УДК 517.98.537

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА

В. М. Аникин, С. С. Аркадакский, С. Н. Купцов, А. С. Ремизов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: anikinvm@info.sgu.ru

В работе выявляется структура полиномиальных собственных функций и функций ядра оператора Перрона–Фробениуса, соотнесенного с одномерными хаотическими отображениями, итеративная функция которых обладает следующими свойствами: кусочно-линейный характер; полные ветви, каждая из которых переводит область своего задания на полный интервал определения отображения; произвольный наклон ветви (области задания ветви), отсутствие щелей между ветвями.

Знание решения спектральной задачи позволяет аналитически определить скорость установления инвариантного распределения в системе, скорость расцепления корреляций в динамической системе, обладающей хаотическими свойствами, строить разложения функций, аналогичные разложению Эйлера–Маклорена.

В качестве метода решения спектральной задачи используется комбинированный подход, основанный на методе производящей функции для собственных функций оператора и методе неопределенных коэффициентов.

Впервые получено общее аналитическое решение спектральной задачи для случая произвольных наклона кусочно-линейных ветвей отображения и их сочетания.

Найдено решение задачи на полиномиальные собственные функции и собственные значения оператора Перрона–Фробениуса для произвольных кусочно-линейных отображений с полными ветвями без «щелей» – конечных областей нулевого значения итеративной функции. Определен также общий вид функций, составляющих ядро оператора. Результаты верифицируются на примере сдвигов Бернулли.

Факторизация производящей функции для собственных функций оператора позволяет найти универсальный набор рекуррентно вычисляемых коэффициентов, на основе которых и конструируются собственные полиномиальные функции. Полученные решения включают как частные случаи решения подобной задачи для отображений, представляющих композицию полных линейных ветвей, но характеризуемых одинаковым модулем производной и произвольным чередованием знака производной (сдвиги Бернулли, разнообразные пилообразные отображения).

Ключевые слова: Кусочно-линейные хаотические отображения, оператор Перрона–Фробениуса, полиномиальные собственные функции оператора, ядро оператора.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-6-16

Ссылка на статью: Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов С.А. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона–Фробениуса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2016. Т. 24, № 4. С. 6–16.

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*

Введение

Эволюционные свойства хаотических отображений вида

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $g(x_n)$ нелинейная (кусочно-линейная) итеративная функция, можно изучать дуальным образом – посредством траекторного и вероятностного анализа. Траекторное описание имеет определенный смысл лишь при наличии точного (представленного функционально через стартовое значение и число итераций) выражения для итераций отображения. Это открывает перспективы для альтернативного аналитического решения задач, в которых требуется найти опять же статистические характеристики отображения с учетом вероятностного распределения стартового значения x_0 [1,2]. Поскольку траектории отображений характеризуются чувствительной зависимостью от стартового значения, то траекторное описание с неизбежностью в конечном итоге сменяется вероятностным, и тогда интересуются не конкретным значением динамической переменной, а вероятностью принадлежности этого значения некоторой подобласти определения отображения. Главная роль при вероятностном описании эволюционного процесса принадлежит линейному оператору Перрона–Фробениуса (ОПФ) [1–3], задающему правило преобразования вероятностных плотностей при итерациях отображения, когда стартовое значение априори рассматривается как случайное число. Асимптотическое значение вероятностного распределения динамической переменной называют инвариантным распределением рассматриваемого отображения. В иных терминах – это «неподвижная точка» ОПФ, собственная функция оператора с собственным числом, равным единице. Другим собственным функциям ОПФ отвечают значения, меньшие единицы.

Собственным функциям и собственным числам оператора Перрона–Фробениуса приписывают фундаментальное [4,5] и прикладное [1,6] значение. Скажем, второе собственное число ОПФ для отображения Гаусса [1,6] Д. Кнут возводит в ранг фундаментальной константы [5, с. 411]. Именно собственные числа ОПФ определяют скорость установления инвариантного распределения и скорость расцепления корреляций в хаотической системе. Собственные функции оператора входят в аналитические выражения для автокорреляционных функций орбит (траекторий) хаотических отображений, а также могут быть использованы в качестве базисных составляющих при разложении функций в ряды [7]. Знание решения спектральной задачи для некоторых базовых отображений позволяет легко находить решение спектральной задачи для топологически сопряженных отображений [8]. Такие отображения могут быть определены на произвольных (в том числе бесконечных) интервалах и обладать, естественно, инвариантной мерой, отличной от равномерного распределения. Решение спектральной задачи для неодномерных отображений с независимым изменением координатных составляющих (отображений Courno) очевидным образом находится посредством соответствующего комбинирования решений задач на нахождение собственных функций и чисел ОПФ для отдельных составляющих «многомерного» отображения.

В этой связи представляет несомненный интерес нахождение явного вида собственных функций и собственных чисел ОПФ. Приоритет в постановке спектральных задач для одномерных хаотических отображений принадлежит участникам евро-

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*

пейско-американской научной группы И.Р. Пригожина [9]. Решением этой проблемы в Саратовском университете занимается научных коллектив, у истоков которого стоял А.Ф. Голубенцев [1,10]. Для достижения цели использовались методы производящей функции, инвариантных функциональных подпространств и неопределенных коэффициентов. В качестве объектов выступали кусочно-линейные отображения (конечных областей с нулевым значением итеративной функции), обладающие одинаковым модулем тангенса наклона линейных ветвей, переводящих свой отрезок определения на полный (как правило, единичный) интервал [1–3, 11–16].

Настоящая работа направлена на дальнейшее обобщение результатов по решению спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса для кусочно-линейных отображений с полными ветвями, но определенными на промежутках различной длины (то есть с различными по модулю значениями тангенса угла наклона). Ниже рассматривается комбинированный метод производящих функций и неопределенных коэффициентов решения этой задачи для нахождения полиномиальных собственных функций оператора.

1. Определение ядра и собственных функций оператора Перрона–Фробениуса

Рассмотрим на единичном промежутке $(0;1)$ отображение (1) с кусочно-монотонной итеративной функцией вида

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\chi_{(a_{k-1},a_k]}(x), \quad g(0) = 0, \tag{2}$$

где $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ – точки разбиения единичного промежутка; $g_k(x)$ – строго монотонная и дифференцируемая функция на подынтервале $(a_{k-1}, a_k]$, отображающая $(a_{k-1}, a_k]$ на единичный полуинтервал $(0;1]$; $\chi_{(a_{k-1},a_k]}$ – характеристическая функция подынтервала $(a_{k-1}, a_k]$.

С отображением (2) ассоциируется оператор Перрона–Фробениуса

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\phi_k(x))\,|\phi_k'(x)|, \tag{3}$$

где функция $f(x)$ имеет смысл вероятностной плотности, а через $\phi_k = g_k^{-1}$ обозначена обратная функция для монотонной ветви отображения $g_k(x)$. Функции ϕ_k можно доопределить в нуле по непрерывности.

Ядро (нуль-пространство) оператора P определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} f(\phi_k(x))\,|\phi_k'(x)| = 0, \tag{4}$$

которое можно переписать следующим образом:

$$f(\phi_n(x))\,|\phi_n'(x)| - \sum_{k=1}^{n-1} f(\phi_k(x))\,|\phi_k'(x)| = 0. \tag{5}$$

После замены $t = \phi_n(x),\ \ x = g_n(t)$ уравнение (5) можно записать в виде

$$f(t) = \left|g_n'(t)\right| \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\phi_k(g_n(t))\right)|\phi_k'(g_n(t))| \qquad (6)$$

для $t \in (a_{n-1}, a_n]$. Определив функцию f произвольным образом на $[a_0, a_{n-1}]$ и с помощью равенства (6) на $(a_{n-1}, a_n]$, получим, что f принадлежит ядру оператора P, определяемого соотношением (3).

Рассмотрим в качестве примера частный случай: $n = 2$, итерационная функция симметрична относительно середины отрезка

$$f_2(x) = f_1(1 - x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \quad \phi_2(x) = 1 - \phi_1(x).$$

В этом случае соотношение (6) даёт для произвольного элемента нуль-пространства:

$$F_2(x) = -F_1(1 - x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

то есть если итерационная функция симметрична относительно середины единичного отрезка, то нуль-пространство состоит из функций, антисимметричных относительно середины отрезка.

Рассмотрим теперь в качестве плотность равномерного распределения. Тогда (3) примет вид

$$P\chi_{[1,0]}(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{[1,0]}\left(\phi_k(x)\right)|\phi_k'(x)| = \sum_{k=1}^{n} |\phi_k'(x)| \cdot \chi_{[1,0]}(x). \qquad (7)$$

Из равенства (7) следует, что функция $\chi_{[1,0]}(x)$ является неподвижной точкой оператора Перрона–Фробениуса P (инвариантной плотностью отображения (2)) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k'(x)| = 1. \qquad (8)$$

В [17] приведены примеры построения на основе (8) кусочно-нелинейных отображений с равномерным инвариантным распределением.

2. Спектральная задача для кусочно-линейных отображений с полными ветвями и произвольным наклоном ветвей

Рассмотрим оператор Фробениуса–Перрона в случае, когда функции g_k и ϕ_k линейные, и

$$\phi_k(x) = (-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k, \qquad (9)$$

где величина σ_k характеризует направление наклона линейной ветви отображения (9) и определяется как

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \phi_k'(x) > 0, \\ 1, & \phi_k'(x) < 0, \end{cases}$$

$\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$ – угловой коэффициент k-й ветви отображения и одновременно длина k-го отрезка разбиения; значение параметра r_k уравнения (6) выражается через границы подынтервала $(a_{k-1}, a_k]$ как $r_k = \sigma_k a_k + (1-\sigma_k)a_{k-1}$.

В соответствии с (9) имеем $|\phi'_k(x) = \Delta a_k$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi'_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} |\Delta a'_k(x)| = 1,$$

поэтому рассматриваемое отображение имеет равномерное инвариантное распределение и является базовым.

Оператор Фробениуса–Перрона для отображения с линейными ветвями будет иметь вид

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k \left((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k\right). \qquad (10)$$

Будем решать задачу нахождения собственных значений и собственных функций оператора (10):

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k f\left((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k\right) = \lambda f(x). \qquad (11)$$

Поскольку уравнение (11), определяющее собственные функции оператора, содержит только линейное преобразование независимой переменной, собственные функции оператора являются полиномами, и задача сводится к определению собственных чисел и коэффициентов соответствующих полиномов. Эта задача может быть решена стандартным способом: будем считать, что

$$f(x) = f_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{B_j}{j!} x^j, \quad B_m = 1. \qquad (12)$$

Тогда вместо (11) имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k f_m\left((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k\right) = \lambda_m f_m(x). \qquad (13)$$

Приравнивая коэффициенты при x^m в левой и правой частях равенства, получаем соотношение, определяющее собственные числа оператора:

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\sigma_k m} (\Delta a_k)^{m+1}. \qquad (14)$$

Остальные m равенств дают линейную систему уравнений относительно коэффициентов полиномов B_j, решением которой и исчерпывается поставленная задача, однако выкладки при этом являются достаточно громоздкими. Выкладки можно существенно упростить и получить выражение для B_j в явном виде, если воспользоваться следующим подходом. Продифференцируем (13) l раз, тогда получим

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} f_m^{(l)}\left((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k\right) = \lambda f_m^{(l)}(x). \qquad (15)$$

Полагая в (15) $x = 0$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\sigma_k l}(\Delta a_k)^{l+1} f_m^{(l)}(r_k) = \lambda_m f_m^{(l)}(0). \tag{16}$$

В силу соотношения (12), имеем

$$f_m^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{B_{l+j}}{j!} x^j. \tag{17}$$

Объединяя (16) и (17), получаем выражения для коэффициентов полинома:

$$\begin{aligned} &B_m = 1, \\ &B_l = \frac{1}{\lambda_m - \lambda_l} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{l+j}}{j!} r_k^j \right), \quad l = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Введем обозначения

$$u_{lj} = \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\sigma_k l}(\Delta a_k)^{l+1} r_k^j. \tag{19}$$

Тогда окончательно (18) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &B_m = 1, \\ &B_l = \frac{1}{u_{m0} - u_{l0}} \sum_{j=1}^{m-1} u_{lj} B_{l+j}, \quad l = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, спектральная задача для оператора Перрона–Фробениуса (7) имеет такое решение: собственные функции есть полиномы (12) с коэффициентами, определяемыми соотношениями (18), а соответствующие собственные числа есть

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\sigma_k m}(\Delta a_k)^{m+1} = u_{m0}. \tag{21}$$

3. Верификация полученных результатов

Рассмотрим в качестве примера хорошо изученный двоичный сдвиг Бернулли – отображение с равномерным разбиением единичного отрезка и положительным тангенсом угла наклона двух линейных ветвей итерационной функции. В этом случае

$$n = 2; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \frac{1}{2}; \quad r_1 = 0; \quad r_2 = \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Подстановка (22) в (14) даёт известное соотношение для собственных чисел:

$$\lambda_m = \frac{1}{2^m}. \tag{23}$$

Соотношение (18) в рассматриваемом частном случае преобразуется к виду:

$$B_l = \frac{2^{m-l}}{1-2^{m-1}} \sum j = 1^{m-l} \frac{B_{l+j}}{j!2^{j+1}}.$$

Отсюда легко получаются значения для B_{m-1}:

$$B_{m-1} = \frac{1}{2} B_m. \tag{24}$$

Известно, что собственными функциями оператора Перрона–Фробениуса для двоичного сдвига Бернулли являются полиномы Бернулли. Для сравнения полученных выше результатов с известными необходимо учесть, что обычно полиномы Бернулли записывают так:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k, \quad b_m = 1. \tag{25}$$

Сравнивая (12) и (25), убеждаемся, что должно выполняться соотношение:

$$b_l = \frac{m!}{l!} B_l,$$

тогда вместо (24) имеем:

$$b_{m-1} = -\frac{m}{2},$$

что совпадает с известными значениями соответствующих коэффициентов полиномов Бернулли [18].

Заключение

В статье определена структура полиномиальных собственных функций и нуль-пространства оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных отображений без «щелей» (подынтервалов, на которых итеративная функция равна нулю) и с полными ветвями, которые могут обладать различными значениями модуля тангенса наклона. Полученные решения включают как частные случай решения подобной задачи для отображений, представляющих композицию полных линейных ветвей, но характеризуемых *одинаковым* модулем производной и произвольным чередованием знака производной. Сдвиги Бернулли и разнообразные пилообразные отображения, рассмотренные нами ранее, являются частными случаями такого класса отображений.

Возможность использования приема факторизации производящей функции позволяет найти универсальный набор рекуррентно вычисляемых коэффициентов, на основе которых и конструируются собственные полиномиальные функции.

Библиографический список

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса / Предисл. Д.И. Трубецкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 96 с.
3. *Аникин В.М.* Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
4. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования. В 3 т. Т. 2: Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: Вильямс, 2000. 832 с.
6. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 80 с.
7. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* Релаксационные свойства хаотических динамических систем // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1739–1744.
8. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* Классификация хаотических моделей малоразмерной нелинейной динамики // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1790–1792.
9. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадигмы времени. М.: УРСС, 2000. 240 с.
10. *Аникин В.М., Трубецков Д.И.* Вопросы теории детерминированного хаоса в работах А.Ф. Голубенцева (к 80-летию со дня рождения) // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 5. С. 120–123.
11. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса–Перрона // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67–73.
12. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3–17.
13. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16–34.
14. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Особенности решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, обусловленные критическим сочетанием параметров хаотического отображения // Теоретическая физика. 2007. Т. 8. С. 176–183.
15. *Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
16. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С., Купцов С.Н., Василенко Л.П.* Определение инвариантной плотности отображения Реньи на основе гауссова подхода // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 46–56.

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*

17. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* О показателе Ляпунова для хаотических одномерных отображений с равномерным инвариантным распределением // Известия РАН. Сер. физическая. 2008. Т. 72, № 12. С. 1800–1804.
18. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 611.

Поступила в редакцию 01.09.2016

POLYNOMIAL EIGENFUCTIONS OF THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR

V. M. Anikin, S. S. Arkadaksky, S. N. Kuptsov, A. S. Remisov

National Research Saratov State University
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia
E-mail: anikinvm@info.sgu.ru, anikinvm@yandex.ru

In the paper, we reveal the structure of polynomial functions of the eigenfunctions and the kernel of the Perron–Frobenius operator for one-dimensional chaotic maps that iterative functions have the following properties: they are piecewise-linear ones; they have full branches transforming the domain of its definition to the full range of the mapping; the have arbitrary slope of branches; they have not some gaps between the branches.

Knowledge of solution of the spectral problem allows us to find analytically the rate of establishment of the invariant distribution in the, the rate of decay of correlations in a dynamic system, which has chaotic properties, to construct the function decomposition similar to the Euler–Maclaurin decomposition.

For solving the spectral problem, we introduce a combined approach based on the method of generating function for the operator eigenfunctions and the method of undetermined coefficients.

The new results of the paper is a general solution of the spectral problem for piecewise linear maps having arbitrary skew of linear branches of the mapping.

We present the solution for polynomial eigenfunctions and eigenvalues of Perron–Frobenius operator associated to arbitrary piece-wise linear chaotic maps with full branches without «gaps» (finite intervals where iterative function is equal to zero). A general form of the functions of the operator kernel is written.

The factoring generating function for the eigenfunctions allows us to find an universal set of coefficients that are calculated recursively and form polynomial eigenfunctions. These solutions include partial spectral solutions for Bernoulli shifts and other sawtooth maps.

Keywords: Piece-wise linear chaotic maps, the Perron–Frobenius operator, polynomial eigenfunctions, the kernel.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-6-16

Paper reference: Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S. Polynomial eigenfuctions of the Perron–Frobenius operator // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24. Issue 4. P. 6–16.

References

1. *Anikin V.M., Goloubentsev A.F.* Analytical models of deterministic chaos / Preface by D. I. Trubetskov. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 328 p. (in Russian).
2. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remisov A.S.* Non-selfadjoint operators in chaotic dynamics. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2015. 96 p. (in Russian).

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*

3. *Anikin V.M.* Spectral problems for the Perron–Frobenius operator // Izvestiya VUZ. AND. 2009. Vol. 17, Iss. 4. P. 35–48 (in Russian).
4. *Babenko K.I.* Fundamental of numerical analysis. Moscow: Nauka, 1986. 744 p. (in Russian).
5. *Knuth D.E.* The art of computer programming. 3d ed. Vol. 2. Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Longman, Inc., 1998.
6. *Anikin V.M.* The Gauss map: evolution and probability properties. Saratov: Saratov University Press, 2007. 80 p. (in Russian).
7. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Relaxation properties of chaotic dynamical systems: operator approach // Bulletin of the Russian Academy of science: Physics. 2009. Vol. 73, Iss. 12. P. 1632–1637.
8. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Classification of one-dimensional chaotic models // Bulletin of the Russian Academy of science: Physics. 2009. Vol. 73, Iss. 12. P. 1681–1683.
9. *Prigogine I. Stengers I.* Time, Chaos, Quantum: Towards the Resolution of the Paradox of Time. Moscow: URSS, 2000. 240 p. (in Russian).
10. *Anikin V.M., Trubetskov D.I.* Problems of deterministic chaos theory in A. F. Goloubentsev's works // Izvestiya VUZ. AND. 2013. Vol. 21, Iss. 5. P. 120–123 (in Russian).
11. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Arkadasky S.S.* On some properties of the Frobenius–Perron operator for the Bernoulli shifts // Izvestiya VUZ. AND. 2000. Vol. 8, Iss. 2. P. 67–73 (in Russian).
12. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* Invariant subspaces for linear evolution operators of chaotic maps // Izvestiya VUZ. AND. 2005. Vol. 13, Iss. 1–2. P. 3–17 (in Russian).
13. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remisov A.S.* Analytical solution of spectral problem for the Perron–Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps // Izvestiya VUZ. AND. 2006. Vol. 14, Iss. 2. P. 16–34 (in Russian).
14. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remisov A.S.* Features of solving spectral problem for the Perron–Frobenius operator caused by critical combination of chaotic map parameters // Theoretical Physics. 2007. Vol. 8. P. 176–183 (in Russian).
15. *Anikin V.M., Remisov A.S., Arkadaksky S.S.* Eigenfunctions and eigenvalues of the Perron–Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps // Izvestiya VUZ. AND. 2007. Vol. 15, Iss. 2. P. 62–75 (in Russian).
16. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Remisov A.S., Kuptsov S.N., Vasilenko L.P.* Investigation of structure of invariant density for Renyi map by Gauss method // Izvestiya VUZ. AND. 2008. Vol. 16, Iss. 6. P. 46–56 (in Russian).
17. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Lyapunov exponent for chaotic 1D maps with uniform invariant distribution // Bulletin of the Russian Academy of science: Physics. 2008. Vol. 72, Iss. 12. P. 1684–1688.
18. *Abramovits M., Steegan I.* Handbook of Special Functions. Moscow: Nauka, 1979. P. 611 (in Russian).

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*

Аникин Валерий Михайлович родился (1947) в Аткарске (Саратовская область). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертациеведение, история физики. В числе работ: монография «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А.Ф. Голубенцевым; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007), методическое пособие для аспирантов и соискателей учёной степени естественнонаучных специальностей «Диссертация в зеркале автореферата» (совместно с Д.А. Усановым; М.: ИНФРА-М, 2013-2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: anikinvm@yandex.ru; anikinvm@info.sgu.ru

Аркадакский Сергей Сергеевич родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика. Соавтор монографии «Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике» (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: arkadakskyss@mail.ru

Купцов Сергей Николаевич родился в Саратове (1949). Окончил механико-математический факультет СГУ (1971). Старший преподаватель кафедры математической экономики. Область научных интересов – спектральная теория линейных операторов.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: kuptsovsn@info.sgu.ru

Ремизов Александр Сергеевич родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Кандидат физико-математических наук (2007). Доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика. Соавтор монографии «Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике» (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: remisovas@mail.ru

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*