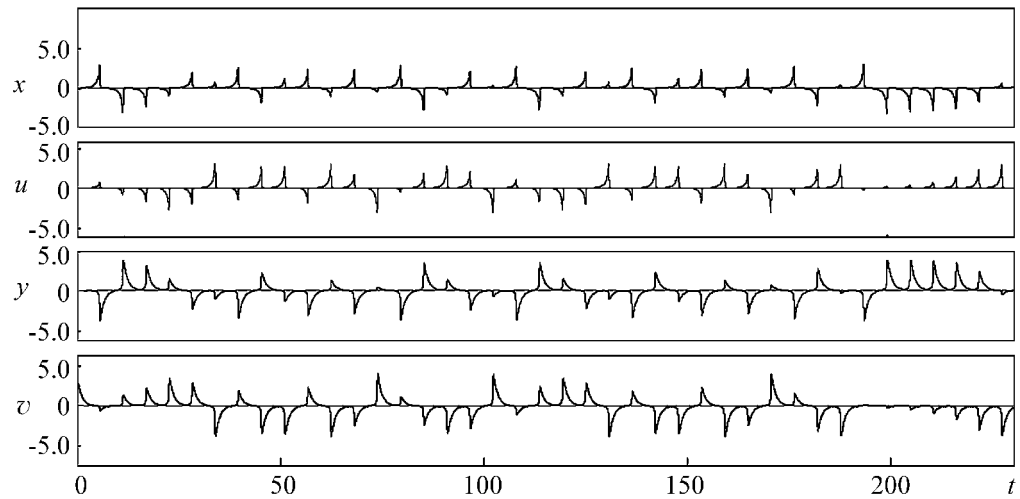


Рис. 1. Зависимости от времени динамических переменных, полученные при численном решении уравнений (3) для $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$

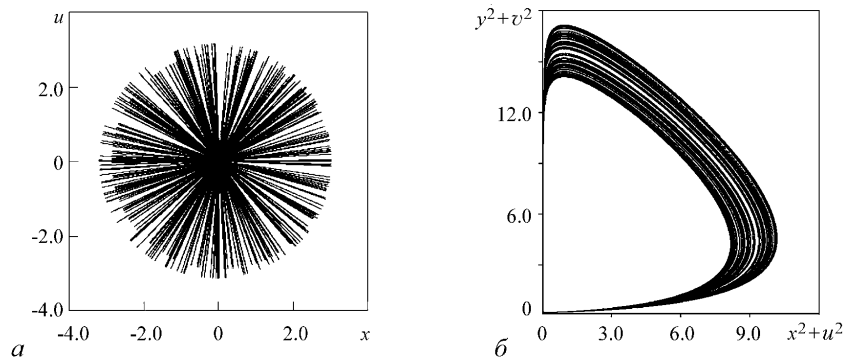


Рис. 2. Портреты аттрактора системы (3) при $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$: на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме (а) и на плоскости амплитудных переменных первой и второй подсистемы (б)

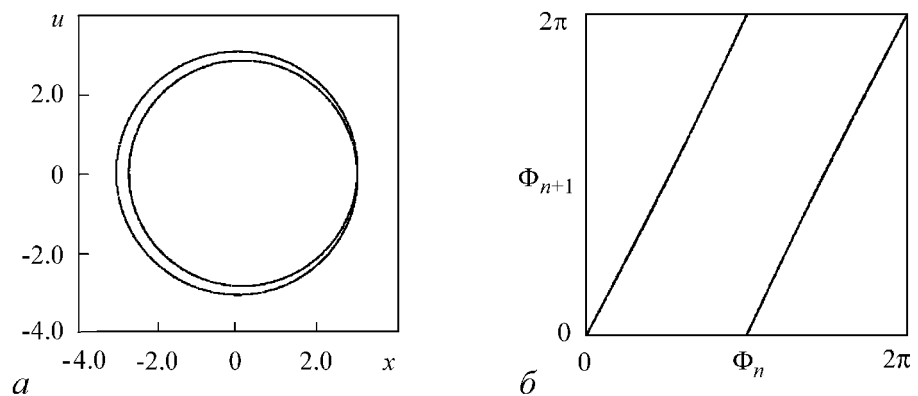


Рис. 3. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы (а) и диаграмма преобразования циклической переменной (аргумента комплексной амплитуды) второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре (б) для системы (3) при $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$

второй подсистемы при последовательных проходах секущей Пуанкаре. Как можно видеть, оно с замечательной точностью соответствует отображению Бернулли.

Показатели Ляпунова для данного аттрактора, рассчитанные по методу Бенеттина [23],

$$\lambda_1 = 0.1219, \quad \lambda_2 = 0.0000, \quad \lambda_3 = -0.6867, \quad \lambda_4 = -1.0761. \quad (4)$$

Учитывая, что средний период прохода секущей Пуанкаре $\langle T \rangle = 5.68$, для старшего показателя отображения Пуанкаре получаем $\Lambda_1 = \lambda_1 \langle T \rangle = 0.692$, что прекрасно согласуется с ожидаемым значением $\ln 2 = 0.6931\dots$. Второй показатель нулевой, с точностью до погрешности вычислений, и должен интерпретироваться, как связанный с вектором возмущения типа сдвига вдоль опорной траектории. Остальные показатели отрицательные. Размерность по Каплану–Йорке [23] для аттрактора отображения Пуанкаре $D_{KY} = 1 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 1.18$, а для аттрактора потоковой системы на единицу больше.

2. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса

При конструировании описанной ниже схемы принята идеология по возможности точного воспроизведения уравнений с использованием элементов, применяемых в технике аналогового моделирования, таких как интеграторы, умножители, сумматоры [24,25], что представляется разумным в качестве первого шага на пути построения реальных генераторов гиперболического хаоса. В дальнейшем, по видимому, можно будет реализовать более простые схемы на традиционной для радиотехники элементной базе (транзисторы, диоды, конденсаторы, резисторы).

Схема, представленная на рис. 4, содержит операционные усилители U1–U7 и умножители A1–A10. Все умножители характеризуются коэффициентом передачи K , равным по абсолютной величине $1/10$ (то есть при входных напряжениях U_1 и U_2 на выходе получается напряжение KU_1U_2), причем для умножителей A6 и A7, обозначенных на схеме серым цветом, этот коэффициент отрицательный.

С каждой из четырех динамических переменных x, u, y, v ассоциируется интегратор на базе операционного усилителя (соответственно, U1, U2, U3, U4), емкости (C1, C2, C3, C4) и резистора (R1, R2, R3, R4). Собственно величины x, u, y, v отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3 и C4, соответственно.

Динамика во времени соответствует системе уравнений (3) при измерении времени в единицах τ . Это константа с размерностью времени $\tau = RC$, определенная через емкость $C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4$ и характеристическое сопротивление $R = 100R_{1,2,3,4} = 10$ кОм. При указанных на схеме номиналах $\tau = 0.22$ мс.

Умножители A1, A2, операционный усилитель U5 и резисторы R13, R14, R7, R8 образуют блок, формирующий коэффициент $\mu_2 = x^2 + u^2 - 1$. Соответствующий сигнал, будучи умножен на y и v посредством элементов A8 и A9, подается на интеграторы, отвечающие за третье и четвертое уравнения системы (3). Также сигнал μ_2 и его квадрат, получаемый посредством умножителя A5, используются, вместе с выходным сигналом блока на элементах A3, A4, U6, для получения коэффициента $\mu_1 = 1 - (y^2 + v^2) + 1/2(x^2 + u^2) - 1/50(x^2 + u^2 - 1)^2$ на выходе операционного усилителя U6. Коэффициенты, присутствующие в выражении для μ_1 , определяются соотношением сопротивлений R5, R9, R10, R15 и R17. Будучи умножен на x и y посредством элементов A6, A7, сигнал μ_1 поступает на интеграторы, соответствующие первому и второму уравнениям (3). Члены, описывающие воздействие первой

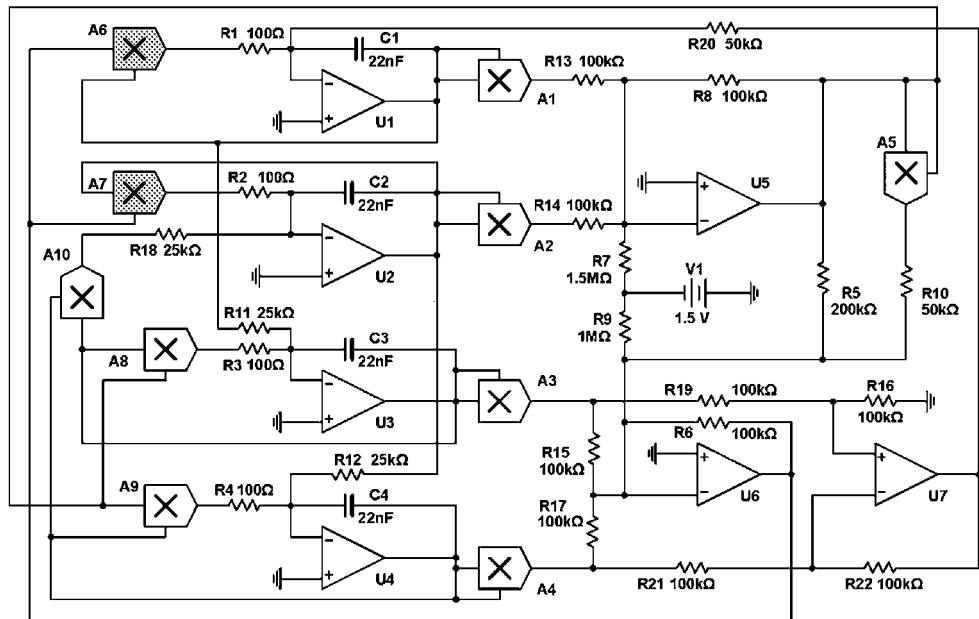


Рис. 4. Схема устройства, динамика которого описывается уравнениями (3), где за единицу времени принята величина $\tau = 0.22$ мс, а коэффициенты связи составляют $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.4$. Динамические переменные x , y , z , v отвечают напряжениям на конденсаторах C1, C2, C3, C4, измеренным в вольтах

подсистемы на вторую, формируются благодаря подаче сигналов x и u через одинаковые резисторы R11 и R12. (Их сопротивление отвечает за величину параметра связи ε_2 , будучи ему обратно пропорциональным.) Член в первом уравнении (3), определяющий воздействие со стороны второй подсистемы, формируется благодаря подаче сигнала, пропорционального разности квадратов переменных y и v с выхода операционного усилителя U7 на соответствующий интегратор через резистор R20. Аналогично член, отвечающий за связь во втором уравнении, обеспечивается выходным сигналом умножителя A10, подаваемым на интегратор через резистор R18. Выбор $R20=2 \cdot R18$ обеспечивает нужное соотношение членов в первом и втором уравнениях. Коэффициент связи ε_1 находится в обратной пропорциональности с величинами R18 и R20.

3. Моделирование динамики устройства в среде Multisim

Удобным современным средством схемотехнического моделирования является программный продукт Multisim компании National Instruments [26,27]. Работая с программой NI Multisim, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему в обычном виде, следуя стандартным обозначениям, принятым в радиотехнике и электронике. Радиодетали берутся из имеющейся в распоряжении библиотеки электронных компонентов. Предусмотрено использование обширного набора виртуальных приборов, позволяющих выполнять измерения или отслеживать изменение различных электрических величин, в том числе генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра. Обращение с ними приближено к работе с реальными приборами в лаборатории: подключив виртуальный прибор к соответствующей точке схемы, можно получить информацию о характеристиках процессов, протекающих при ее функционировании.

На рис. 5 приведены осциллограммы напряжений x , u , y , v , полученные при моделировании динамики в среде Multisim с использованием виртуального многоканального осциллографа, четыре входа которого подключены к соответствующим узлам схемы рис. 4. Как показывает сравнение с рис. 1, вид зависимостей качественно такой же, как для уравнений (3). Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рис. 5, составляет примерно 1.25 мс, то есть 5.68 единиц, что согласуется с приведенным в разделе 1 численным результатом.

На рис. 6 приводятся портреты аттрактора, скопированные с экрана виртуального осциллографа. Для получения портрета на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме, показанного на диаграмме (а), вход осциллографа, управляющий горизонтальной разверткой луча, подключался к выходу операционного усилителя U1, а вход, отвечающий за вертикальное отклонение, к выходу операционного усилителя U2. Портрет на диаграмме (б) представлен на плоскости амплитудных переменных подсистем $(x^2 + u^2, y^2 + v^2)$. Для его получения один вход осциллографа подключался к выходу операционного усилителя U5, где напряжение пропорционально $1 - (x^2 + u^2)$, а второй – к выходу специально добавленного сумматора (на схеме не показан), на два входа которого подавались напряжения от умножителей A3 и A4. Портреты аттрактора находятся в прекрасном соответствии с рис. 2.

Чтобы построить портрет аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграмму, которая иллюстрировала бы характерное для аттрактора Смейла–Вильямса преобразование

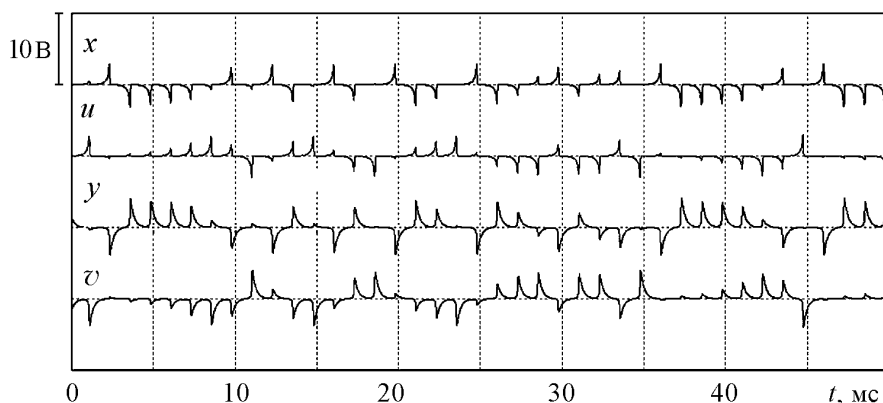


Рис. 5. Зависимости от времени динамических переменных, полученные с помощью четырехканального цифрового осциллографа при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim

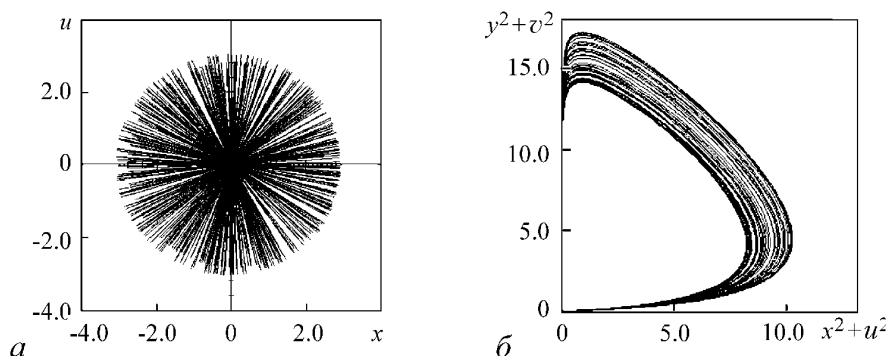


Рис. 6. Портреты аттрактора, полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim, на плоскости переменных первой подсистемы (x, u) (а) и на плоскости квадратичных амплитуд двух подсистем (б)

циклической переменной, приходится обратиться к записи данных моделирования в среде Multisim в файл с последующей их обработкой специально составленной программой. Для этого используем такое же подключение многоканального осциллографа, как при анализе временных зависимостей, и инструмент Grapher, обеспечивающий возможность записи в файл. Выборка делается с шагом по времени 1 мкс, на три порядка меньше характерного периода $\langle T \rangle$. Затем файл обрабатывается программой, которая, считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляет величину $y^2 + v^2$. В момент t_n , когда эта величина, изменяясь в сторону увеличения, проходит уровень $c_0 = 3$, определяются значения x_n, u_n, y_n и v_n . Представляя их в координатах (x, u) , строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре, который показан на рис. 7, а, а с помощью набора значений угловой переменной $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$ получаем график отображения на диаграмме рис. 7, б в координатах (Φ_n, Φ_{n+1}) . Сравнение рис. 7 и 3 показывает, что визуально они практически не отличаются.

На рис. 8 показаны спектры генерируемых системой сигналов, полученные с помощью виртуального анализатора спектра в Multisim, при соответствующих установках рабочего диапазона частот и разрешения анализа. Спектры приведены в ло-

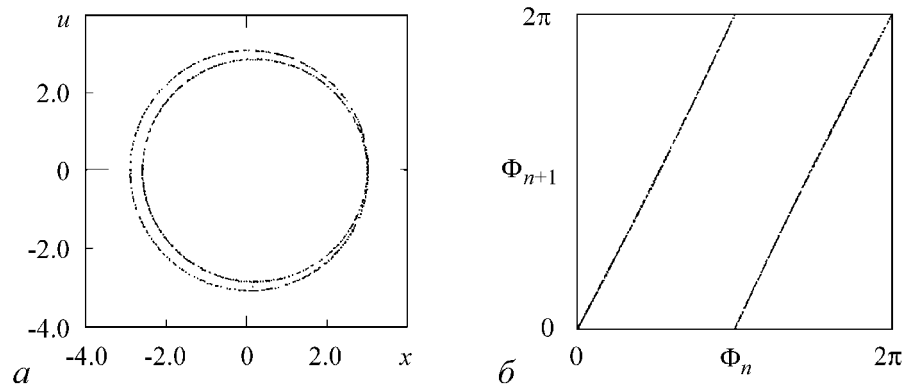


Рис. 7. Построенные обработкой данных моделирования в среде Multisim для схемы рис. 3: а – портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы; б – диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной $\Phi = \arg(y + iv)$ при последовательных проходах секущей Пуанкаре

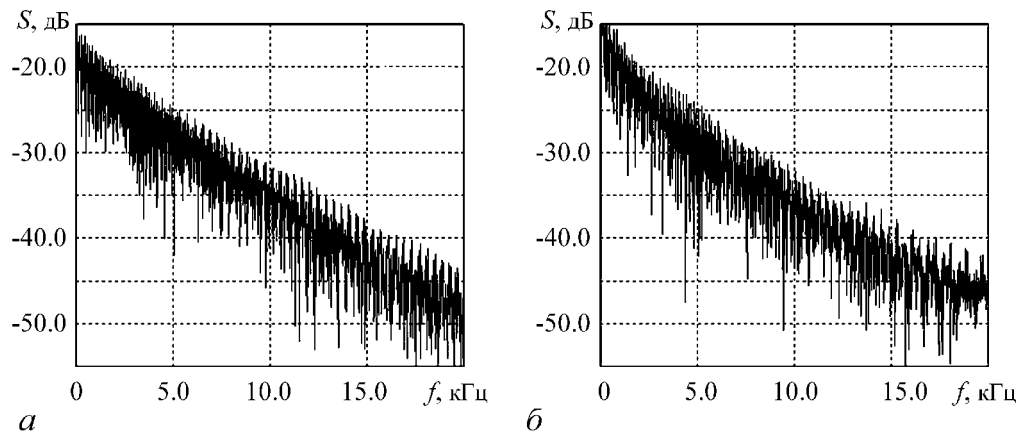


Рис. 8. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (а) и C3 (б), полученные с помощью виртуального анализатора спектра при моделировании схемы рис. 4 в среде Multisim

гарифмическом масштабе. График на рис. 8, *а* соответствует сигналу x (для переменной u спектр выглядит точно так же), а график на рис. 8, *б* – сигналу y (для переменной v спектр выглядит так же). Непрерывный характер спектра свидетельствует о хаотической природе динамики на аттракторе.

4. Лабораторный макет и его экспериментальное исследование

Экспериментальная установка представляла собой макет, изготовленный по схеме, показанной на рис. 4. В качестве операционных усилителей использовались микросхемы типа AD822AN, а в качестве аналоговых умножителей – микросхемы AD633AN. Сбор и анализ данных осуществлялся с помощью четырехканального цифрового осциллографа типа MSO8104A. Осциллограф позволяет записывать в цифровом виде данные с точностью 11 двоичных разрядов при максимальной скорости записи 10^9 выборок в секунду и осуществлять целый ряд вычислений, в том числе и преобразование Фурье.

На рис. 9 показаны временные зависимости напряжений x , u , y , v , полученные для лабораторного макета. Как видно из сравнения с рис. 1 и 5, они качественно хорошо согласуются с зависимостями, построенными по результатам численного решения уравнений (3) и для модели в среде Multisim. Средний период повторения стадий возбуждения и подавления подсистем, как можно оценить из рисунка, составляет примерно 1.25 мс в согласии с результатами предыдущих двух разделов.

На рис. 10 представлен спектр переменной x , который можно сравнить с рис. 8, *а*.

На рис. 11 показаны портреты аттрактора на плоскости переменных, отвечающих первой подсистеме, и на плоскости амплитудных переменных подсистем ($x^2 + u^2$, $y^2 + v^2$). Первый из них (*а*) получен в эксперименте непосредственно на экране осциллографа и демонстрирует несомненное сходство с рис. 2, *а* и *б, а*.

Портрет аттрактора на диаграмме (*б*) построен путем обработки полученного в эксперименте четырехкомпонентного временного ряда с шагом выборки 1 мкс при записи в файл длинной реализации (порядка 10^6 отсчетов) для напряжений x , u , y , v . Вид аттрактора демонстрирует несомненное сходство с рис. 2, *б* и *б, б*, хотя надо

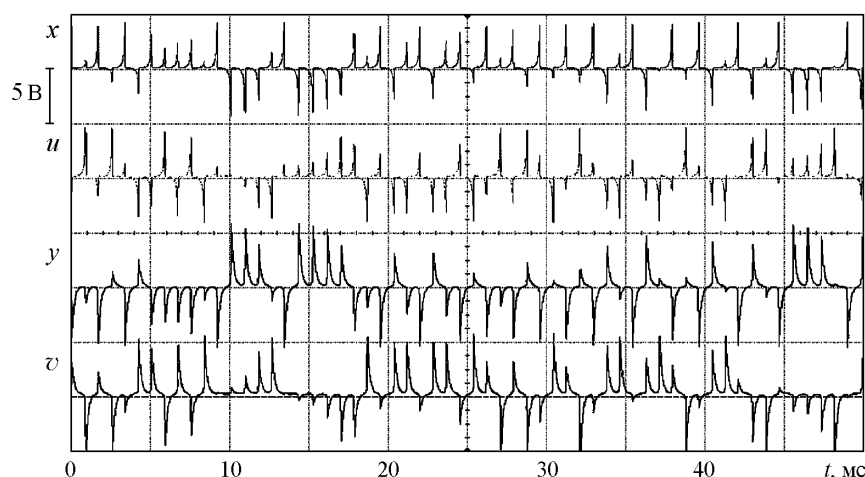


Рис. 9. Зависимости переменных от времени, полученные при помощи цифрового осциллографа MSO8104A

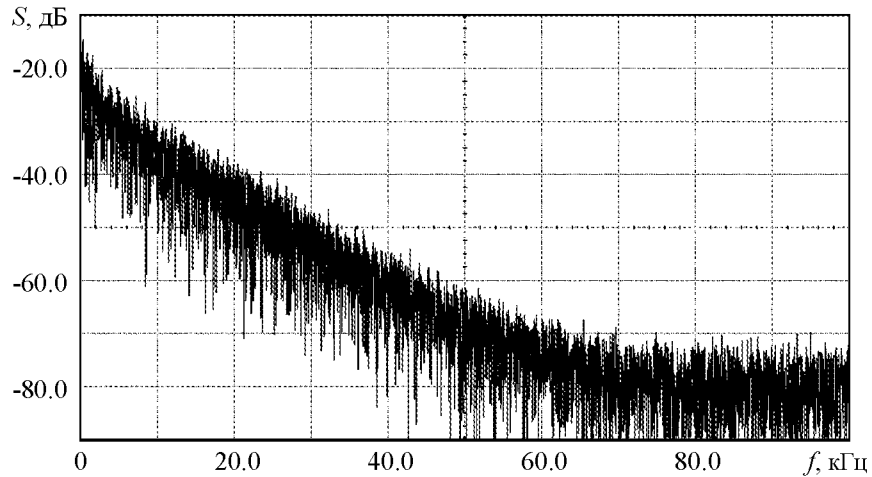


Рис. 10. Спектр переменной x , полученный при помощи цифрового осциллографа MSO8104A. По вертикали – 10 dB/дел, по горизонтали – 10 кГц/дел

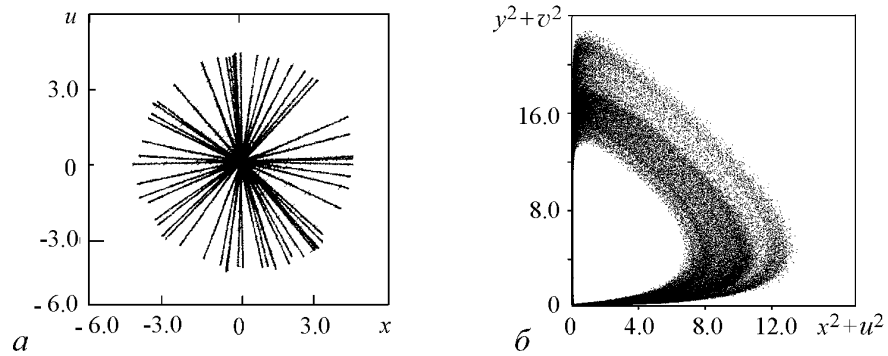


Рис. 11. Фазовый портрет аттрактора на плоскости (x, u) , полученный при помощи цифрового осциллографа MSO8104A (а) и портрет аттрактора в проекции на плоскость амплитудных переменных первой и второй подсистемы (б), построенный обработкой записанных в файл данных для экспериментального макета

отметить довольно существенное зашумление и поперечное уширение аттрактора, обусловленное, очевидно, техническими флуктуациями, возникающими при функционировании реального электронного устройства.

Для построения портрета аттрактора в сечении Пуанкаре и диаграммы, иллюстрирующей преобразование типа отображения Бернулли для циклической переменной, записанный в ходе эксперимента четырехкомпонентный временной ряд подвергается обработке специально составленной программой аналогично тому, как это делалось с данными моделирования в среде Multisim. Считывая шаг за шагом записанные данные, вычисляем величину $r_2 = y^2 + v^2$. В момент t_n , когда эта величина, изменяясь в сторону увеличения, проходит уровень $c_0 = 3$, определяем значения x_n , u_n , y_n и v_n . Учитывая технические флуктуации, которые могут вести к ложному определению момента прохождения секущей Пуанкаре, при обработке исключаются события, происшедшие в пределах 10 шагов по выборке от предыдущего прохода. Также исключаются события, которые отвечают малым амплитудам первой подсистемы $r_1 = x^2 + u^2$ в момент прохода. (Ложные срабатывания этого последнего типа отвечают локальному нарушению монотонной зависимости r_2 от времени на

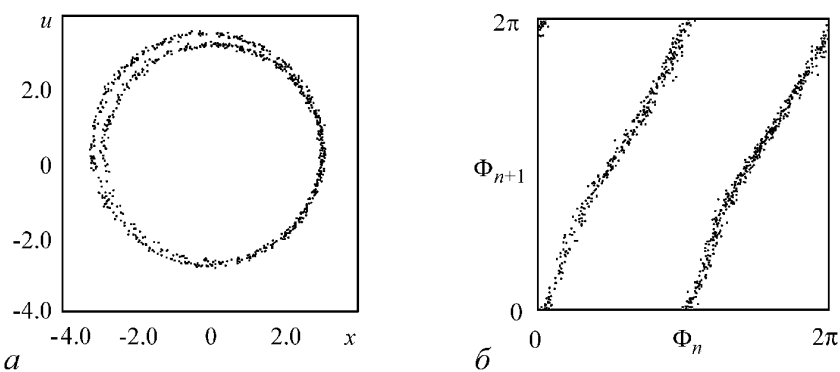


Рис. 12. Построенный путем обработки экспериментальной реализации портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на плоскость переменных первой подсистемы (а) и диаграмма, иллюстрирующая преобразование циклической переменной $\Phi = \arg(y + iv)$ при последовательных проходах секущей Пуанкаре, (б)

нисходящем участке траектории из-за технических флуктуаций.) Представляя в координатах (x, u) данные, отвечающие зарегистрированным моментам пересечения заданного уровня r_2 , с исключением ложных событий, строим портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (рис. 12, а), а с помощью набора значений угловой переменной $\Phi_n = \arg(y(t_n) + iv(t_n))$ в координатах (Φ_n, Φ_{n+1}) получаем график отображения на диаграмме (б). Сравнение полученных диаграмм с рис. 7 и 3 показывает хорошее качественное соответствие, несмотря на довольно сильное поперечное уширение показанного на рис. 11, б аттрактора из-за технических флуктуаций в реальном эксперименте.

Приведенные результаты показывают, что механизм функционирования, ассоциирующийся с присутствием гиперболического хаоса, в реальном устройстве сохраняется, несмотря на довольно большой уровень флуктуаций. Это обстоятельство можно рассматривать как проявление структурной устойчивости наблюдаемого хаотического аттрактора.

Заключение

В статье предложена схема электронного устройства, представляющего собой первый реальный пример автономной электронной системы, демонстрирующей гиперболический хаос. В отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния системы на последовательных стадиях эволюции во времени, хаотическая динамика ассоциируется с аттрактором типа Смейла–Вильямса. Основанием трактовать аттрактор как соленоид Смейла–Вильямса служит то обстоятельство, что удается указать угловую циклическую переменную, которая за время возврата на секущую Пуанкаре претерпевает двукратно растягивающее отображение окружности (отображение Бернулли), тогда как по остальным направлениям в пространстве состояний имеет место сжатие фазового объема. Следует отметить, что рассмотренная схема отвечает системе минимальной размерности, делающей возможным существование аттрактора Смейла–Вильямса.

Одно из возможных применений такого рода устройств состоит в их использовании для генерации случайных чисел, что считается важной прикладной задачей [14,17]. Для систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса бинарная случайная последовательность получается естественным образом как символическая последо-

вательность, кодирующая траекторию на аттракторе. (Ноль или единица отвечает попаданию угловой переменной на каждом периоде в одну или другую половину полного интервала.) Согласно принятой в литературе классификации, математическую модель (3) в этом контексте следовало бы отнести к «генераторам псевдослучайных чисел» (в англоязычной литературе употребляется термин Pseudo-Random Number Generator). Однако, коль скоро реализовано соответствующее физическое устройство, мы должны отнести его к классу «истинных генераторов случайных чисел» (True Random Number Generator), так как в этом случае функционирование протекает в присутствии неизбежных шумов и флуктуаций. Их усиление до макроскопического уровня в силу присущей динамике на гиперболическом хаотическом аттракторе чувствительности к возмущению фазовых траекторий приводит к тому, что в процессе временной эволюции система выбирает траекторию на аттракторе реально случайным образом.

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-02-00342).

Библиографический список

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113.
2. *Аносов Д.В. и др.* Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы – 9 // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. 248 с.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / ред. А.В. Гапонов–Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
6. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
8. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist’s View. Higher Education Press: Beijing and Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2012. 336 p.
9. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
10. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. P. 1281.
11. *Lukin K.A.* Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16, № 12. P. 8.
12. *Baptista M.S.* Cryptography with chaos // Physics Letters A. 1998. Vol. 240. P. 50.
13. *Птицын Н.В.* Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э Баумана, 2002. 80 с.
14. *Stojanovski T., Kocarev L.* Chaos-based random number generators: Part I and II // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. P. 281; P. 382.

15. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1959. 915 с.
 16. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
 17. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.
 18. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
 19. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
 20. *Баранов С.В., Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* Хаос в фазовой динамике осциллятора ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 1. С. 11.
 21. *Kuznetsov S.P.* Plykin type attractor in electronic device simulated in MULTISIM // CHAOS. 2011. Vol. 21. 043105.
 22. *Кузнецов С.П.* Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 98.
 23. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
 24. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. М.: Мир, 1986. Т. 1: 510 с. Т. 2: 592 с.
 25. *Ремпен И.С., Егоров Е.Н., Савин А.Н., Пономаренко В.И.* Операционные усилители. Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. Ч. 1: 19 с. Ч. II: 16 с.
 26. *Макаренко В.В.* Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI MULTISIM. Электронные компоненты и системы (Киев) VD MAIS, 2008, № 1, 50–56; № 2, 51–57; № 3, 44–51; № 4, 44–51, № 6, 46–53; № 7, 54–59; № 8, 46–56; № 9, 65–69; № 12, 47–52.
 27. *Варзарев Ю.Н., Иванцов В.В., Спиридонов Б.Г.* Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. 81с.
- СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН* *Поступила в редакцию* *27.02.2013*

AUTONOMOUS SYSTEM GENERATING HYPERBOLIC CHAOS: CIRCUIT SIMULATION AND EXPERIMENT

S. P. Kuznetsov, V. I. Ponomarenko, E. P. Seleznev

We consider an electronic device, which represents an autonomous dynamical system with hyperbolic attractor of the Smale–Williams type in the Poincaré map. Simulation of chaotic dynamics in the software environment Multisim has been undertaken. The generator of hyperbolic chaos is implemented as a laboratory model; its experimental

investigation is carried out, and good compliance with the observed dynamics in the numerical and circuit simulation has been demonstrated. A distinctive feature of the system is attractiveness for potential applications due to its robustness, or structural stability, i.e. insensitivity of the generated chaos characteristics in respect to noises, technical fluctuations, fabrication imperfections etc.

Keywords: Chaos, attractor, Smale–Williams solenoid, autonomous system, experiment, operational amplifier, Multisim.



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: spkuz@yandex.ru



Пономаренко Владимир Иванович – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1982). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). По совместительству профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Имеет более 100 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: ponomarenkovi@rambler.ru



Селезнев Евгений Петрович – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, в настоящее время зам. директора по научной работе. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 150 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: evgenii_seleznev@mail.ru