



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И АКУСТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ ПРИ УПРУГИХ СОУДАРЕНИЯХ ЗОНДА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*С. Ш. Рехвиашвили, В. В. Нарожнов*

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование нелинейной динамики и акустических сигналов, возникающих при периодических ударах корундового зонда о поверхность твердых тел. Рассмотрены две модели для описания экспериментов: аналитическая модель, основанная на законах сохранения энергии и импульса; модель, основанная на численном решении нелинейного уравнения движения зонда. Показано, что в режиме малого сигнала амплитуда звукового сигнала возрастает прямо пропорционально амплитуде колебаний зонда. Полученные результаты могут лечь в основу новой методики диагностики вязкоупругих свойств металлов и сплавов.

*Ключевые слова:* Нелинейная динамика, теория упругости, зондовые методы, акустические сигналы, численное решение дифференциальных уравнений.

### Введение

В большинстве случаев колебания реальных механических систем описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. В нелинейных консервативных или диссипативных механических системах модули упругости могут зависеть от деформаций, коэффициенты трения могут зависеть от скорости скольжения, массы тел могут зависеть от их скоростей. Помимо этого в нелинейных колебательных системах нарушается свойство изохронности и не выполняется принцип суперпозиции. Эти специфические свойства нелинейных колебательных систем, однако, позволяют широко использовать их на практике. В качестве примеров, ставших уже классическими, можно привести осцилляторы Дуффинга и ван дер Поля [1], которые выступают в качестве математических моделей различных процессов в физике, химии и биологии.

В настоящей работе реализована нелинейная динамическая система – механический осциллятор (зонд на упругой балке), совершающий вынужденные периодические колебания при наличии упругих соударений. Проведено экспериментальное и теоретическое исследование акустических сигналов, возникающих при ударах колеблющегося зонда о поверхность металлических образцов. Рассматриваются линейная

и нелинейная физические модели для интерпретации экспериментов. Проведенные исследования могут лечь в основу неразрушающего метода определения вязкоупругих свойств металлов и сплавов. Несмотря простоту реализации, данный метод отличается от всех известных методов акустических исследований твердых тел [2–5] и зондовых методов атомно-силовой и туннельной микроскопии и спектроскопии [6].

## 1. Эксперимент

В эксперименте применялся специально сконструированный стенд, принцип работы которого заключается в следующем. Переменный сигнал синусоидальной формы с генератора подается на индукционную катушку. Переменное магнитное поле, возникающее в катушке, приводит в колебательное движение упругий элемент (далее просто осциллятор), который выполнен в виде тонкой металлической балки с закрепленным на конце корундовым зондом. В процессе колебаний зонд совершает удары по поверхности металлического образца. Амплитуда колебаний осциллятора и, соответственно, сила удара зависят от величины переменного напряжения на катушке. Для измерения интенсивности звуковых сигналов, возникающих при ударах зонда о поверхность образца, использовался пьезоэлектрический датчик вибраций KD-35. Для формирования и измерения сигналов применялись генератор ГЗ-118 и двухканальный компьютерный осциллограф TES на звуковой плате. Прямой сигнал с генератора на один из каналов звуковой платы подавался через делитель напряжения.

В качестве образцов использовались металлические пластины Al, Cu, Ta, Ti и Zr. Модуль упругости корунда, из которого изготовлен зонд, составляет 382 ГПа [7], что намного превышает модули упругости исследованных образцов. В связи с этим, деформация зонда в экспериментах была практически исключена. Радиус кривизны кончика зонда составлял приблизительно 100 мкм. Расстояние между зондом и пьезоэлектрическим датчиком составляло 0.5 см. Частота возбуждающего сигнала 25 Гц.

Было обнаружено, что амплитуда звукового сигнала при заданной амплитуде колебаний зависит от выбранного расстояния зонд–образец. Это расстояние устанавливалось следующим образом. Колеблющийся с некоторой малой амплитудой зонд с помощью подвижного кронштейна подводился к образцу при одновременном измерении акустического сигнала. Положение кронштейна фиксировалось, когда амплитуда акустического сигнала при соударениях зонда с образцом достигала максимального значения.

На рис. 1, *a*, *б* показаны осциллограммы сигналов: 1 – сигналы, подаваемые на катушку; 2 – звуковые сигналы. При максимумах и минимумах задающего сигнала 1 происходят смещения осциллятора. В промежутках между ними осциллятор совершает затухающие колебания. При этом зонд наносит удары по образцу с частотой, близкой к некоторой собственной частоте. Эксперименты показали, что степень затухания этих колебаний зависит от вязкоупругих свойств образца. Чем больше модуль упругости образца, тем медленнее затухает сигнал. Максимумам и минимумам сигналов 2 соответствуют прямая и возвратная деформации консоли пьезоэлектрического датчика. Из рис. 1, *a*, *б* можно видеть, что акустические сигналы для различных образцов существенно отличаются друг от друга.

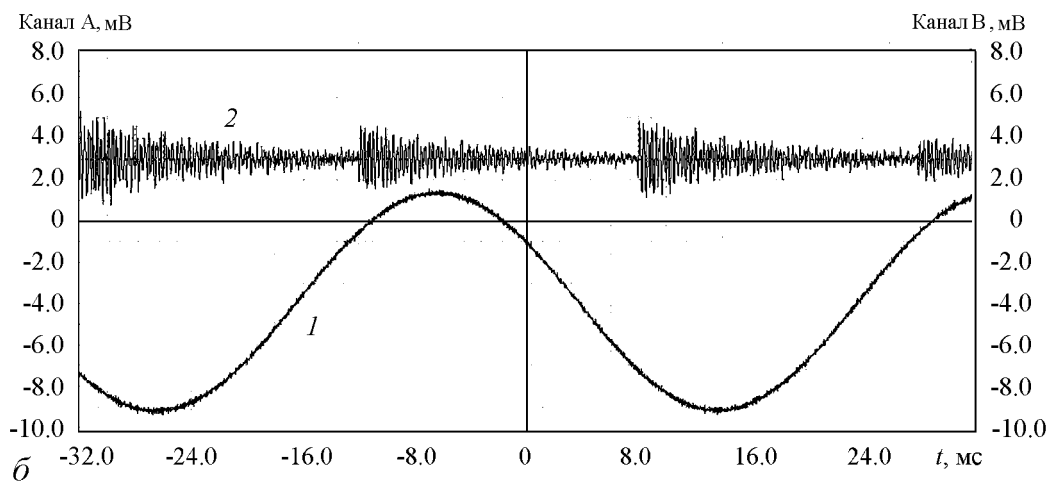
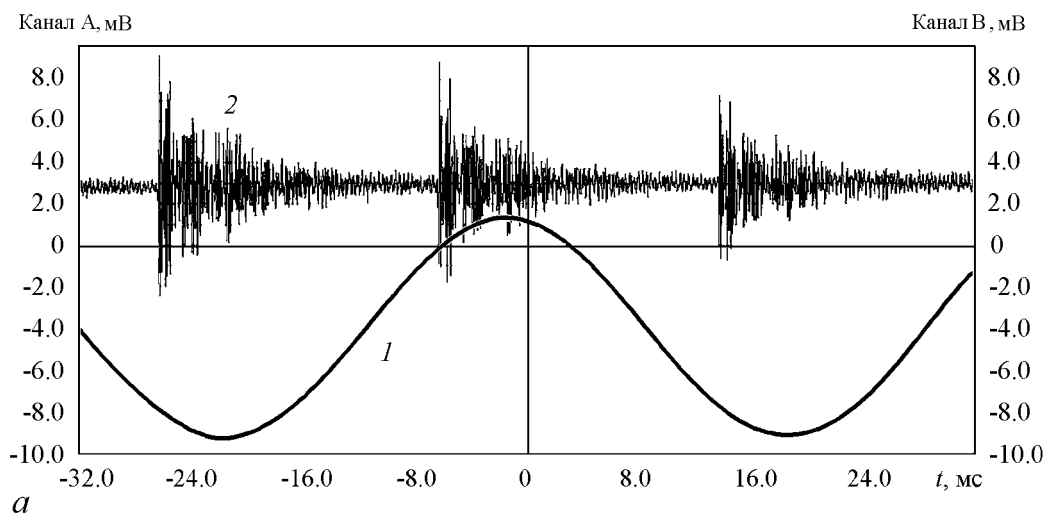


Рис. 1. Примеры осциллограмм сигналов, полученных на различных образцах: а – алюминий; б – медь

Амплитуда колебаний осциллятора регулировалась с помощью генератора.

С помощью осциллографа измерялась максимальная (пиковая) амплитуда акустической эмиссии. Эксперименты показали, что максимальная амплитуда акустических сигналов при малых колебаниях осциллятора прямо пропорциональна силе удара зонда о поверхность образца. На рис. 2 представлены зависимости максимальной амплитуды акустических сигналов от амплитуды возбуждающего сигнала для всех исследованных металлов. Для каждого образца проводилась серия из пяти измерений. Средняя абсолютная погрешность составляет 5% при доверительной вероятности 0.9. Прямые были построены методом наименьших квадратов. Коэффициент корреляции для всех зависимостей близок к единице. Таким

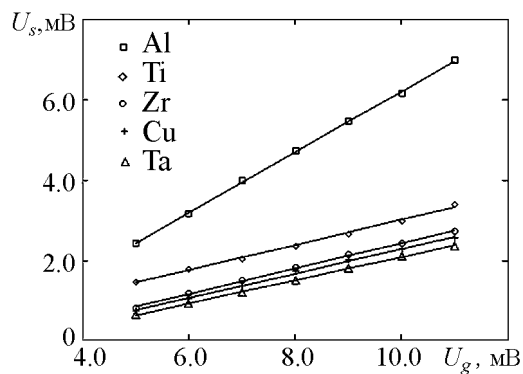


Рис. 2. Зависимость амплитуды акустических сигналов от амплитуды колебаний зонда

образом, можно сделать вывод, что измерения амплитуды акустических сигналов чувствительны к упругим свойствам металлов и позволяют их надежно идентифицировать.

## 2. Модель соударений зонда с поверхностью твердого тела

При ударе зонда о поверхность образца возбуждаются как поперечные, так и продольные упругие волны. В нашем случае датчик устанавливается на поверхности образца, поэтому в процессе эксперимента регистрируются поверхностные акустические волны с вертикальной поляризацией. Эти волны, очевидно, отличаются от идеальных плоских волн. Однако, как известно из геометрической акустики, волну, не являющуюся плоской, в небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую. Для этого необходимо, чтобы направление и амплитуда волны не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны. Если среда является линейной и непоглощающей, то амплитуда регистрируемых колебаний должна однозначно определяться силой удара твердого зонда о поверхность образца.

Для наглядной интерпретации эксперимента в качестве простой модели системы «зонд – датчик – образец» мы воспользуемся моделью двух сталкивающихся шаров с невесомой пружиной между ними. Масса одного шара (датчика) значительно превышает массу другого шара (зонда). Считается, что пружина, моделирующая силу упругости образца, жестко скреплена с массивным шаром (датчиком). Уравнения, определяющие движение зонда и консоли датчика, записываются на основе законов сохранения импульса и энергии

$$m_1 v_0 = m_2 u - m_1 v, \quad (1)$$

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_2 u^2}{2} + \frac{m_1 v^2}{2} + W, \quad (2)$$

где  $m_{1,2}$  – эффективные массы зонда и образца с пьезоэлектрическим датчиком,  $v_0$  – начальная скорость зонда,  $v$  – скорость отскока зонда после соударения с образцом,  $u$  – скорость отклонения консоли пьезоэлектрического датчика,  $W$  – энергия, затрачиваемая на деформацию поверхности образца. Совместное решение уравнений (1), (2) дает

$$m_1 v = \mu v_0 \left( -\frac{m_1}{m_2} \pm \sqrt{1 - \frac{2W}{\mu v_0^2}} \right), \quad (3)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где  $\mu$  – приведенная масса. Правая часть уравнения (3) должна быть положительной, поэтому в скобках выбирается знак плюс.

При ударе твердого зонда происходит локальная деформация поверхности образца, которая приводит к образованию упругой волны. Если затуханием этой упругой волны можно пренебречь, то деформация образца практически без изменений

будет передаваться в консоль датчика. Справедливо принять

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad W = \frac{kx^2}{2}, \quad (4)$$

где  $x$  – деформация поверхности,  $k$  – контактная жесткость. Из (3) и (4) с учетом условия  $m_2 \gg m_1$  получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \sqrt{1 - (x/x_0)^2}, \quad (5)$$

$$x_0 = v_0 \sqrt{\frac{m_1}{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad (6)$$

где  $x_0$  – максимальная деформация поверхности при ударе зонда,  $E$  – модуль упругости образца. Разделяя переменные в уравнении (5) и выполняя интегрирование, определяем время, в течение которого происходит удар (то есть  $x$  меняется от 0 до  $x_0$  и обратно)

$$\tau = \frac{2}{v_0} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/x_0)^2}} = \frac{\pi x_0}{v_0}. \quad (7)$$

Физический смысл формул (6) и (7) очевиден: деформация поверхности образца при ударе возрастает с увеличением начальной скорости зонда и уменьшается с увеличением модуля упругости материала; время удара пропорционально деформации поверхности. Отметим, что более точное выражение для деформации поверхности при ударе зонда можно выписать в рамках контактной теории Герца [8, с. 50]

$$x_0 = v_0^{4/5} \left[ \frac{15m_1(1 - \sigma^2)}{16E\sqrt{R}} \right]^{2/5} \propto \frac{1}{E^{2/5}}, \quad (8)$$

где  $R$  – радиус кривизны кончика зонда,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона для материала образца.

Если для интерпретации эксперимента принять изложенную выше линейную модель, то с учетом формулы (6) для максимальной амплитуды выходного напряжения получается следующая формула:

$$U_s = \frac{A}{\sqrt{E}} U_g, \quad (9)$$

где  $A$  – калибровочный коэффициент, зависящий от конструктивных особенностей измерительного стенда,  $U_g$  – амплитуда напряжения возбуждающего сигнала. Все образцы исследовались в одинаковых экспериментальных условиях, поэтому коэффициент  $A$  должен оставаться постоянным в пределах ошибки эксперимента. Модуль упругости материала зависит как от состава, так и от условий механической обработки, поэтому на практике имеют место большие разбросы. По результатам измерений для всех металлов с учетом табличных значений их модулей упругости и разбросов, приведенных в справочнике [7], найденное оптимальное значение калибровочного коэффициента составило  $1.2 \cdot 10^5 \text{ Па}^{1/2}$ . Поскольку качество использованных образцов (оксиды на поверхности, примеси, дефекты, и т.п.) в работе специально не

контролировалось, то достигнутую в экспериментах точность можно считать удовлетворительной. Таким образом, мы приходим к важному выводу, что угол наклона прямых на рис. 2 определяется модулем упругости образцов. После того, как найдено численное значение коэффициента  $A$ , с помощью стенда можно определять модуль упругости металлов и сплавов. По затуханию акустических сигналов можно судить о вязкостных свойствах исследуемых материалов.

### 3. Численное решение уравнения динамики

В данном разделе в целях более детальной интерпретации проведенных экспериментов рассмотрим нелинейную динамическую модель. На основе теории механических колебаний и контактной теории Герца [8, 9] для нашего случая получается следующее уравнение движения:

$$mx'' + 2\gamma x' + m\omega_0^2 x + \frac{4E\sqrt{R}}{3(1-\sigma^2)}(x-h)^{3/2}\theta(x-h) = F_0 \cos(\omega_g t), \quad (10)$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad (11)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

где  $x = x(t)$  – смещение осциллятора,  $\gamma$  – коэффициент затухания колебаний,  $\omega_0$  – собственная (резонансная) частота колебаний осциллятора,  $m$  – эффективная масса осциллятора,  $F_0$  – амплитуда внешней силы,  $\omega_g$  – частота внешнего возбуждения,  $h$  – высота, на которой находится зонд в начальный момент времени,  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Слагаемое с функцией Хевисайда означает упругую силу, которая действует на зонд во время удара. Эта сила рассчитывается в контактной теории Герца (см. [8, 9]). Сила, связанная с ударом, появляется при определенном уровне внешнего возбуждения, когда зонд в нижней фазе своего движения достигает поверхности образца. Условие, при котором возникает удар, имеет вид  $x(t) > h$ .

Дифференциальное уравнение (10) является нелинейным и его решение в аналитическом виде получить не удастся. Для численного решения это уравнение удобно привести к безразмерному виду

$$u'' + 2a u' + u + b(u-1)^{3/2}\theta(u-1) = c \cos(\Omega \xi), \quad (12)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (13)$$

$$u = \frac{x}{h}, \quad \xi = \omega_0 t,$$

$$a = \frac{\gamma}{m\omega_0}, \quad b = \frac{4E\sqrt{Rh}}{3(1-\sigma^2)m\omega_0^2}, \quad c = \frac{F_0}{m\omega_0^2 h}, \quad \Omega = \frac{\omega_g}{\omega_0},$$

где  $a$  – характеризует затухание колебаний осциллятора,  $b$  – определяется упругими характеристиками образца,  $c$  – задает амплитуду приложенной внешней силы,

$\Omega$  – определяет частоту внешнего возбуждения. Решение уравнения (12) с учетом начальных условий (13) находилось численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка с фиксированным шагом с помощью программы MathCad 14. На рис. 3 приведены примеры решений при различных численных значениях коэффициента  $b$ . Из графиков видно, что решениями являются осциллирующие функции. На общие колебания, задаваемые внешней силой, накладываются затухающие колебания с большей частотой, которые соответствуют соударениям зонда с поверхностью образца. Частота этих колебаний возрастает, а амплитуда убывает с увеличением параметра  $b$ . Именно эти колебания ответственны за формирование акустических сигналов, которые представлены на рис. 1 (сигналы 2). Численное моделирование показывает, что установившейся динамической картине предшествует начальный участок, на котором происходят квазипериодические колебания осциллятора с большей амплитудой. Характер этого переходного процесса определяется параметрами  $b$  и  $c$ . При увеличении значений этих параметров переходный процесс постепенно перестает быть заметным. Экспериментально данное явление обнаруживается при подводе колеблющегося зонда к поверхности образца: зонд вначале совершает несколько нерегулярных скачков, после чего происходит стабилизация колебаний и выравнивание акустического сигнала. Численное моделирование, кроме того, позволило выявить резонансный характер зависимости амплитуды осцилляций от частоты внешнего возбуждения при  $\Omega < 1$ . При увеличении коэффициента  $c$ , а значит и амплитуды внешней силы, происходит сдвиг максимума амплитудно-частотной характеристики в сторону меньших частот  $\Omega$ , что качественно подтверждается экспериментами на измерительном стенде.

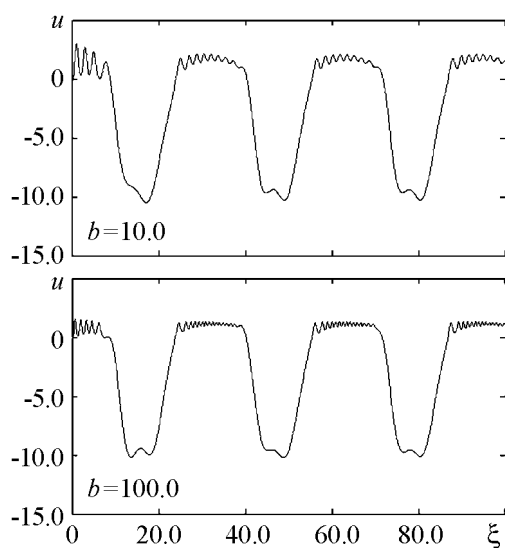


Рис. 3. Графики численного решения задачи Коши (12), (13) при  $a = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\Omega = 0.2$

### Заключение

Представляет интерес исследование акустических сигналов, возникающих при ударах зонда о поверхность образца на субмикронном уровне. Для этих целей целесообразно использовать атомно-силовой микроскоп (режим работы tapping mode [6]) со специальной системой детектирования. Необходимыми условиями для осуществления измерений в данном случае являются надежная виброизоляция и акустическая развязка между пьезоприводом кантилевера и регистрирующим элементом. Перспективным здесь представляется применение оптоволоконного интерферометра или дополнительного кантилевера для измерений колебаний поверхности твердого тела. Насколько известно авторам, подобные измерения до сих пор не проводились.

Выделим основные результаты статьи: 1) реализована методика измерения нелинейной динамики и акустических сигналов, возникающих при ударах зонда о поверхность металлов; 2) теоретический анализ показал, что амплитуда и характерная частота акустических сигналов определяется модулем упругости образца; 3) рассмотренная методика может использоваться для исследования вязкоупругих свойств металлов и сплавов.

#### Библиографический список

1. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. 312 с.
2. Красильников В.А. Звуковые и ультразвуковые волны в воздухе, воде и твердых телах. М.: Физматгиз, 1960. 560 с.
3. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 308 с.
4. Грешиников В.А., Дработ Ю.Б. Акустическая эмиссия. Применение для испытаний материалов и изделий. М.: Стандартиздат, 1976. 272 с.
5. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 286 с.
6. Scanning probe microscopy: electrical and electromechanical phenomena at the nanoscale / Eds S. Kalinin, A. Gruverman. New York: Springer, 2007. 980 p.
7. Физические величины: Справочник / Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др.; Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

*НИИ прикладной математики  
и автоматизации КБНЦ РАН*

*Поступила в редакцию 6.11.2013*

#### **NONLINEAR DYNAMICS AND ACOUSTIC SIGNALS GENERATED BY PERIODIC IMPACTS OF CORUNDUM PROBE ON THE SOLID SURFACE**

*S. Sh. Rekhviashvili, V. V. Narozhnov*

Experimental and theoretical study of nonlinear dynamics and acoustic signals generated by periodic impacts of corundum probe on the solid surface are conducted. In the work two models are considered for the description of experiments: the analytical model based on the laws of conservation of energy and momentum; the model based on the numerical solution of the nonlinear equation of probe motion. It is shown that the acoustic signal amplitude increases in direct proportion to the oscillations probe amplitude. These results can be the basis of a new diagnostic techniques viscoelastic properties of metals and alloys.

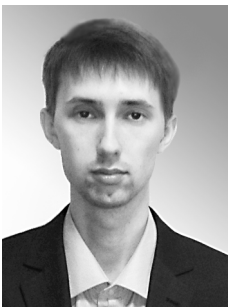
*Keywords:* Nonlinear dynamics, elasticity theory, probe methods, the acoustic signals, numerical solution of differential equations.





*Рехвиаивили Серго Шотович* – родился в 1972 году в Нальчике, окончил Кабардино-Балкарский государственный университет (1995). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1999) и доктора физико-математических наук (2009) в области моделирования физических процессов в зондовой нанотехнологии. Опубликовал свыше 120 научных работ. В настоящее время работает заведующим отделом Теоретической и математической физики в НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. Является членом редакционных коллегий журналов «Нелинейный мир» (Россия, Москва), World Journal of Condensed Mater Physics (USA, Irvine), American Journal of Condensed Mater Physics (USA, Rosemead), American Journal of Physical Chemistry (USA, New York), International Journal of Physical Research (Germany, Bremen).

360000 КБР, Нальчик, ул. Шортанова, 89А  
НИИ прикладной математики и автоматизации  
Кабардино-Балкарского научного центра РАН  
E-mail: rsergo@mail.ru



*Нарожнов Виктор Валерьевич* – родился в 1988 году в Нальчике, окончил Кабардино-Балкарский государственный университет (2011). В настоящее время работает младшим научным сотрудником отдела Теоретической и математической физики в НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. Опубликовал 5 научных работ. Научные интересы – математическое моделирование физических процессов, методы исследования физических свойств твердых тел, автоматизация измерений.

360000 КБР, Нальчик, ул. Шортанова, 89А  
НИИ прикладной математики и автоматизации  
Кабардино-Балкарского научного центра РАН  
E-mail: narojnov.victor@gmail.com