



УДК 517.524

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

## Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике

*В. В. Учайкин*

Ульяновский государственный университет  
Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42  
E-mail: vuchaikin@gmail.com

*Поступила в редакцию 25.06.2018, принята к публикации 20.09.2018*

**Тема и цель обзора.** Два последних десятилетия отмечены широким распространением в теоретическом описании естественных процессов дробно-дифференциального аппарата. Замена целочисленного порядка производной вещественным (а то и комплексным) числом открывает непрерывное поле новых дифференциальных уравнений, в котором стандартный набор уравнений теоретической физики (волновое, диффузионное, и пр.) представлен отдельными колосками в точках с целочисленными координатами. Но что физически значат производные дробных порядков? Каковы общие причины появления дробных производных в уравнениях? Можно ли заранее предсказать появление дробных операторов в той или иной задаче? Вопросы эти пока не сняты с повестки дня и остаются в центре внимания каждой из конференций, посвящённых теории и применению этого аппарата. Эта тема развивается и в настоящей статье. Её целью является демонстрация дробно-дифференциального аппарата в наиболее, если можно так выразиться, классической области теоретической физики – гидродинамике. **Исследуемые модели.** В обзоре рассматриваются гидромеханические задачи, в которых естественным образом возникает потребность в производных дробного порядка: движение тел в вязкой жидкости, гидромеханика турбулентности, турбулентная диффузия. Никаких экзотических структур, фракталов, квантово-механических парадоксов. **Результаты.** В обзоре показано, как дробно-дифференциальное исчисление рождается на классическом поле гидродинамических задач под пером Гейзенберга, Вайцзекера, Колмогорова, Обухова, Монины – теоретиков, которых невозможно заподозрить в не критическом отношении к математическому аппарату. **Обсуждение.** Собственно, весь обзор является непрерывным обсуждением «неизбежности странного мира» дробного исчисления (см. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: «Артишок», 2008), и то, что это обнаруживается уже «в стенах» классической гидромеханики, только усиливает убедительность выводов.

**Ключевые слова:** дробный лапласиан, нелокальность, турбулентная диффузия, проекционные операторы, открытые системы.

**Образец цитирования:** Учайкин В.В. Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 5–40. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

**Финансовая поддержка.** Исследования поддержаны РФФИ (гранты № 16-01-00556, 18-51-53018). Автор благодарен Е.В. Кожемякиной и О.П. Харловой за помощь в подготовке рукописи к опубликованию.

## Fractional models in hydromechanics

V. V. Uchaikin

Ulyanovsk State University  
42, L. Tolstoj-street, 432017 Ulyanovsk, Russia  
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Received 25.06.2018, accepted for publication 20.09.2018

**Topic and purpose.** The last two decades are marked by wide spreading fractional calculus in theoretical description of the natural processes. Replacement of the integer-order operators by their fractional (and even complex) counterparts opens up a continuous field of new differential equations in which the standard set of equations of theoretical physics (wave, diffusion, etc.) is represented by separate spikelets at points with integer coordinates. But what do the fractional-order derivatives mean physically? What are the common reasons for the appearance of fractional derivatives in the equations? Is it possible to predict in advance the appearance of fractional operators in a particular problem? These questions are not yet removed from the agenda and remain the focus of attention of each of the conferences devoted to the theory and application of fractional calculus. This topic is developing in this review. **Models investigated.** The fractional calculus is demonstrated in application to various problem of the most, if one may say so, classical field of theoretical physics-hydrodynamic including turbulent diffusion. **Results.** The review shows how fractional operators appear on the classical field of hydrodynamic problems under the pen of Heisenberg, Weizsacker, Kolmogorov, Obukhov, Monin – theoreticians who can not be suspected of being uncritical of the mathematical tools. **Discussion.** Actually, the whole review is a continuous discussion of the «inevitability of the strange world» of fractional calculus (Uchaikin V.V. The method of fractional. Ulyanovsk: «Artishok», 2008), and the fact that this is done within the framework of classical hydromechanics only strengthens the convincing conclusions.

*Key words:* fractional Laplacian, nonlocality, turbulent diffusion, projection operators, open systems.

*Reference:* Uchaikin V.V. Fractional models in hydromechanics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 5–40. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

*Acknowledgements.* The investigation is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects number 16-01-00556, 18-51-53018). The author thanks E.V. Kozhemyakina and O.P. Kharlova for help at paper preparing to publication.

### Введение

Дробно-дифференциальные уравнения математической физики можно разбить на три класса: уравнения с дробными производными по координатам, с дробными производными по времени и, разумеется, уравнения смешанного типа, содержащие и те и другие операторы. Многие «пользователи» (простите за жаргон!) считают дробные производные по координатам следствием фрактальности (самоподобной неоднородности) среды. Первичную роль здесь сыграли обстоятельства лингвистического рода: созвучие англоязычных слов *fractal* и *fractional*, первое из которых относится к геометрическим структурам, второе – к дифференциальным уравнениям. Дискуссии о правомерности отождествления этих свойств, открытой в 1995 Рутманом [1], посвящён ряд работ разных авторов (см. мои обзоры [2–4], книги [5, 6]). Проблема в том, что все фракталы являются неоднородными структурами, тогда как ядро, входящее в дробно-дифференциальные операторы Рисса, трансляционно инвариантно, что предполагает однородность среды, по крайней мере в малых масштабах. Однако среды, однородные в малых масштабах, и процессы в них хорошо описываются и уравнениями в производных целых порядков с переменными коэффициентами. Иными словами, разбивая простую неоднородную среду на элементарные объёмы, мы переходим к однородным элементам, отклонения свойств реальных элементов от которых имеют меньший порядок малости, и в пределе мы получаем уравнения с производными целого порядка. В случае неоднородной самоподобной среды разбиение на элементы представляет собой просто

размножение исходной среды на ей подобные: в новом масштабе мы видим то же самое. Ничто не упрощается, часть фрактала подобна целому. Но дробные операторы основаны на концепции непрерывности, тогда как фрактальные структуры разрывны на всех масштабах (нельзя перейти к асимптотике, в которой фрактал виделся бы непрерывным). Только усреднением по ансамблю фракталов можно вернуть непрерывность, следовательно, рассматриваемые системы и процессы должны быть случайными (стохастическими). Фрактальность реализаций отражается «длинными» корреляциями степенного типа, в свою очередь порождающими интегральные операторы дробного типа, действующие на пространственные переменные. Учёт конечной скорости распространения возмущений переносит эти свойства на временные операторы: появляются дробные производные по времени. В определённом смысле, такое усреднение по ансамблю можно считать легализацией известных попыток представить дробные интегралы как интегралы по фракталам, но что представляет собой такой ансамбль, и насколько далеки усреднённые характеристики от индивидуальных, остаётся неясным. Не менее смутен вопрос и о смысле дробной производной по времени. Некоторые из авторов рискуют говорить даже о фрактальных свойствах самого времени, хотя каких-либо физических оснований для этого не установлено.

Альтернативная интерпретация дробного интегрирования может быть осуществлена на основе представления об открытой системе (ОС) как части замкнутой системы. Записав уравнение Лиувилля для движения замкнутой системы и воспользовавшись техникой проекционных операторов для выделения из него части, описывающей движение ОС, мы придём к уравнению Линдблада, содержащему интегральный член с запаздыванием. В статистической механике концепция запаздывания была введена ещё Л. Больцманом и сопровождалась далее прилагательными – интегральная (Больцман, [7]), эрдитарная (Вольтерра, [8, 9]), наследственная (Работнов, [10]), эндохронная (Valanis and Lee, [11]). В последнем варианте, развиваемом в теории пластичности, эффект запаздывания связан с интерпретацией самого времени. Понятие «время» используется в механике сплошных сред как «обычное» физическое (лабораторное) время и как некоторое функциональное, характеризующее интенсивность процесса, эндохронное (собственное, внутреннее «время», удобное при описании нетривиальных нелинейных процессов деформирования (ползучести и релаксации) и предельных состояний. В механике динамического разрушения используется понятие «структурного» («инкубационного») времени, предполагающее существование структурного (масштабного) уровня разрушения, зависящего от вида среды и нагружения, и, следовательно, – некоторого характерного времени разрушения на данном уровне. Дополнительное требование самоподобия, рассматриваемого на уровне общего принципа статистической термодинамики, превращает эрдитарность в степенную, а эрдитарные интегралы вольтеррова типа в дробные интегралы, обращение которых и приводит к дифференциальным операторам дробного порядка. Наиболее популярными в приложениях являются производные Римана–Лиувилля

$${}_a D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau$$

и Герасимова–Капуто

$${}_a^\nu D_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{-\nu} f'(\tau) d\tau.$$

В этих формулах  $t > a$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , а переход к высшим дробным порядкам осуществляется дополнительным дифференцированием целого порядка.

## 1. Скрытые переменные

Описывая динамику механической системы как сплошной среды, мы в первом приближении игнорируем наличие внутренней структуры и её участие в рассматриваемом процессе. При этом исходные уравнения динамики записываются для макроскопических характеристик системы, не содержащих информации о её структуре. Однако в ряде случаев (например, в задачах термомеханики или динамики полимерных растворов) внутренняя структура может играть существенную роль и её учёт осуществляется включением в рассмотрение (а точнее, *удержанием* в процессе перехода от микро- к макромасштабам) соответствующего набора переменных, называемых *внутренними переменными*, которые можно также трактовать (по отношению к обычному набору внешних переменных) как *скрытые переменные*. Современные представления об эволюции скрытых переменных в динамических задачах можно найти в обзорных работах [13–15].

Существуют два подхода к учёту внутренних переменных: термодинамический, базирующийся на традиционных понятиях термодинамики (термодинамические силы, энтропия и др.), и механический, характеризующийся дополнительным набором внутренних степеней свободы и учитывающий, в отличие от термодинамического, механическую инерцию.

Впервые дробная производная по времени в механических задачах появляется при аппроксимации экспериментальных данных о поведении вязкоупругих тел под нагрузкой [16, 17]. Р. Нигматуллин связал дробный характер производной по времени с диффузией в средах с фрактальной геометрией [18].

Уравнение Лиувилля с дробной производной по времени впервые было записано Хильфером [19] при анализе динамики фазовых переходов с использованием укрупнённых (блоковых) переменных

$$X_{iN} = \sum_{j=1}^M X_{iN}(j),$$

где  $X_{iN}(j)$  обозначает скалярную наблюдаемую  $X$  в узле  $j$  ( $j \in \{1, \dots, M\}$ ), принадлежащем блоку  $i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ). Введя центрированную и нормированную случайную переменную

$$X_N = \left( \sum_{i=1}^N X_{iN} - C_N \right) / D_N \quad (1)$$

и предположив трансляционную инвариантность, независимость и идентичность распределений этих переменных, Хильфер пользуется обобщённой предельной теоремой Леви, утверждающей, что при подходящем выборе последовательностей  $C_N$  и  $D_N$  случайная величина (1) при  $N \rightarrow \infty$  имеет предельное распределение, принадлежащее к классу устойчивых распределений Леви. В свою очередь, эти распределения тесно связаны с производными дробных порядков (см. [2]). Расходимость математического ожидания укрупнённых энергий при фазовом переходе и приводит к дробно-дифференциальной модификации уравнения Лиувилля для макроскопической переменной  $X(t)$ .

На основе этого анализа Хильфером был сделан вывод о существовании и некоторых свойствах фазовых переходов порядка меньше 1, названных им неравновесными переходами. Важнейшим признаком таких систем является неэкспоненциальный распад стационарных состояний, происходящий по степенному закону  $X(t) \propto t^{\nu-1}$ .

Позднее исследования Хильфера в этом направлении привели его к следующему постулату: *временная эволюция всех физических систем необратима* [20]. Полагая, что этот *закон необратимости* является не более и не менее как эмпирическим законом природы того же уровня, что и закон сохранения энергии, Хильфер пишет, что обратимое поведение системы является

идеализацией, что свойство обратимости проявляется лишь в той мере, в которой рассматриваемая система отделена (изолирована) от своего прошлого и от своего окружения.

Опираясь на многочисленные факты недебаевской релаксации зарядов в диэлектриках, авторы этой работы выписывают уравнения диффузии

$${}_0D_t^\nu \rho = \Theta_\nu \Delta \rho,$$

непрерывности

$${}_0D_t^\nu \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_\nu) = 0,$$

и, наконец, Лиувилля

$${}_0D_t^\nu \rho = \mathcal{L} \rho,$$

в примечании к которому, в частности, говорится, что частным случаем его является уравнение «дробного равновесного состояния» [20, с. 75–77]

$${}_0D_t^\nu \rho = 0.$$

Несмотря на кавычки, в общем-то предупреждающие читателя о неполной адекватности этого термина, пробел очевиден: в приведённых выше уравнениях не выдерживается нормировка плотности  $\rho$ : с течением времени интеграл по фазовым переменным от неё убывает.

В работе [21] выполнено формальное преобразование классического стационарного (с не зависящим от времени Лиувиллианом) уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\mathcal{L}\rho \quad (2)$$

в уравнение с дробной производной по времени и дробной степенью оператора Лиувилля в правой части, после отбрасывания члена  $O(t^{-1-\nu})$  принимающее вид

$${}_0D_t^\nu \rho = (-i\mathcal{L})^\nu \rho + O(t^{-1-\nu}). \quad (3)$$

Сконструированное (без особых, впрочем, физических оснований) уравнение (3) не эквивалентно уравнению (2) (из-за отброшенного члена), по этой причине его решение зависит от  $\nu$ . При  $\nu = 1$  оно совпадает с решением классического уравнения, при  $\nu = 0$  совпадает с равновесным решением стационарного уравнения

$$\mathcal{L}\rho = 0.$$

Позже мы вернёмся к обсуждению дробно-дифференциальной версии уравнения Лиувилля, но несколько в ином ключе.

## 2. Обобщение уравнений Ньютона

В работе [22] на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона решается задача о падении тел в атмосфере. Не затрудняя себя обоснованием постановки такой задачи, автор ссылается на использование дробных производных для описания процессов с диссипацией и далее просто сопоставляет получаемые решения с классическими. Начав с простейшего случая – падения тела при отсутствии силы сопротивления

$$m_\nu {}_0^v D_t V = mg, \quad (4)$$

он приходит к решению

$$V(t) = V_0 + \frac{mgt^\nu}{m_\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

из которого следует

$$x(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau = x_0 + V_0 t + \frac{mgt^{\nu+1}}{m_\nu \Gamma(2 + \nu)}$$

(здесь и выше  $V_0$  – начальная скорость,  $x_0$  – начальная координата вдоль оси, направленной вниз). Заметим, что при малых временах наблюдается бóльшая скорость, чем в случае обычного падения ( $t^\nu > t$  при  $\nu < 1$ ), тогда как при больших временах ситуация обратная, и этот факт как-то трудно согласуется с влиянием диссипации. Очевидна также проблема размерности коэффициента  $m_\nu$ : она не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. Чтобы обеспечить согласие с размерностью энергии, в [23, 24] было предложено выражать импульс в виде

$$p_\nu = m_\nu {}_0^{\alpha} D_t x(t), \quad \alpha = (1 + \nu)/2.$$

В результате выражение для полной энергии принимает вид

$$E = \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} + U(x) = \frac{m_\nu}{2} [{}_0^{\alpha} D_t x(t)]^2 - mgx.$$

Каких-либо дополнительных аргументов в оправдание этих конструкций в работе не приводится, сказано только, что при  $\nu \rightarrow 1$  все эти формулы принимают обычный для классической механики вид. Кроме того, приведено решение этой задачи с учётом сопротивления среды,

$$m_\nu {}_0^{\nu} D_t V + bV = mg, \quad (5)$$

и дана даже (не очень, впрочем, внятная) ссылка на эксперимент: свободное падение шести тел (в оригинале «ten») в атмосфере со средним весом одного тела 261.2 фунта с высоты от 31400 до 2100 футов удовлетворительно описывается дробно-дифференциальным решением с  $\nu = 0.998$  и  $m/m_\nu = 1.457$ . Беда лишь в том, что и классическое решение хорошо описывает этот процесс.

Приведённая выше формулировка дробной динамики не единственна. Так, Балеану с соавторами [25] построил иную версию такого обобщения, введя *дробную скорость* и *дробный импульс* на интервале  $[a, b]$  соотношениями

$$V(t) = (1/2)(A {}_a^{\alpha} D_t + B {}_t^{\beta} D_b)x(t)$$

и

$$p(t) = (m/2)(A {}_a^{\alpha} D_t + B {}_t^{\beta} D_b)x(t) = p_\alpha + p_\beta,$$

соответственно, где  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ , а  $A$  и  $B$  – постоянные с размерностями  $T^{\alpha-1}$  и  $T^{\beta-1}$ . В результате дробный аналог второго закона Ньютона получился в виде уравнения

$$(1/2)(\kappa_\alpha {}_t D_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta {}_a D_b^\beta p_\beta) = F, \quad (6)$$

дополненного *трансверсальным условием*

$$\left[ {}_t D_b^{\alpha-1} p_\alpha - {}_a D_t^{\beta-1} p_\beta \right]_a^b = 0. \quad (7)$$

Авторы отмечают, что при  $\alpha = 1, \beta = 1$

$${}_a D_t^\alpha = {}_a^{\alpha} D_t = {}_t D_b^\alpha = {}_t^{\alpha} D_b = \frac{d}{dt}$$

и уравнения (6)–(7) сводятся к стандартному ньютонову уравнению. Это действительно так. Но последующее замечание: «Если обобщённая сила в уравнении (6) равна нулю, то обобщённый закон Ньютона запишется в виде:  $\kappa_\alpha {}_t D_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta {}_a D_t^\beta p_\beta = 0$ » вызывает некоторое недоумение. Первый закон Ньютона не является просто следствием второго (иначе он не входил бы в систему ньютоновых аксиом). Первый закон выделяет из всех возможных систем отсчёта семейство инерциальных систем, в которых и «работает» второй закон. Используемые в предыдущих формулировках *нелокальные во времени* определения импульсов не могут удовлетворить галилеевым преобразованиям и могли бы иметь смысл для частиц, находящихся в некоторой среде, обеспечивающей нарушения трансляционных свойств лагранжиана системы во времени и пространстве.

### 3. Тело в вязкой жидкости

Поучительно в этом смысле напомнить задачу о движении тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости. На горизонтальной поверхности  $z = 0$  (ось  $z$  направлена вверх) бесконечно глубокого слоя ( $-\infty < z < 0$ ) такой жидкости находится больших размеров тонкая пластина, к которой приложена горизонтальная же сила  $F(t)$ , увлекающая её вместе с прилегающими слоями жидкости в движение вдоль оси  $x$ . Движение пластины описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t), \quad (8)$$

где  $Q(t) = -S\eta \partial v(z, t) / \partial z|_{z=0}$  – сила сопротивления, действующая на пластину со стороны жидкости,  $v(z, t)$  –  $x$ -компонента скорости жидкости на глубине  $z$  (остальные компоненты её равны нулю). По условию прилипания  $V(t) = v(0, t)$ , а поле скоростей  $v(z, t)$  удовлетворяет уравнению Навье–Стокса

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (9)$$

В системе уравнений (8)–(9), описывающей механическую систему тело+жидкость, все производные целого порядка и все операторы дифференциальные. Инфинитезимальная эволюция в любой момент времени  $t$  зависит только от состояния  $(V(t), v(z, t))$  в этот же момент, и по этой причине дальнейшая эволюция системы при заданном состоянии не зависит от предыстории (по вероятностной терминологии процесс марковский).

Но вот, выполняя известные процедуры [26], мы исключаем из этой системы переменную  $v(z, t)$  и получаем уравнение для оставшейся переменной – скорости пластины. Если при  $t < 0$  жидкость вместе с пластиной находилась в покое, а приложенная затем сила ограничена по величине, остающееся уравнение имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F - S\sqrt{\eta\rho} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau \right].$$

Теперь это – интегродифференциальное уравнение вольтерровского типа с запаздывающим аргументом неизвестной функции под интегралом. Более того, заключённый в квадратные скобки член представляет собой дробную производную порядка  $\nu = 1/2$  (при указанных условиях различие между двумя типами производных исчезает).

Перепишем это уравнение в виде

$$m \frac{dV}{dt} + S\sqrt{\eta\rho} {}_0^{\nu} D_t V = F(t). \quad (10)$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени  $t$  в точке  $(x, z)$  напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя  $(x', z)$ , где они находились, скажем, в момент  $t' < t$ . В силу трансляционной инвариантности решения относительно  $x$ , такое же распределение скоростей в этот момент ( $t'$ ) имело место и в точке наблюдения  $(x, z)$ . Это и есть простейший механизм эредитарности – «механическая» память.

Аналогичное уравнение для движения шара массой  $m$  и радиусом  $a$  в вязкой среде имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t),$$

где сила сопротивления  $Q(t)$  дается формулой

$$Q(t) = -6\pi\eta a V(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{dV(t)}{dt} - 6\pi\eta a^2 \sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

выведенной в работах Буссинеска [27] и Бассэ [28]. Первый член здесь представляет силу Стокса, второй – инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию присоединенной массы шара, третий пропорционален дробной производной порядка  $\nu = 1/2$  [29]. Если до начального момента  $t = 0$  тело покоилось, нижний предел в последнем интеграле заменяется нулем:

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V + 6\pi\eta a V(t) = F(t). \quad (11)$$

Как следует из Тауберовой теоремы, главная асимптотическая (при  $t \rightarrow \infty$ ) часть  $V^{\text{as}}(t)$  решений уравнений (10) и (11) удовлетворяет укороченным уравнениям дробного порядка  $\nu = 1/2$

$$S\sqrt{\eta\rho} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) = F(t) \quad (12)$$

и

$$6\pi a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) + 6\pi\eta a V^{\text{as}}(t) = F(t), \quad (13)$$

соответственно. И теперь заметно заблуждение авторов цитированных выше работ относительно интерпретации дробных производных в уравнениях (4)–(5): это не аналоги ускорительных членов уравнения Ньютона, это влияние внешней среды, определяющей асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  поведение тела, когда действие инерциальной силы истощилось и начальные условия уже значения не имеют (тело «забыло» о них).

#### 4. Система демпфер–пружина

Рассмотрим ещё один пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой  $m_1$  с коэффициентом трения о её стенки  $\eta$ , соединённый пружиной длиной  $l$  и жесткостью  $k > (\eta/2)^2$  с шариком массой  $m_2$ , движущимся в трубке без трения. К шарiku с момента  $t = 0$  приложена ограниченная по абсолютной величине сила  $F(t)$ . Мы имеем дело с динамической системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$m_1 \ddot{x}_1 = -\eta \dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F(t) - k(x_2 - x_1 - l).$$



Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0,$$

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Решение первого уравнения относительно  $x_1$  (в предположении, что  $x_2(t)$  известно) при заданных условиях выражается через его функцию Грина

$$G(t) = \frac{1}{m_1 \omega_1} \exp\left(-\frac{\eta t}{2m_1}\right) \sin(\omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2}$$

соотношением

$$x_1(t) = \int_0^t G(t - \tau) k [x_2(\tau) - l] d\tau.$$

Подставив это решение во второе уравнение системы, получаем замкнутое уравнение для части 1 рассматриваемой системы, имеющее теперь интегродифференциальный вид

$$m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 = k^2 \int_0^t G(t - \tau) x_2(\tau) d\tau + F_2(t), \quad (14)$$

со свободным членом

$$F_2(t) = F(t) + kl \left[ 1 - k \int_0^t G(\tau) d\tau \right].$$

Заметим, что мы опять получили тот же результат: исключая из рассмотрения одну из взаимодействующих между собой частей системы, описываемой уравнениями Ньютона (иными словами, марковской системы), мы обнаруживаем, что оставшаяся часть управляется интегродифференциальным уравнением. Теперь это – немарковский процесс, процесс с памятью.

Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружинкой и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (14). Влияние предыстории  $x_2(t - \tau)$  движения шарика на его поведение в момент времени  $t$  осуществляется через невидимую (скрытую) переменную  $x_1(t)$ . Не наталкивает ли это на мысль, что наличие таких интегралов с запаздыванием может свидетельствовать о наличии скрытых переменных? Естественно, наталкивает. Еще Зенер, комментируя интегральный (эредитарный, по Вольтерровой терминологии) член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру [29]. А между тем, эредитарность – это явный шаг в сторону дробно-интегрального оператора. Достаточно найти аргумент в пользу специфического вида ядра интегрального оператора  $K(t, t')$ : предположить, скажем, его инвариантность относительно сдвига во времени

$$K(t, t') = K_0(t - t')$$

(что в двух приведённых выше примерах получалось как бы само собой), а затем потребовать и однородности в эйлеровом смысле:

$$K_0(a\tau) = a^\alpha K_0(\tau).$$

Последнее требование, конечно, ни из каких «первых принципов» не проистекает и может быть введено лишь под давлением каких-нибудь очевидных, например, экспериментальных фактов. Такой подход был использован нами в обосновании дробно-дифференциальной кинетики дисперсионного переноса [30] (см. также развёрнутое изложение этого подхода в книге [31]). В принципе, эйлерова однородность связана с самоподобием системы [32]. Самоподобные системы составляют особый класс открытых систем, не являющихся подсистемами замкнутых систем (назовём его классом  $A$ ). Рассмотренные выше примеры относились к другому классу открытых систем, которые являются подсистемами замкнутых систем (обозначим этот класс символом  $B$ ). Обсуждение систем этого класса отложим до конца обзора.

## 5. Обобщённая газодинамика

Традиции и принципы теоретической физики побудили искать корни эрeditarности в молекулярно-кинетической природе вещества. Наиболее подходящим объектом для этой цели оказались разрежённые газы. В основе газодинамики лежит уравнение Больцмана, в пространственно-однородном случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)]. \quad (15)$$

Здесь  $B_0$  – больцмановский билинейный оператор столкновений, действующий на  $\varphi(\mathbf{v}, t)$  – одночастичную плотность распределения молекул в пространстве скоростей:

$$B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv \int d\mathbf{u} \int \sigma(\Theta; g) [\varphi(\mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{u}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{u}, t)] d\Omega.$$

В этом выражении  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  – скорости сталкивающихся молекул до или после (со штрихом) столкновения,  $g = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$  – их относительная скорость,  $\Theta$  – угол рассеяния,  $\sigma(\Theta; g)d\Omega$  – дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол  $d\Omega$  (законы сохранения энергии и импульса однозначно связывают  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{u}'$  с  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\Theta$ ).

Предположения, лежащие в основе вывода этого уравнения, существенно упрощают решение газодинамических задач, но до сих пор не считаются достаточно обоснованными для плотных газов и жидкостей. Для них получены обобщенные кинетические уравнения, связанные с именами Л. ван Хова, И. Пригожина, Р. Браута, П. Резибуа, Р. Цванцига, Э. Монтролла (см. [33–38]). Выведенные при более слабых ограничениях, эти уравнения сохраняют важнейшее свойство больцмановского уравнения – описывают необратимый процесс релаксации к равновесию. Главным же математическим отличием обобщенных уравнений является учет запаздывания в интеграле столкновения путем дополнительного интегрирования по сдвинутому временному аргументу одночастичной функции распределения в нелинейном операторе столкновений  $B_\tau$ , действующем на неё по фазовым переменным

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t). \quad (16)$$

В случае равновесного состояния решение уравнения Больцмана не зависит от времени,  $\varphi(\mathbf{v}, t) = \varphi_{\text{eq}}(\mathbf{v})$  и влияние запаздывания исчезает.

Последовательность получаемых в процессе этого вывода уравнений и образует новую иерархию. Напомним основные этапы вывода.

1. Из канонических уравнений Гамильтона для замкнутой системы  $N$  взаимодействующих молекул без всяких дополнительных предположений выводится *уравнение Лиувилля* для фазовой плотности  $\rho^N \equiv \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t)$ :

$$\frac{\partial \rho^N}{\partial t} = \mathcal{L}^N \rho^N,$$

где  $\mathcal{L}^N$  – *оператор Лиувилля*. Из-за «астрономически» большого числа переменных  $N$  оно непригодно для непосредственного описания движения макроскопических систем, а предположение о замкнутости ограничивает его практическое применение со стороны мезоскопических и наносистем.

2. Введением проекционного оператора  $\mathcal{P}$ , выполняющего усреднение фазовой плотности по пространству конфигураций,

$$\mathcal{P}\rho^N = \frac{1}{V^N} \int_V \dots \int_V \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t) \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j \equiv \varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t),$$

уравнение Лиувилля преобразуется в эквивалентное ему *формальное кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial t} = \int_0^t \mathcal{C}_\tau^N[\varphi^N(\{\mathbf{v}\}|t - \tau)] d\tau + f^N(\{\mathbf{v}\}, t),$$

где  $\mathcal{C}_\tau^N$  – оператор взаимодействия молекул между собой. Интеграл по времени появился в результате разложения решения  $\rho^N$  на две компоненты – «существенную»  $\varphi^N = \mathcal{P}\rho^N$  и «несущественную»  $(1 - \mathcal{P})\rho^N$  – и исключения последней из образовавшейся в результате этого разделения системы двух уравнений. Никаких новых процессов, ни ограничений на старые здесь не введено. Таким свойством обладает любой марковский процесс: усреднение по части переменных порождает интегрирование по времени, свидетельствующее о немарковском характере *редуцированного* процесса (справедливо и обратное: подходящим расширением фазового пространства немарковский процесс может быть преобразован в марковский). Свободный член уравнения  $f^N$  зависит от начального значения только «несущественной» части. Число независимых переменных, хоть и уменьшилось в два раза, все еще чрезвычайно велико, а само уравнение теперь стало незамкнутым.

3. Чтобы сократить  $N$ -частичный набор переменных до одночастичного и вместе с тем замкнуть уравнение, вводится **гипотеза молекулярного хаоса**: *случайные скорости вступающих во взаимодействие молекул взаимно независимы*:

$$\varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t - \tau) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau),$$

где  $\varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau)$  – одночастичные плотности в пространстве скоростей. В результате приходим к *обобщенному кинетическому уравнению*

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathcal{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

где

$$\mathcal{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot | t - \tau)] \equiv \mathcal{T}\mathcal{L} \int \dots \int \mathcal{C}_\tau^N \left[ \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j | t - \tau) \right] \prod_{j=2}^N d\mathbf{v}_j,$$

интегрирование предполагается по всем пронумерованным скоростям (индекс 1 опущен), а TL означает термодинамический предел.

4. Газ достаточно разрежен, чтобы взаимодействие молекул можно было рассматривать в модели бинарных мгновенных столкновений. В этом случае

$$B_{\tau}[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]\delta(\tau)$$

и мы приходим к уравнению Больцмана.

Отказавшись от последнего ограничения, аппроксимируем зависимость оператора столкновения от времени запаздывания множителем  $b(\tau)$ , нормированным на 1:

$$B_{\tau}[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]b(\tau), \quad \int_0^{\infty} b(\tau)d\tau = 1.$$

Запаздывание это и есть эффект памяти, или немарковский эффект, отражающий реальные процессы, происходящие в среде. Полученное при этом уравнение

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]d\tau + f(\mathbf{v}, t)$$

и образует математическую основу эредитарной, или, как ее называют еще, *обобщенной гидродинамики* [39].

## 6. Обобщенная гидродинамика

Долгое время считалось, что гидродинамика применима на временах, на много порядков больших «кинетических» времен: времени столкновения ( $\sim 10^{-15}$  с) и времени между последовательными столкновениями (для типичных жидкостей, например, воды  $\sim 10^{-14}$ ). Численное моделирование показало, однако, что в ряде случаев обычная гидродинамика применима и на гораздо меньших временных масштабах – примерно до 30 столкновений, то есть до времен порядка  $10^{-13}$ с. Заметим, что в приложениях математической статистики число 30 также играет приметную роль: считается, что для типичных выборок такого объема уже применима центральная предельная теорема, эквивалентная диффузионному приближению в гидродинамике.

Обобщенная гидродинамика явилась следствием распространения гидродинамического подхода с макроскопических на микроскопические масштабы. Уравнения Навье–Стокса сохранили при этом свою форму, но коэффициенты переноса стали зависеть от радиуса действия градиентов и от длительности их приложения. Тем самым включились масштабные факторы длины и времени, что позволило выйти за пределы модели непрерывной среды и учесть ее молекулярную структуру. Жидкость, характеризуемая обобщенной вязкостью  $\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ , обладает двумя свойствами – *нелокальностью* и *памятью*: сигнал, рожденный в момент времени  $t'$  в точке  $\mathbf{r}'$ , придет в точку  $\mathbf{r}$  в более поздний момент  $t$ . Это запаздывание обусловлено не столько инерционными свойствами жидкости, сколько диффузионным характером распространения флуктуаций. В любом случае, для перестройки расположения молекул требуется некоторое время.

Кроме того, выяснилась также необходимость учёта корреляций с партнерами по предшествующим столкновениям. Ранее распад корреляций предполагался экспоненциальным и в гидродинамических масштабах корреляции представлялись несущественными (гипотеза молекулярного хаоса). Численное моделирование показало наличие долговременного хвоста автокорреляционной функции для скорости жидкости при промежуточных плотностях [40]: скорость

частицы даже после нескольких сотен столкновений обнаруживает корреляцию со своим начальным значением, спадающую по степенному закону. В макроскопической гидродинамике этот факт известен со времен Стокса, установившего его при рассмотрении движения шарика в сплошной среде. Никто, однако, не предполагал, что этот вывод останется справедливым и для шариков атомных размеров.

Важную роль в интерпретации эффекта памяти играет и тот факт, что в определенных условиях мы уже не можем считать столкновения мгновенными и должны учитывать их продолжительность. Характерное время столкновения  $\tau_{\text{col}}$  становится теперь соизмеримым со временем релаксации  $\tau_{\text{rel}}$ , что необходимо учитывать при высоких плотностях.

Это легко понять из следующих соображений. Характерное время бинарных столкновений при низких плотностях оценивается отношением радиуса взаимодействий  $r_0$  к средней скорости движения молекул  $\bar{v}$ :

$$\tau_{\text{col}} \approx r_0/\bar{v}.$$

Время же релаксации оценивается сведением кинетического уравнения к релаксационному типу

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_{\text{eq}})}{\partial t} \approx -nr_0^2\bar{v}(\varphi - \varphi_{\text{eq}})$$

и имеет вид

$$\tau_{\text{rel}} \approx 1/(nr_0^2\bar{v}).$$

Таким образом, мы видим, что

$$\tau_{\text{col}}/\tau_{\text{rel}} \approx nr_0^3,$$

и при низких плотностях  $n$  время столкновений  $\tau_{\text{col}}$  пренебрежимо мало по сравнению со временем релаксации.

К аналогичному выводу приходят и авторы книги [36] на основе известного разложения обратного времени релаксации по степеням плотности молекул газа (концентрации)  $n$ :

$$\tau_{\text{rel}}^{-1} = r_0^2 n \bar{v} [1 + r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots].$$

Отношение рассматриваемых времен

$$\tau_{\text{col}}/\tau_{\text{rel}} = r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots,$$

так что, если мы хотим сохранить поправку  $(r_0^3 n)^2$ , мы не имеем права считать столкновения мгновенными.

Второй член в правой части обобщенного кинетического уравнения (16) описывает распад пространственных корреляций, могущих существовать в начальный момент времени. Можно показать, что, если в начальный момент времени пространственные корреляции отсутствуют, то  $f(\mathbf{v}; t) = 0$  при всех  $t > 0$ . Допустим теперь, что в начальный момент времени корреляции простираются на расстояния порядка радиуса взаимодействия  $r_0$ . Хаотически направленные скорости входящих в корреляционный кластер частиц ведут к их взаимному разбеганию, расплыванию кластера, и через время  $\tau_{\text{col}} = r_0/\bar{v}$  частицы перестают взаимодействовать друг с другом. Следует ожидать поэтому, что

$$f(\mathbf{v}; t) \approx 0, \quad t \gg \tau_{\text{col}}.$$

Расчеты подтверждают это в случае слабо взаимодействующего газа с экспоненциальным оттачиванием молекул, однако строгое доказательство этого свойства в общем случае не найдено.

Аналогичная ситуация имеет место и с операторным членом. Принято считать, что

$$B_\tau[\varphi] \simeq 0, \quad t \gg \tau_{\text{col}}.$$

Выше уже подчеркивалась важная роль диффузионной модели в гидродинамических задачах. Наличие долговременных корреляций существенным образом видоизменяет эту модель: входящий в диффузионное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

коэффициент диффузии  $K$  пропорционален интегралу от автокорреляционной функции  $\int_0^\infty \rho(t) dt$  и поэтому расходится, если корреляции спадают по степенному закону. В модифицированном уравнении диффузии, приближенно учитывающем нелокальность процесса с помощью дополнительного члена с 4-й производной (поправка Бернета),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 f}{\partial x^4},$$

расходятся оба коэффициента. «Простейший возможный путь, приводящий к переопределению коэффициентов», – говорится в статье Б. Олдера и У. Алли [40], – «обобщение закона Фика путем введения нелокальной (по времени) «функции памяти»:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt' + B_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dt'.$$

Это уравнение не только дает хорошо определенный коэффициент Бернета, но и предсказывает количественно синглетную функцию распределения при больших временах».

## 7. Турбулентная диффузия

Турбулентный характер придаёт этой нестационарной и неоднородной среде дополнительное качество случайности. Сразу возникает целый «букет» задач: определение средних характеристик потока, его флуктуаций, корреляций, вероятностей выбросов (больших отклонений) и др. Важнейшей задачей при этом становится установление (выбор) статистического ансамбля, по которому будет выполняться усреднение. Следующей по важности задачей является выбор процедуры расщепления корреляций, то есть преобразование, скажем, усреднённого по ансамблю уравнения

$$\frac{\partial \langle G \rangle}{\partial t} = \nabla \langle [D(\mathbf{x}, t) \nabla G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)] \rangle,$$

к уравнению для среднего пропагатора трассеров

$$\langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rangle = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \hat{T}g(\mathbf{x}, t),$$

содержащему оператор турбулентной диффузии  $\hat{T}$  (для простоты предполагаем турбулентность однородной и стационарной). Он и оказывается нелокальным.

Специфика турбулентной диффузии обусловлена действием на частицу вихрей разных размеров, существующих в турбулентной среде. Расстояние между двумя пробными частицами может существенно измениться за короткое время только под действием вихря, размеры которого

сравнимы с этим расстоянием. Чем дальше друг от друга эти частицы, тем больше размеры вихрей, разносящих их друг от друга, тем с большей скоростью растёт расстояние  $l$  между ними. В рамках классической теории диффузии такой эффект может быть достигнут введением зависимости коэффициента диффузии  $D$  от относительных координат, то есть от расстояния  $D = D(r)$ . Этот подход был использован в пионерской работе Ричардсона [41], записавшего уравнение для плотности распределения  $p(r, t)$  случайного расстояния между парой частиц примеси, находившихся в момент  $t = 0$  в одной точке, в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ D(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

с коэффициентом диффузии  $D(r) \propto r^{4/3}$ , соответствующим увеличению ширины диффузионного пакета  $\Delta(t)$  по закону

$$\Delta(t) \propto t^{3/2},$$

существенно отличающемся от нормального диффузионного закона  $\Delta(t) \propto t^{1/2}$ . Теоретически такое поведение нашло обоснование в известных работах А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова как следствие гипотезы о самоподобии локально изотропной турбулентности, определяемой единственным размерным параметром – скоростью диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  [42, 43].

Основная трудность этого подхода в обосновании пространственной зависимости коэффициента диффузии. Рост этого коэффициента с расстоянием  $r$  Ричардсон связывал с действием вихрей: с увеличением  $r$  в процесс относительного движения вовлекаются вихри всё больших размеров, и перемещения частиц возрастают. В рамках колмогоровской концепции турбулентности,  $4/3$  является прямым следствием размерности: достаточно предположить, что как начальное, так и конечное расстояния много меньше типичного размера наибольших вихрей  $L$  и много больше колмогоровской длины  $\eta = \nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ , где  $\nu$  – вязкость, а  $\varepsilon$  – средняя скорость диссипации турбулентной составляющей кинетической энергии [44].

Возникновение нелокального характера уравнения турбулентной диффузии можно проследить по давней работе Тчена [45], опирающейся на результаты Гейзенберга и Колмогорова. В этой работе известными преобразованиями гидродинамической турбулентной системы он привёл уравнение для фурье-трансформанты среднего пропегатора трассеров (помеченных молекул) к виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = [k^2 \nu(k)]^2 \tilde{g}(\mathbf{k}, t),$$

где турбулентная вязкость  $\nu(k)$  связана со спектральной плотностью турбулентной диссипации в единицу времени  $F(k)$  формулой Гейзенберга [46]

$$\nu(k) = \kappa \int_k^\infty \sqrt{F(q)/q^3} dq, \quad (17)$$

в которой  $\kappa$  – отвлечённое число. Семейство решений уравнения (17) содержит также решения уравнения стандартной релаксации

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -R(k) \tilde{g}(\mathbf{k}, t)$$

с обратным временем релаксации

$$R(k) = k^2 \nu(k).$$

Обратное время релаксации с отрицательным знаком и есть фурье-образ оператора турбулентной диффузии,  $T(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[-k^2\nu(k)]$ :

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = Tg(\mathbf{x}, t).$$

Если проигнорировать зависимость  $\nu$  от  $k$ , положив  $\nu(k) = \nu_0$  во всём интервале волновых чисел, это уравнение превращается в обычное уравнение диффузии

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu_0 \Delta g(\mathbf{x}, t).$$

В действительности,  $\nu$  не является постоянной, её зависимость от  $k$  определяется формой спектральной функции (17). Согласно *закону 5/3 Колмогорова–Обухова*, последняя представляется в степенном виде

$$F(k) = k^{-5/3}\psi(\lambda k), \quad (18)$$

где  $\psi(\lambda k)$  – функция «окна» («фильтра»), обращающаяся в нуль за пределами инерционной области. Получаемое в результате этой подстановки выражение

$$R(k) = C(k^2)^\gamma \psi(k\lambda), \quad \gamma = 1/3,$$

есть (с точностью до постоянного множителя) фурье-образ некоторого нелокального оператора, действующего по пространственной переменной. Если вновь проигнорировать фильтр, приняв функцию  $\psi(z)$  тождественно равной единице во всём диапазоне волновых чисел, как это сделано в книге Мони́на–Яглома [47], то придём к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -(k^2)^\gamma \tilde{g}(\mathbf{k}, t),$$

которое в естественных пространственно-временных переменных принимает вид уравнения с дробной степенью  $\gamma$  оператора Лапласа

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -C(-\Delta)^\gamma g(\mathbf{x}, t),$$

вновь превращающееся в диффузионное уравнение при  $\gamma = 1$ . Следует подчеркнуть, что пренебрежение ограниченностью степенного представления в области волновых чисел несколько дискредитирует это уравнение, побуждая искать более адекватное представление нелокальной версии.

Соответствующий пропагатор, то есть решение уравнения для точечного мгновенного источника

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -B(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (19)$$

выражается через 3-мерную плотность изотропного устойчивого распределения (распределения Леви–Фельдгейма)  $g_3(\mathbf{x}; \alpha)$  соотношением

$$f(\mathbf{x}, t) = (Bt)^{-3/\alpha} g_3((Bt)^{-1/\alpha} \mathbf{x}; \alpha), \quad \alpha \in (0, 2].$$

Дисперсия этого распределения бесконечна,

$$\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \infty,$$



и для характеристики расплывания диффузионного пакета со временем следует выбрать другую меру его ширины, например, ширину на высоте  $h$   $\Delta_h$ , или радиус сферы  $R_p$ , содержащей заданную вероятность  $p$ . Будучи пропорциональными друг другу, меры эти растут со временем пропорционально  $t^{1/\alpha}$ , что согласуется с законом Ричардсона при  $\alpha = 2/3$ .<sup>1</sup>

## 8. От броуновского движения к полётам Леви

Броуновское движение – это математическая модель молекулярной диффузии, предполагающая непрерывное перемещение диффундирующей частицы, находящейся под действием непрерывно поступающих некоррелированных дельта-импульсов из окружающего пространства. Результатом этих предположений является недифференцируемость броуновской траектории, исключающая понятие мгновенной скорости и по этой причине отменяющая наличие фронта (поверхности, разделяющей доступную к данному моменту времени область пространства от недоступной в случае точечного мгновенного источника). Отсутствие такой поверхности приводит к противоречащему физике выводу о мгновенном расширении первоначально компактного пакета частиц на всё пространство, хотя, если характеризовать этот процесс одним параметром – средним квадратом распределения  $\langle R^2(t) \rangle$ , то получим

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Этот закон легче проверяем в эксперименте, чем эволюция самого пространственного распределения в пакете диффундирующих частиц и может считаться первым признаком молекулярного характера диффузионного процесса, называемого также гауссовым процессом по причине гауссова распределения частиц в пакете. Если положить, что вектор  $\mathbf{R}(t)$ , соединяющий начальное положение частицы с её положением в момент наблюдения  $t$ , состоит из большого числа одинаково распределённых и статистически независимых малых векторных слагаемых, и воспользоваться центральной предельной теоремой, мы сразу придём и к гауссову распределению вероятности в пакете и линейному закону возрастания дисперсии (20). Сама же плотность вероятности  $f(\mathbf{x}, t)$  подчиняется уравнению диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f(\mathbf{x}, t),$$

выведенному ещё Эйнштейном в предположении о независимости приращений координат блуждающей частицы в последовательные интервалы времени. Эйнштейн получил его как предел интегрального уравнения Колмогорова–Чепмена

$$f(\mathbf{x}, t + \tau) = \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) f(\mathbf{x}', \tau), \quad t, \tau > 0, \quad (21)$$

в физическом отношении как раз и представляющего результат последовательных столкновений молекул, скажем, идеального газа с относительно тяжёлой броуновской частицей. Оба эти уравнения ограничиваются условием однородности среды, в противном случае функции  $f$  в уравнении (21) перестают быть трансляционно инвариантными, коэффициент диффузии становится зависящим от координат, а диффузионное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla[D(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}, t)]. \quad (22)$$

<sup>1</sup>В силу этого при классификации типов диффузии по скорости расплывания диффузионного пакета следует пользоваться не дисперсией, которая не всегда существует, а одной из приведенных выше мер, которые существуют всегда и могут быть выбраны таким образом, чтобы в пределе  $\alpha \rightarrow 2$  совпадать с дисперсией. Это касается  $\langle r^2 \rangle$ ,  $\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle$  и других характеристик.

В 1909 году Жан Батист Перрен экспериментально подтвердил закон (20), доказав тем самым и существование атомов. Описание этого опыта можно найти в любом учебнике по молекулярной физике. Заметим, однако, что Эйнштейн выводил своё уравнение для частиц, взвешенных в *газе* (передача импульсов происходила в столкновениях, разделённых временными промежутками, пусть и довольно малыми), тогда как Перрен имел дело с суспензией гуммигута (жевательной смолы) в *жидкости* (воде). Разница, между прочим, не является принципиальной: уравнение диффузии выводится как в газодинамике, так и в гидродинамике (даже в динамике нейтронных потоков в ядерно-технических установках).

Почти два десятилетия спустя (в 1926) Ричардсон проводил подобные эксперименты, но уже в других масштабах: не в пробирке или в чашках Петри, а в воздухе, точнее, в турбулентной атмосфере, и объектами наблюдений были не пылинки или частички суспензии, а клубы дыма из заводской трубы и специально посылаемые в атмосферу воздушные шары. Выполнив множество измерений, он нашёл, что средний квадрат расстояния между двумя частицами изменяется по закону

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t^3, \quad (23)$$

носящему теперь его имя. Конечно, образ броуновского движения сразу возникает в воображении, как только разговор заходит о случайном процессе. На самом деле, это лишь весьма специфический случай. Соринки, брошенные нами в турбулентный поток, ведут себя иначе, чем броуновская частица, их траектории гладкие, и будучи снятыми на видеокамеру, позволяют установить скорости движения частиц в интересующие нас моменты времени. Мы видим, что движение автокоррелировано: скорость движения в следующем интервале времени мало отличается от скорости в предыдущем, инерция сохраняет об этом память. Но как физически объяснить ускоренный характер (22) расплывания диффузионного пакета в турбулентной среде по сравнению с броуновским законом (21)? Главная причина в том, что процесс перестал быть процессом с независимыми приращениями, каковым являлось броуновское движение, тем самым нарушились условия центральной предельной теоремы, следствием которой является закон (20), частицы теперь находятся не под действием независимых толчков разных молекул газа, а переносятся газом-жидкостью как непрерывно (хотя и нерегулярно) перемещающейся субстанцией. Движения разных пробных частиц перестали быть независимыми, поэтому-то речь и идёт теперь о расширении облака как целого, а не плотности вероятности отдельной пробной частицы, хотя в принципе и можно поставить задачу о таком распределении, например, относительно центра масс такого облака, фактически говоря об относительном распределении двух частиц, или, эквивалентно, о распределении расстояния  $R$  между двумя произвольно выбранными частицами диффузионного облака. Аргументируя тем, что турбулентная диффузия осуществляется совместным действием совокупности вихрей разных размеров, Ричардсон, можно сказать, искусственно применил к описанию его эволюции диффузионное уравнение

$$\frac{\partial p(R, t)}{\partial t} = \frac{\partial [D(R) \partial p(R, t) / \partial R]}{\partial R}$$

с зависящим от коэффициентом диффузии  $D(R) \propto |R|^{4/3}$ . Автомодельное решение такого уравнения при  $D(R) = R^{4/3}$  действительно имеет вид

$$p(R, t) = \frac{9}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{9}{4} \frac{R^{2/3}}{t} \right\}, \quad 0 < R < \infty,$$

средний квадрат которого

$$\langle R^2 \rangle = (280/243)t^3$$

по размерности согласуется с эмпирическим законом (23). Однако диффузионный характер эволюции этой величины, предписываемый ей этим уравнением, оставляет ощущение неадекватности вихревой картине турбулентности: подхватываемая крупным вихрем частица быстро уносится от своей соседки, остающейся в зоне действия мелкого вихря, и лишь через некоторое время покидающая свой вихрь, будучи унесённой на большое расстояние новым вихрем. Если нарисовать график такого движения, мы увидим длинные скачки, перемежаемые относительно короткими интервалами броуновского типа.

Примерно такие соображения могли послужить мотивацией авторам работы [48] для введения в модель полётов Леви (распределённых по степенному закону скачков) с зависящей от длины скачка, но не зависящей от времени скоростью  $V(t)$ . Распределение времени такого полёта дано формулой (9) цитируемой работы, имеющей вид

$$\psi(t|R) = \delta(R - V(R)t),$$

где  $V(R)$  скорость, с которой частица проходит расстояние  $R$ , так что совместное распределение вектора перемещения  $\mathbf{R}$ , заменившего в их модели вектор относительного положения, и затраченного на это перемещение времени характеризуется произведением

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \psi(t|\mathbf{R})p(\mathbf{R}),$$

второй сомножитель которого  $p(\mathbf{R})$  определён через характеристическую функцию  $\exp\{-C|\mathbf{k}|^\alpha\}$ ,  $0 < \alpha < 2$  устойчивой плотности Леви–Фельдгейма. Условную же плотность, представляемую первым сомножителем, авторы записали в виде

$$\psi(t|\mathbf{R}) = \delta(R - V(R)t),$$

хотя логичней было бы записать её в виде  $\psi(t|\mathbf{R}) = \delta(t - R/V(R))$ , что, впрочем, в математическом отношении ничего не меняет. Траектории таких частиц аппроксимируются независимыми ломаными кривыми, составленными из независимых случайных векторов, подчиняющихся изотропному устойчивому распределению Леви–Фельдгейма с показателем  $\alpha \in (0, 2)$ . Скорость  $V(|\mathbf{R}|)$  оценивается на основе колмогоровской гипотезы скейлинга для инерционной области турбулентной диссипации. Средняя кинетическая энергия вихрей, характеризуемых масштабом  $R$ ,  $E_R \sim V_R^2$ . Если скорость её передачи через этот масштаб  $\varepsilon_R \sim E_R/t_R$  постоянна, то  $\varepsilon \sim V_R^3/R$  и  $V(R) \sim R^{1/3}$ . В иерархической модели турбулентности с фрактальной размерностью  $d_f$   $E_R \sim V_R^2 q_R$ , где  $q_R = (R/R_0)^\mu$ ,  $R_0$  – внешний масштаб длины,  $E$  – евклидова размерность,  $\mu = E - d_f$ .

Из этих формул выводятся асимптотические выражения для скорости

$$V(R) \sim R^{1/3+\mu/6}$$

и среднего квадрата смещения

$$\langle R^2(t) \rangle \sim \begin{cases} t^3 + 3\mu/(4 - \mu), & \alpha \leq (1 - \mu)/3; \\ t^2 + 6(1 - \alpha)/(4 - \mu), & (1 - \mu)/3 \leq \alpha \leq (10 - \mu)/6; \\ t, & \alpha \geq (10 - \mu)/6. \end{cases}$$

Хотя авторы и отмечают, что при  $\mu = 0$  первый из приведённых случаев согласуется с законом Ричардсона, остаётся ощущение неадекватности как в определении скорости через расстояние, так и в представлении о характере самих траекторий. Большей наглядностью в этом отношении обладает, по моему мнению, картина, рассмотренная Шёнфельдом [49].

## 9. Вихревая модель Шёнфельда

Аргументируя свою точку зрения, Шёнфельд рассмотрел плоский вихрь с характерным размером  $\varrho$  с центром в точке  $x, y$  координатной плоскости, порождающий в начале координат скорость  $w$ , направленную под углом  $\varphi$  к оси  $x$ . Вклад этого вихря в изменение концентрации примеси

$$n(x, y) \mapsto n(x - \varrho \cos \varphi, y - \varrho \sin \varphi).$$

он оценил через  $x$ -компоненту диффузионного потока

$$\delta j_x = n(x - \varrho \cos \varphi, y - \varrho \sin \varphi) w \cos \varphi$$

и просуммировал его по всем расстояниям  $\varrho$  от осей вихрей, характеризующихся осесимметричным (не зависящим от угла  $\varphi$ ) распределением  $W d\varrho/\varrho$ :

$$j_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho} W(\varrho) n(x - \varrho \cos \chi, y - \varrho \sin \chi) \cos \chi.$$

Преобразование Фурье по обоим пространственным переменным с последующей подстановкой в фурье-образ уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = ik_x \tilde{j}_x + ik_y \tilde{j}_y$$

даёт

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + k^2 \tilde{K}(k) \tilde{n}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где

$$\tilde{K}(k) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho} W(\varrho) J_1(2\pi k \varrho)$$

В случае межмолекулярных масштабов, отмечает автор, резонно предположить, что плотность  $W(\varrho)$  существенно отлична от нуля лишь при малых значениях аргумента, при значениях же, скажем, в несколько раз превышающих средних пробег молекул, её можно считать равной нулю ( превратив, тем самым, в дельта-функцию). Полагая в области малых значений аргумента  $J_1(2\pi k \varrho) \approx \pi k \varrho$ , приходим к фурье-образу уравнения молекулярной диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + k^2 \tilde{n}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

В конце своей статьи Шёнфельд пытался вернуться к уравнению турбулентной диффузии, пробуя разные модельные образы для  $\tilde{K}(k)$ , но ни на чём подходящем не остановился.

## 10. Статистическая теория Чена

Наиболее характерной чертой явления турбулентности является непрерывный перенос кинетической энергии по шкале масштабов: рождённая первоначально в форме крупно-масштабных образований типа вихрей, она распределяется между возрастающим числом последовательно распадающихся дочерних вихрей, что увеличивает локальный градиент турбулентного поля и темп диссипации энергии. В целом, этот процесс характеризуется спектральной функцией  $F(k)$ ,

такой что  $F(k)dk$  есть кинетическая энергия, передаваемая в интервале волновых чисел  $(k, k+dk)$ . Из-за трудностей аналитического описания взаимодействий вихрей между собой спектральная функция оценивается из соображений размерности. Руководствуясь этими соображениями, Гейзенберг записал передаточную функцию  $W_k$  (равную энергии, передаваемой гармониками с волновыми числами, меньшими  $k$ , гармоникам с волновыми числами, большими  $k$ ) в виде [46]

$$W_k = 2\nu_k \int_0^k F(q)q^2 dq, \quad (24)$$

где  $\nu_k = \kappa \int_k^\infty \sqrt{F(q)q^{-3}} dq$  – турбулентная вязкость, а  $\kappa$  – числовая постоянная. В этой форме передача энергии представлена подобно вязкой диссипации произведением турбулентной вязкости на квадрат завихренности. Не изменяя принципу размерности, Обухов записал передаточную функцию в виде [43].

$$W_k = \kappa \int_k^\infty \left[ 2 \int_0^k F(q)q^2 dq \right]^{1/2} F(q') dq'. \quad (25)$$

Эта форма представляет передачу энергии как произведение сдвиговых рейнольдсовых напряжений (первый интеграл) на завихренность (второй интеграл). Формы (24) и (25) соответствуют двум разным подходам к описанию турбулентности, основанные соответственно на рассмотрении турбулентной диссипации и сдвиговых напряжений в турбулентной жидкости. В инерционной области представления Гейзенберга и Обухова согласуются с колмогоровской теорией (в частности, с законом  $F(k) \propto k^{-5/3}$ ), но за её пределами дают разные результаты.

Последовательная теория турбулентной диффузии, основанная на идеях Гейзенберга, Вайцеккера, Колмогорова и Обухова, реализованных в рамках математического аппарата статистической механики в сочетании с рейнольдсовым разделением статистических флуктуаций и турбулентных пульсаций, построена в серии работ Чена [45, 50]. Напомнив, что Ричардсон рассматривал пару частиц, Чен извлёк из уравнения Лиувилля для системы  $M$  частиц (молекул) в объёме  $V$  уравнения для одночастичной  $F_a(t, \mathbf{x}_a, \mathbf{p}_a)$  и двухчастичной  $F_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$  плотностей распределения в фазовом пространстве динамической системы с заданным потенциалом взаимодействия  $\phi_{ab} = \phi(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ :

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{x}_a} = \sum_b \frac{M_b}{V} \iint \left( \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} - \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \right) d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ab}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} + \frac{\mathbf{p}_b}{m_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_b} &= \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} + \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_b} + \\ &+ \sum_b \frac{M_c}{V} \iint \left( \frac{\partial \phi_{ac}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{p}_a} + \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial \mathbf{x}_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_b} - \frac{\partial \phi_{ac}}{\partial \mathbf{p}_a} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{x}_a} - \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial \mathbf{p}_b} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{x}_b} \right) d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b. \end{aligned}$$

Отмечая, что для систем слабо взаимодействующих частиц можно доказать равенство

$$F_{abc} = F_a F_b F_c + F_a F'_{bc} + F_b F'_{ac} + F_c F'_{ab},$$

где

$$F'_{ab} = F_{ab} - F_a F_b \quad (26)$$

и т.д., Чен использовал его в качестве приближённого инструмента замыкания системы, или, если угодно – гипотезы. Перейдя далее от плотностей вероятностей к плотностям первого и второго факториальных моментов (соответствующих среднему числу частиц и среднему числу пар частиц),

$$N_a(t, x_a) = \int F_a(t, \mathbf{x}_a, \mathbf{p}_a) d\mathbf{p}_a$$

и

$$G_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) = \iint F_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) d\mathbf{p}_a d\mathbf{p}_b,$$

он пришёл к уравнению

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_{ai}} \left( K_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial x_{aj}} \right),$$

где

$$K_{ij} = \int_0^t d\tau \sum_{bc} \iint \left( \frac{M_b}{V} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_{ai}} \right) \left( \frac{M_c}{V} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_{aj}} \right) G'_{bc}(t - \tau, \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c) d\mathbf{x}_b d\mathbf{x}_c,$$

а штрих играет ту же роль, что и в формуле (26). Парная функция  $G'_{bc}$  отражает пространственно-временные корреляции, косвенным образом указывая на размеры турбулентных вихрей и продолжительность пребывания в них.

Следуя Рейнольдсу, Чен разбил наблюдаемую концентрацию диффундирующих частиц  $c$  на статистическое среднее  $N = \langle c \rangle$  и флуктуации  $n$ :  $c = N + n$ . Аналогичным образом он представил и скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$ , положив  $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ , и подставив эти разбиения в уравнения непрерывности и Навье–Стокса, усреднил их по статистическому ансамблю. В экономных тензорных обозначениях полученные им уравнения примут вид:

$$N_{,t} + \langle u_k n_{,k} \rangle = 0,$$

$$n_{,t} + u_k n_{,k} - \langle u_k n_{,k} \rangle + u_k N_{,k} = 0,$$

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} - \langle u_j u_{i,j} \rangle = -p_{,i}/\rho + \nu u_{i,jj}.$$

Следующий этап – преобразование Фурье (трансформанты отмечаются тильдой над символами). С учётом условия несжимаемости, в рамках которого действовал Чен,

$$ik_j \tilde{u}_j(\mathbf{k}) = 0,$$

$$\tilde{N}_{,t} = -i \int q_j \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{q},$$

$$\tilde{N}_{,tt} = i \int k_j \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle_{,t} d\mathbf{q}, \quad (27)$$

$$\tilde{n}_{,t} = -iq_j \int [\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) - \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle] d\mathbf{q} - iq_j \int \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{N}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{i,t} = -iq_j \int [\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{u}_s(\mathbf{q}) - \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{u}_s(\mathbf{q}) \rangle] (\delta_{is} - k_i k_s / k^2) d\mathbf{q}. \quad (29)$$

Из (28)–(29) следует

$$[\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q})]_{,t} = iq_l \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \int \tilde{u}_l(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{N}(\mathbf{q}') d\mathbf{q}'. \quad (30)$$

С учётом формулы обмена фаз [50]

$$\int \tilde{u}_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{N}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = -ik_l N(\mathbf{k}) v_k$$

и спектрального представления коэффициента диффузии [46]

$$v_q = \chi \int_q^\infty \sqrt{F(k)/k^3} dk,$$

формула (30) представляется в виде

$$[\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q})]_{,t} = q^2 \tilde{N} v_q \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (31)$$

Подстановкой (31) в (27) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial t^2} &= (v_k k^2)^2 \tilde{N}, \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} &= -R(k) \tilde{N}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (32)$$

с обратным временем релаксации

$$R(k) = v_k k^2 = \kappa k^2 \int_k^\infty \sqrt{F(q)/q^3} dq.$$

Наконец, используя спектральную функцию  $F$ , получим для  $R(k)$  выражение

$$R(k) = (3\kappa/4) \sqrt{K_0} (\varepsilon k^2)^{1/3}, \quad \Lambda^{-1} \ll k \ll \lambda^{-1}.$$

Если бы не последнее ограничение, то коэффициент  $(k^2)^{1/3}$  соответствовал бы одной третьей степени оператора Лапласа:  $\Delta^{1/3}$ .

Решение уравнения (32) имеет вид

$$\tilde{N}(\mathbf{k}, t) = e^{-t/R(k)} \tilde{N}(\mathbf{k}, 0),$$

где

$$R(k) = R(1) \cdot k^\alpha,$$

если взять  $\psi$  равным 1. Чен [45] обратил трансформанту Фурье при начальном условии  $\tilde{N}(\mathbf{k}, 0) = 1$ , соответствующем точечному мгновенному источнику для одно-, двух- и трехмерных диффузионных процессов. В наших обозначениях оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{G}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -R(1) (-\Delta)^{\alpha/2} \bar{G}(\mathbf{x}, t).$$

Напомним, что его решение принимает автомодельную форму с со скейлинговой переменной  $\xi = rt^{-1/\alpha}$  ( $\alpha \in (0, 2]$ ).

Такова, в конспективном изложении, «арифметика» теории Чена.

## 11. Альтернативный путь: модель открытой системы

В процессе размышлений над причинами нелокальности «диффузионного» оператора в теории турбулентной диффузии вновь обращаемся к тому, что в случае молекулярной диффузии в *разреженном* газе трассер (например, молекула другого газа) испытывает столкновения с отдельными молекулами, никак не связанными с остальными, и по этой причине процесс описывается локальным уравнением. Однако в случае турбулентной диффузии молекулы, окружающие трассер, связаны в единое (правда, не жёсткое, но, говоря вероятностным языком, *коррелированное*) целое, и обмен импульсом при столкновении с таким образованием (например, вихрем) сам по себе уже является нелокальным процессом, уравнение которого можно записать, в частности, в виде

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta \int d\mathbf{x}' K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n(\mathbf{x}', t).$$

Само же разделение (хотя и не вполне определённое) локальных характеристик среды (плотности, скорости), находящейся в турбулентном состоянии, на две составляющие, называемые *статистическими флуктуациями* и *турбулентными пульсациями*, открывает возможность представления такой среды в виде сосуществования двух сред, обменивающихся между собой энергией, импульсом, моментом импульса... Посмотрим на эту ситуацию с позиции современной теории открытых систем [51, 52].

**11.1. Открытые системы.** Возможно, самая простая и общая интерпретация феномена эредитарности кроется в концепции открытых систем, которую можно рассматривать как некоторую легализацию скрытых переменных. Говоря о замкнутой (консервативной) системе, мы обычно имеем в виду механическую систему, полностью изолированную от окружающего мира, не обменивающуюся с ним ни массой, ни энергией, ни импульсом, ни другими аддитивными характеристиками, части которой взаимодействуют друг с другом посредством недиссипативных сил, и потому указанные величины в процессе движения системы сохраняются. Потенциальный характер сил позволяет ввести в действие стандартный аппарат аналитической динамики, в частности, уравнение Лиувилля. Открытыми же системами естественно назвать системы, не удовлетворяющие хотя бы одному из указанных условий<sup>2</sup>.

Удобные в чисто механическом отношении, эти понятия недостаточно ёмки в отношении термодинамическом. Так, обмен небольшими некоррелированными порциями энергии, образующий *канонический ансамбль*, практически не влияет на термодинамические свойства системы, не отличая её от замкнутой в узком смысле, характеризуемой микроканоническим ансамблем. По этой причине, наряду с данной классификацией (будем называть такие системы замкнутыми или открытыми *в узком смысле* системами) используются их аналоги *в широком смысле*. Мы ограничимся здесь рассмотрением открытой лишь в узком смысле модели. Подробности динамики открытых в широком смысле систем читатель найдёт в книгах [53, 54].

**11.2. Открытая система как подсистема замкнутой.** Рассмотрим замкнутую гамильтонову систему, характеризуемую набором фазовых переменных  $\{q_1, p_1; \dots; q_n, p_n\}$ . Разобьём её на две части: подсистему 1 с координатами  $\mathbf{x} \equiv \{q_1, p_1; \dots; q_{n_1}, p_{n_1}\}$  и подсистему 2 с остальными координатами, совокупность которых обозначим через  $\mathbf{y}$ . Гамильтониан исходной системы предстанет в виде суммы

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_2(\mathbf{y}) + \mathcal{H}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (33)$$

<sup>2</sup>Существуют, впрочем, и другие определения открытых систем.



первое слагаемое в которой представляет гамильтониан подсистемы 1 в отсутствие подсистемы 2, второе – гамильтониан подсистемы 2 в отсутствие подсистемы 1, а третье – гамильтониан взаимодействия этих подсистем. Если  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  – детерминированное начальное состояние системы, а  $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  и  $\mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  – фазовые траектории каждой из подсистем, параметризованные общим физическим временем  $t$ , тогда фазовая плотность вероятности

$$f_{n_1+n_2}(q_1, p_1; \dots; q_{n_1+n_2}, p_{n_1+n_2}; t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

запишется в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]\delta[\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)].$$

Более естественно, однако, иметь в виду некий ансамбль случайных начальных состояний  $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\}$ , характеризуемый плотностью

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle. \quad (34)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лиувилля, которое мы запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (35)$$

а начальное условие полагаем распределённым согласно (34).

Оператор Лиувилля, определяемый формулой

$$\mathcal{L}f = -\{\mathcal{H}, f\},$$

тоже распадается на три слагаемых

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}, \quad (36)$$

содержащих, соответственно,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_{12}$ . В отсутствие взаимодействия между подсистемами оператор  $\mathcal{H}_{12}$  исчезает, и корреляции между ними определяются только начальным состоянием. Если таковые отсутствуют,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t_0)f_2(\mathbf{y}, t_0),$$

то решение уравнения (35), отмеченное для данного случая верхним индексом 0, имеет вид произведения функций

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = f_1(\mathbf{x}, t)f_2(\mathbf{y}, t), \quad (37)$$

каждая из которых удовлетворяет своему уравнению,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= \mathcal{L}_1 f_1(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} &= \mathcal{L}_2 f_2(\mathbf{y}, t), \end{aligned}$$

со своим начальным условием:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, t_0) &= \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \rangle, \\ f_2(\mathbf{y}, t_0) &= \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\int f_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int f_2(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \iint f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 1$$

при всех  $t \geq t_0$ .

**11.3. Проекционные операторы Цванцига–Мори.** При наличии взаимодействия подсистем процедура преобразования в систему двух уравнений производится с помощью  $P$  – проекционного оператора Цванцига–Мори. Определим действие оператора  $P$  на функцию  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  формулой

$$Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{y}' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{y}, t_0) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (38)$$

Поддействуем на обе части этого равенства оператором  $P$  ещё раз:

$$\begin{aligned} P^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P \left( \int d\mathbf{y}' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) \right) = \int d\mathbf{y}' \left( \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) f_2(\mathbf{y}', t_0) \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \\ &= \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \left( \int f_2(\mathbf{y}', t_0) d\mathbf{y}' \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Повторное применение оператора  $P$  не изменило результат. По этой причине оператор  $P$  и называется проекционным. Определим *дополнительный* к  $P$  оператор  $P'$  формулой

$$P' = \mathbf{1} - P \quad (39)$$

(здесь  $\mathbf{1}$  – тождественный оператор). Легко проверить, что  $P'$  тоже является проекционным оператором и ортогонален оператору  $P$ :

$$PP' = P'P = 0 \quad (40)$$

Кроме того, можно показать, что  $P$  и  $P'$  коммутируют с  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ ,

$$P\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P = P'\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P' = 0, \quad P\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P = P'\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P' = 0, \quad (41)$$

операторы  $P$  и  $\mathcal{L}_2$  взаимно ортогональны,

$$P\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2P = 0, \quad (42)$$

и справедливо тождество

$$P\mathcal{L}_{12}P = 0 \quad (43)$$

(см. книгу Максимилиана Ди Вентры [55]).

**11.4. Расщепление уравнения Лиувилля.** Согласно (38), фазовую плотность совокупной системы можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + P'f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (44)$$

обладающих вытекающими из (39) свойствами:

$$P\phi_1 = \phi_1, \quad P\phi_2 = 0, \quad P'\phi_1 = 0, \quad P'\phi_2 = \phi_2. \quad (45)$$

Подставив разложения (36) и (44) в уравнение Лиувилля (35), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1 + \phi_2) = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12})(\phi_1 + \phi_2). \quad (46)$$

Раскрыв скобки, поддействуем на обе части этого уравнения оператором  $P$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}P\phi_1 + \frac{\partial}{\partial t}P\phi_2 = P\mathcal{L}_1\phi_1 + P\mathcal{L}_1\phi_2 + P\mathcal{L}_2\phi_1 + P\mathcal{L}_2\phi_2 + P\mathcal{L}_{12}\phi_1 + P\mathcal{L}_{12}\phi_2.$$

Учёт соотношений (41)–(43) и (45) позволяет существенно сократить это уравнение без каких-либо потерь:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1 \phi_1 + P \mathcal{L}_{12} \phi_2. \quad (47)$$

Вернёмся теперь к уравнению (46) и подействуем на обе его части дополнительным оператором  $P'$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} P' \phi_1 + \frac{\partial}{\partial t} P' \phi_2 = P' \mathcal{L}_1 \phi_1 + P' \mathcal{L}_2 \phi_1 + P' \mathcal{L}_{12} \phi_1 + P' (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}) \phi_2.$$

Первое слагаемое в левой части исчезает из-за третьего свойства в списке (45), первый и второй члены справа преобразуются с использованием соотношений (40) и (41):

$$\begin{aligned} P' \mathcal{L}_1 \phi_1 &= P' \mathcal{L}_1 P f = P' P \mathcal{L}_1 f = 0, \\ P' \mathcal{L}_2 \phi_1 &= P' \mathcal{L}_2 P f = P' P \mathcal{L}_2 f = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$P' \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\partial (P' \phi_2)}{\partial t} \equiv \frac{\partial \phi_2}{\partial t},$$

и возвращаясь к символу полного лиувиллиана (36), представим второе уравнение системы в виде

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = P' L \phi_2 + P' \mathcal{L}_{12} \phi_1.$$

**11.5. Уравнение Линдблада.** Напомнив, что в общем случае начальное условие предполагается заданным при  $t_0$ , запишем формальное решение второго уравнения системы в виде

$$\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \exp[(t - t_0) P' L] \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \quad (48)$$

По свойству (43), множитель  $P' \mathcal{L}_{12} \phi_1$ , появившийся под интегралом, слегка упрощён:

$$P' \mathcal{L}_{12} \phi_1 = (1 - P) \mathcal{L}_{12} P f = \mathcal{L}_{12} \phi_1.$$

Подставим решение (48) второго уравнения в правую часть первого уравнения (47) системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P L \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + P L \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \\ &+ P L \exp[(t - t_0) P' L] \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \end{aligned}$$

Переходя, согласно (38), к фазовой плотности подсистемы  $I$ , приведём последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{t_0}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) + M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0).$$

где

$$\begin{aligned} L_1 f_1(\mathbf{x}, t) &= [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} P L f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, t), \\ Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) &= [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} P \mathcal{L} \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} \text{PL exp}[(t - t_0)\mathcal{L}] \text{P}' f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{y}, t_0).$$

Последний член отражает влияние начальных условий совокупной системы на последующее движение подсистемы  $l$ . В момент  $t = t_0$  интегральный член, отражающий влияние предыстории процесса на  $\partial f_1/\partial t$ , исчезает. Это означает просто, что до этого момента системы не существовало, другими словами, в момент  $t_0$  произошло рождение системы. Но такие процессы в классической механике исключены, логично поэтому принять  $t_0 = -\infty$  и положить

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 0.$$

Производя аналогичную замену и в нижнем пределе интеграла памяти, получим аналог квантового уравнения Линдблада

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau), \quad (49)$$

за которым оставим то же название.

Несмотря на отсутствие явных выражений для операторов, входящих в уравнение (49), его физический смысл довольно прозрачен. Изменение состояния наблюдаемой замкнутой системы  $l+2$  в промежутке времени  $(t, t + dt)$  полностью определяется её состоянием в момент  $t$ , поэтому для предсказания её поведения в будущем ( $t > t_0$ ) достаточно знать состояние в какой-нибудь один (любой) момент времени  $t_0$ , предыстория ( $t \in (-\infty < t < t_0)$ ) роли не играет. Если же наблюдению доступна только часть этой системы – открытая система  $l$ , то состояния только системы  $l$  недостаточно для предсказания её движения. Подсистема эта находится (и находилась ранее) во взаимодействии с подсистемой  $2$ , характеризуемой скрытыми переменными. В какие-то интервалы времени она передавала ей импульс, момент импульса, энергию, которые участвовали в эволюции подсистемы  $2$  и спустя некоторое время возвращались в подсистему  $l$ . Вот этот-то обмен динамическими характеристиками и отражается эредитарным интегралом. Иными словами, информация о предыстории открытой системы некоторое время хранится в её окружении и затем возвращается в неё саму. Этот процесс и обозначается термином «память», который не стоит полностью ассоциировать с его биологическим аналогом, подразумевающим хранение информации в самом биологическом объекте.

В классической равновесной термодинамике подсистема  $l$  предполагается достаточно большой, чтобы влияние этого обмена (происходящего через поверхность и потому пропорционального отношению поверхность/объём) можно было считать малым. При этом лишь небольшая доля этих и без того малых потоков содержит информацию, вынесенную ранее из подсистемы  $l$  и теперь возвращаемую в неё, так что в итоге мы имеем дело с малой величиной второго порядка, что и оправдывает обычное пренебрежение эредитарностью в макроскопических (хотя и далеко не во всех) процессах. При переходе к малым (мезо- и нано-) размерам отношение поверхность/объём меняется и учёт эредитарных эффектов может оказаться необходимым [55].

Таким образом, имеется два способа предсказания эволюции открытой системы, являющейся частью замкнутой. Первый способ: решить дифференциальное уравнение эволюции замкнутой системы при заданных начальных условиях и извлечь из полученного решения всю информацию, касающуюся данной подсистемы. Второй способ: решить интегродифференциальное уравнение для самой открытой подсистемы, не вовлекая в процесс решения её окружение. Последнее не означает, что мы игнорируем окружение: интегральный член как раз и описывает

передачу информации от открытой системы в ранние времена через её окружение в неё же в более поздние времена. Сюда же «вплетается» информация о начальном состоянии окружения.

Если речь идёт о пространственно разделённых подсистемах, а не о совмещённых в пространстве, как, например, электронная и ионная компоненты в кристалле, передача этой динамической информации осуществляется через поверхность подсистемы  $S$ . Результат зависит от отношения поверхность/объём. Для макроскопических образцов это отношение мало и таким обменом можно пренебречь (микрoканонический ансамбль, представляющий открытую подсистему  $S$  как замкнутую) или ограничиться обменом некоррелированными малыми порциями (канонический и большой канонический ансамбли). В обоих этих случаях интеграл исчезает, и мы получаем традиционную механическую основу термодинамики. С уменьшением размеров образца мы вступаем в область мезо- и далее – наномеханики. Число «действующих лиц» здесь резко сокращается (с  $10^{23}$  атомов до сотен тысяч или даже вообще просто до сотен атомов). Роль поверхностных эффектов при этом во многом становится определяющей, и связанный с ними интеграл в уравнении (49) превращается в равноправного партнёра среди остальных членов уравнения.

**11.6. Дробная динамика открытых систем.** Вернувшись к уравнению Линдблада – основному уравнению динамики открытых систем (49) – опустим, для краткости, индексы 1 у всех членов и фазовую переменную  $x$  в аргументах плотности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf + \int_{-\infty}^t Q(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (50)$$

Выразив операторную функцию  $Q(t)$  через её трансформанту Меллина

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} t^{-s} \bar{Q}(s) ds, \quad \sigma = \text{Re } s,$$

подставим это выражение в интегральный член уравнения (50):

$$\int_{-\infty}^t Q(t - t') f(t') dt' = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\Gamma(1 - s)}{2\pi i} \bar{Q}(s),$$

а

$$I_t^{1-s} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - s)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t - \tau)^s}$$

– интеграл комплексного порядка  $\mu = 1 - s$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = Lf(t) + \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds,$$

содержащему оператор, который можно интерпретировать как интегральный оператор с *операторно-распределённым* комплексным порядком. Переход от интеграла к дробной производной можно осуществить, скажем, регуляризацией по Адамару (выделением конечной части при  $\mu < 0$ ).

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: в отличие от замкнутой гамильтоновой системы, управляемой дифференциальным уравнением целого порядка, её подсистема управляется интегродифференциальным уравнением дробного (распределённого по контуру в комплексной плоскости) порядка. Именно спектральная оператор-функция и определяет специфику кинетики открытой системы этого класса, и важное, на наш взгляд, направление динамики открытых систем заключается в развитии математического аппарата, необходимого для вычисления и аппроксимации спектральной функции [56].

### Заключение

В заключение приведем пример физического обоснования дробно-дифференциальной модели высокоэластичных полимерных тел, данной в работе Г.Л. Слонимского [57], в котором чётко прослеживается неразложимость рассматриваемого процесса на сумму упругого и вязкого компонентов. Отмечая, что важнейшей особенностью, отличающей высокоэластичную деформацию от деформаций обычных упругих тел, «является настолько ярко выраженный комплекс релаксационных явлений, что применение законов Гука или любой другой зависимости между напряжениями и деформациями, не учитывающей временных режимов механических взаимодействий, оказывается невозможным даже в грубом приближении». Во многих работах запаздывание деформации связывалось с наличием внутреннего трения и строились модели упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью. Однако для количественного или хотя бы полуколичественного описания деформации высокоэластичных тел потребовалось бы построение весьма сложных механических моделей, состоящих из большого числа различных пружин и различных демпферов. Учёт молекулярной динамики аморфных полимеров, согласно которой релаксационные процессы в них связаны с медленными процессами перегруппировок длинных и гибких молекул и клубков (кластеров) таких молекул, проявляющихся в отставании изменения деформаций от изменения напряжений. Вследствие исключительно большой длины цепной молекулы одновременное передвижение всех её отдельных частей (сегментов) при деформации невозможно, так как необходимая для преодоления межмолекулярных взаимодействий энергия намного превышает энергии химических связей. Движение такой молекулы осуществляется последовательным движением её сегментов, возможным вследствие гибкости высокоэластичной молекулы. Изучив закономерности движения сегментов, можно понять законы перемещения цепных молекул, изменения их формы и, в конечном итоге, законы деформации высокоэластичных тел. Согласно Г.Л. Слонимскому, новый путь определения законов деформации высокоэластичных тел заключается в отказе от представления о высокоэластичности как результате суммирования упругости и внутреннего трения. Основание такого отказа видится в редком отличии высокоэластичности от упругости обычных тел низкими (на 2–3 порядка ниже обычных) значениями модулей упругости, громадными величинами (до 1000 % и выше) обратимых деформаций, обратными знаками тепловых эффектов деформации и температурного модуля упругости. Отличие это Г.Л. Слонимский объясняет тем, что высокоэластичная деформация обусловлена лишь изменением формы гибких длинных цепных молекул полимерных веществ без изменения энергии их (или их подвижных частей-сегментов) взаимодействия. При изотермической высокоэластичности внутренняя энергия полимерного тела не изменяется, и вся работа деформации превращается в тепло, поэтому сопротивление тела деформации обусловлено только уменьшением энтропии. Таким образом, высокоэластичную деформацию следует рассматривать как самостоятельный тип обратимой деформации и не пытаться разлагать её на упругую и вязкую составляющие. Математическим символом такой самостоятельности и пред-

ставляется Г.Л. Слонимскому как дробная производная, «которая сочетает многие черты упругой и пластической деформации, но не является их комбинацией».

Вернёмся, в заключение, к проблеме турбулентной диффузии, от которой, на первый взгляд, мы отвлеклись, рассуждая об открытых системах, о том, каким образом открытость системы (точнее, её связь с окружением) вызывает на сцену дробно-дифференциальные «духи». Для этого нам достаточно понять причину запаздывания. Физически она связана с замедленным (диффузионного типа) возвращением из окружающей среды аддитивных характеристик (кинетической энергии, импульса) ОС, переданных туда в начальный период движения. В случае же описания турбулентной диффузии, расщепление фазовых координат на молекулярную и турбулентную составляющие вполне можно интерпретировать как разделение системы на две подсистемы со всеми вытекающими последствиями. Но это – тема уже другой работы.

*Автор благодарен профессору А.Ю. Захарову (Великий Новгород) за прочтение рукописи и существенные замечания, предотвратившие погрешности в списке литературы.*

### **Библиографический список**

1. Рутман Р.С. О физических интерпретациях фрактального интегрирования и дифференцирования // ТМФ. 1995. Т. 105, № 3. С. 393–404.
2. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т. 173. С. 847–876.
3. Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // УФН. 2009. Т. 179. С. 1079–1104.
4. Учайкин В.В. Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // УФН. 2013. Т. 183. С. 1175–1223.
5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.
6. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Vol's I–II, Springer Berlin, НЕР Beijing, 2013.
7. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkungen // Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. 1874. Vol. 70, no. 2. P. 275–306.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
9. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
10. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
11. Valanis K.C. and Lee C.F. Endochronic theory of cyclic plasticity with application. *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, pp. 367–374.
12. Blatt J.M. An alternative approach to the ergodic problem // Progress in Theoretical Physics. 1959. Vol. 22. P. 745–756.
13. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 1994. Vol. 19. P. 217–249.
14. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 1994. Vol. 19. P. 250–289.
15. Maugin G. The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors (An Introduction). World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1999.
16. Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies // Physics. 1936. Vol. 7. P. 311–317.

17. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика. 1948. т. XII. С. 251–260.
18. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Vol. 90. no. 3. P. 354–368.
19. Hilfer R. Classification theory for anequilibrium phase transitions // Phys Rev E. 1993. Vol. 48. P. 2466–2475.
20. Hilfer R. Fractional time evolution // In Applications of Fractional Calculus in Physics / Ed.R. Hilfer. World Scientific, Singapore, 2000. P. 87–131.
21. Lukashchuk S.Yu. Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation // Cent. Eur. J. Phys. 2013. Vol. 11, no. 6. P. 740.
22. Kwok Sau Fa. A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach // Physica A. 2005. Vol. 350. P. 199–206.
23. Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Enck T., Clarke T. Dynamics of the fractional oscillator // Physica A. 2001. Vol. 297. P. 361–367.
24. Ryabov Ya.E. and Puzenko A. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. 184201.
25. Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K. Fractional Newtonian mechanics // Cent. Eur. J. Phys. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 120–125.
26. Слэзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.
27. Boussinesq V.J. Sur la resistance quoppose un fluide indefini au repose... // Compt. Rend. de l'Academ. des Sci. 1885. Vol. 100. P. 935–937.
28. Basset A.B. Treatise on Hydrodynamics 2., Deighton, Bell and Co., Cambridge, UK, 1988.
29. Zener C.M. Anelasticity of metals // Suppl. Nuovo Cimento. 1958. Vol. 7. P. 544–568.
30. Учайкин В.В., Сибатов Р.Т. Дробно-дифференциальная кинетика дисперсионного переноса как следствие его автомодельности // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. P. 584–588.
31. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Solids, World Scientific, 2013.
32. Ландау Л.Д., Lifshits E.M. Механика. М.: Наука, 1965.
33. van Hove L. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order // Physica. 1957. Vol. 23. P. 441–480.
34. Prigogine I., Resibois P. On the kinetics of the approach to equilibrium // Physica. 1961. Vol. 27. P. 629–646.
35. Brout R., Prigogine I. Statistical mechanics of irreversible processes // Physica. 1956. Vol. 22. P. 35–47, 263–272, 621–636.
36. Резибуа П., Де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980.
37. Zwanzig R. Nonequilibrium Statistical Mechanics. New York: Oxford University Press, 2001.
38. Монролл Э.В. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. М., 1962.
39. Честер Дж. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. М., 1962.
40. Олдер Б. Дж., Алли У.Е. В сб.: Физика за рубежом 86. М.: Мир, 1986. С. 52.
41. Richardson L.F. Atmospheric diffusion on a distance-neighbor graph // Proc. Roy Soc. London, Ser A. 1926. Vol. 110. P.709–737.
42. Колмогоров А.Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 16–18.



43. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // ДАН СССР. 1941. Vol. 32. С. 22–24.
44. Jullien M.C., Paret J., Tabeling P. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 2872–2875.
45. Tchen C.M. Diffusion of particles in turbulent flow // Advances in Geophysics. 1959. Vol. 9. P. 165–174.
46. Heisenberg W. Zur Statistischen Theorie der Turbulenz // Zeitschrift fuer Physik. 1948. Vol.124. P. 628–657.
47. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть I. М.: Наука, 1965; Часть II. М.: Наука, 1967.
48. Shlesinger M., Klafter J., West B. Levy walks with applications to turbulence and chaos // Physica. 1986. Vol. 140A. P. 212–218.
49. Schönfeld J.C. Integral diffusivity // Journal of Geophysical Research. 1962. Vol. 67, no. 8. P. 3187–3199.
50. Tchen C.M. Transport processes as foundations of the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence // Phys Rev. 1954. Vol. 93, no. 1. P. 4–14.
51. Учайкин В.В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб: Лань, 2016.
52. Uchaikin V.V. On time-fractional representation of an open system response // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19, no. 5. P. 1306–1315.
53. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002.
54. Lindenberg K., West B.J. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, Wiley, VCH Publishers, New York, 1990.
55. Di-Ventra M. Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.
56. Учайкин В.В. О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы // Научные ведомости Белгородского университета. Серия: Математика. Физика. 2014. Т. 25(196), вып. 37. С. 58–67.
57. Слонимский Г.Л. О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.

## References

1. Rutman R.S. On physical interpretations of fractional integration and differentiation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1995, vol. 105, no. 3, pp. 1509–1519.
2. Uchaikin V.V. Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws. *Physics–Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821.
3. Sibatov R.T., Uchaikin V.V. Fractional differential approach to dispersive transport in semiconductors. *Physics–Uspekhi*, 2009, vol. 52, no. 10, pp. 1019–1043.
4. Uchaikin V.V. Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion. *Physics–Uspekhi*. 2013. vol. 56, no. 11, pp. 1074–1119.
5. Uchaikin V.V. The Method of Fractional Derivatives. Ulyanovsk: «Artishok», 2008 (in Russian).
6. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol's I–II, Springer Berlin, НЕР Beijing, 2013.
7. Boltzmann L. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen. *Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss.* 1874, vol.70, no. 2, pp. 275–306.

8. Volterra V. Lectures in the Mathematical Theory of the Struggle for Existence. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
9. Volterra V. Theory of Functionals of Integral and Integro-Differential Equations, Dover, New York, 1959.
10. Rabotnov Y.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
11. Valanis K.C. and Lee C.F. Endochronic theory of cyclic plasticity with application. *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, pp. 367–374.
12. Blatt J.M. An alternative approach to the ergodic problem. *Progress in Theoretical Physics*, 1959, vol. 22, pp. 745–756.
13. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1994, vol. 19, pp. 217–249.
14. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1994, vol. 19, pp. 250–289.
15. Maugin G. The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors (An Introduction). World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1999.
16. Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies. *Physics*, 1936, vol. 7, pp. 311–317.
17. Gerasimov A.N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3. pp. 251–260 (in Russian).
18. Nigmatullin R.R. Fractional integral and its physical interpretation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, no. 3, pp. 242–251.
19. Hilfer R. Classification theory for anequilibrium phase transitions. *Phys Rev E.*, 1993, vol. 48, pp. 2466–2475.
20. Hilfer R. Fractional time evolution, In Applications of Fractional Calculus in Physics. R. Hilfer (ed.), World Scientific, Singapore, 2000, pp. 87–131.
21. Lukashchuk S.Yu. Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation. *Cent. Eur. J. Phys.*, 2013, vol. 11, no. 6, p. 740 .
22. Kwok Sau Fa. A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach. *Physica A*, 2005, vol. 350, pp. 199–206.
23. Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Enck T., Clarke T. Dynamics of the fractional oscillator. *Physica A*, 2001, vol. 297, pp. 361–367.
24. Ryabov Ya.E. and Puzenko A. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation. *Phys. Rev. B*, 2002, vol. 66, 184201.
25. Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K. Fractional Newtonian mechanics *Cent. Eur. J. Phys.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 120–125.
26. Slezkin N.A. Dynamics of Viscous Incompressible Fluid, Moscow, Gostekhizdat, 1955 (in Russian).
27. Boussinesq V.J. Sur la resistance quoppose un fluide indefini au repose...*Compt.Rend.de l'Academ. des Sci.* 1885, vol. 100, pp. 935–937.
28. Basset A.B. Treatise on Hydrodynamics 2.,Deighton, Bell and Co., Cambridge. UK, 1888.
29. Zener C.M. Anelasticity of metals. *Suppl. Nuovo Cimento*, 1958, vol. 7, p. 544.

30. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional differential kinetics of dispersive transport as the consequence of its self-similarity. *JETP Letters*, 2007, vol. 86, no. 8, pp. 512–516.
31. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. *Fractional Kinetics in Solids*, World Scientific, 2013.
32. Landau L.D., Lifschitz E.M. *Fluid Mechanics*. New York: Pergamon Press, 1987.
33. van Hove L. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order. *Physica*, 1957, vol. 23, pp. 441–480.
34. Prigogine I., Resibois P. On the kinetics of the approach to equilibrium. *Physica*, 1961, vol. 27, pp. 629–646.
35. Brout R., Prigogine I. Statistical mechanics of irreversible processes, *Physica*, 1956, vol. 22, pp. 35–47, 263–272, 621–636.
36. Resibua P., De Lener M. *Classical Kinetic Theory of Liquids and Gases*. Moscow, Mir, 1980 (in Russian).
37. Zwanzig R. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. New York: Oxford University Press, 2001.
38. Montroll E. W. In *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, ed. E. Cohen, North-Holland, Amsterdam, 1962.
39. Chester G.V. The theory of irreversible processes, *Rep. on Progress in Physics*, 1963, vol. 26, p. 411.
40. Alder B.J., Alley W.E. Generalized Hydrodynamics, *Physics Today*, 1984, vol. 37, pp. 56–83.
41. Richardson L.F. Atmospheric diffusion on a distance-neighbor graph. *Proc. Roy Soc. London, Ser A*, 1926, vol. 110, pp. 709–737.
42. Kolmogorov A.N. Scattering of energy for locally isotropic turbulence. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1941, vol. 32, pp. 16–18 (in Russian).
43. Obukhov A.M. Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1941, vol. 32, pp. 22–24 (in Russian).
44. Jullien M.C., Paret J., Tabeling P. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 82, p. 2872.
45. Tchen C.M. Diffusion of Particles in Turbulent Flow. *Advances in Geophysics*, 1959, vol. 9, pp. 165–174.
46. Heisenberg W. Zur Statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift fuer Physik* 1948, vol. 124, pp. 628–657.
47. Monin A.S. Yaglom A.M. *Statistical Hydromechanics*. Part I. M.: Nauka, 1965; Part II. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
48. Shlesinger M., Klafter J., West B. Levy walks with applications to turbulence and chaos. *Physica*, 1986, vol. 140A, pp. 212–218.
49. Schönfeld J.C. Integral diffusivity. *Journal of Geophysical Research*, 1962, vol. 67, no. 8, pp. 3187–3199.
50. Tchen C.M. Transport processes as foundations of the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence. *Phys Rev.*, 1954, vol. 93, no. 1, pp. 4–14.
51. Uchaikin V.V. *Mechanics. Fundamentals of Continuum Mechanics*. SPb, Lan, 2016 (in Russian).
52. Uchaikin V.V. On time-fractional representation of an open system response. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 5, pp. 1306–1315.
53. Klimontovich Yu.L. *Introduction to the Physics of Open Systems*. M., Janus-K, 2002 (in Russian).

54. Lindenberg K., West B.J. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, Wiley, VCH Publishers, New York, 1990.
55. Di-Ventra M. Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.
56. Uchaikin V.V. On the fractional-differential Liouville equation as an equation of dynamics of an open system. *Scientific bulletins of the Belgorod University, series: Mathematics. Physics*, 2014, vol. 25(196), no. 37, pp. 58–67 (in Russian).
57. Slonimsky G.L. On the law of deformation of highly elastic polymer bodies. *Dokl. AN SSSR*, 1961, vol. 140, no. 2, pp. 343–346 (in Russian).



*Учайкин Владимир Васильевич* – родился в Барнауле (1941), окончил Томский политехнический институт (1964). Защитил кандидатскую диссертацию (НИИ АР, Мелекес, 1969) и докторскую диссертацию (Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО АН СССР, 1989). Автор (соавтор) более 400 научных работ, в числе которых 7 монографий, опубликованных крупнейшими зарубежными научными издательствами (Springer, World Scientific и др.), учебного пособия с грифом Минвуза и уникального учебника по механике с грифом УМО России, статей по проблемам науки и образования, научно-популярных статей. Заслуженный работник высшей школы (2002). Заслуженный деятель науки и техники Ульяновской области (2013). Ветеран труда. Почетный гражданин Ульяновской области.

Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42  
 Ульяновский государственный университет  
 E-mail: vuchaikin@gmail.com