



УДК 517.9, 621.372

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В АНСАМБЛЕ ОТОБРАЖЕНИЙ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 31.10.2017, после доработки 24.02.2018

Цель. Целью работы является исследование закономерностей фазовой мультистабильности в ансамбле колебательных систем с нелокальными связями при изменении силы и дальности действия связей между элементами ансамбля, а также описание этих закономерностей с точки зрения пространственных спектров. **Метод.** Исследование проводилось посредством численного моделирования ансамбля логистических отображений, расчета разностей фаз между колебаниями подсистем, определения пространственных фазовых кластеров и их спектрального анализа. При этом система связей ансамбля рассматривалась как цифровой фильтр, с частотной характеристикой, зависящей от параметров связей. **Результаты.** Проведенные исследования показывают, что при слабых дальнедействующих связях ансамбль отображений с бифуркациями удвоения периода демонстрирует развитую фазовую мультистабильность. С ростом силы связей и радиуса их действия число режимов монотонно уменьшается до тех пор, пока при небольших размерах ансамбля мультистабильность не исчезает полностью. При этом ансамбль переходит к глобальному режиму синфазной синхронизации. Обнаружено, что зависимость числа мод от силы связей носит выраженный ступенчатый характер. Вблизи нуля существует конечный диапазон значений параметра связи, где наблюдается максимально возможное число устойчивых мод. Этот диапазон одинаков для ансамблей с разным дальнедействием. Затем, с ростом силы связей наблюдается скачкообразное уменьшение числа орбит, причем порядок их исчезновения определяется характерной длиной пространственных кластеров. Показано, что порядок «исчезновения» режимов с различными характерными пространственными масштабами кластеров можно рассматривать как результат пространственной фильтрации, при которой система связей работает как цифровой фильтр. При этом порядок исчезновения кластеров определяется формой характеристики пространственного фильтра связей. **Обсуждение.** Из всех полученных результатов наиболее интересным представляется обнаруженный эффект скачкообразного изменения числа аттракторов, происходящий при очень малом изменении силы связей. Его можно объяснить, если рассматривать систему связей ансамбля как пространственный фильтр, полоса пропускания которого зависит от величины и дальности действия связей. Использование спектральных методов для анализа динамики систем со сложной топологией связи представляется перспективным направлением, в том числе и для исследования синхронизации и мультистабильности в хаотических осцилляторах и отображениях.

Обнаруженные закономерности обобщают результаты, известные для ансамблей осцилляторов с локальными связями. Они в значительной части могут быть применены

к ансамблям автоколебательных систем с непрерывным временем, а также к явлению мультистабильности в системах с хаотической динамикой, наблюдающихся в связанных системах с удвоениями периода.

Ключевые слова: нелинейные колебания, ансамбли нелинейных осцилляторов, мультистабильность, спектры.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

Образец цитирования: Шабунин А.В. Мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 5–23. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

MULTISTABILITY OF PERIODIC ORBITS IN ENSEMBLES OF MAPS WITH LONG-RANGE COUPLINGS

A. V. Shabunin

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru
Received 31.10.2017, revised 24.02.2018

Aim. The aim of the investigation is to study the regularities of phase multistability in an ensemble of oscillatory systems with non-local couplings in dependence of strength and radius of the couplings, as well as to describe them from the point of view of the spatial spectrum. **Method.** Study has been carried out by means of numerical simulation of ensemble of logistic maps, by calculation of the phase differences between the oscillations in the subsystems, which define spatial phase clusters and analyze their spectra. The structure of the couplings has been considered as a digital filter whose frequency characteristic depends on the couplings parameters. **Results.** The research has revealed that the ensemble of maps with period-doubling bifurcations demonstrates developed phase multistability at weak couplings. While the couplings strength and radius grow, the number of coexisting regimes decrease monotonically. Then, if the ensemble is not too large, the multistability is changed by the globally stable regime of in-phase synchronization. The plot of the number of attractors in depending of the coupling strength has the form of steps. At small coupling there is a finite range where the number of the regimes reaches its maximal value and this range practically not depends on the radius of the couplings. Then, while the couplings strength increases, the number of attractors decreases abruptly from step to step. The order of the attractors disappearance is determined by their spatial cluster structure. It can be explained by considering this process as a result of spatial filtering, when the system of the ensemble couplings operates as a digital filter. The wavelength characteristic of the last defines the order of disappearance of clusters. **Discussion.** The most interesting result is the discovered effect of a jump-like change of the quantity of the attractors with the strength of the couplings. It can be explained if we consider the system of couplings as a spatial filter, the bandwidth of which depends on the couplings parameters. The use of methods of spatial spectra seems to give promising perspectives for the analysis of dynamics of networks with complex topology, including the study of synchronization and multistability in chaotic oscillators and maps. The discovered regularities generalize the results known for ensembles oscillators with local couplings. They are also applicable to ensembles of self-oscillating systems with continuous time, as well as to the phenomenon of multistability in systems with chaotic dynamics and period-doubling bifurcations.

Keywords: nonlinear oscillations, ensembles of oscillators, multistability, spectra.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

References: Shabunin A.V. Multistability of periodic orbits in ensembles of maps with long-range couplings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 5–23. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

Введение

В последние годы, наряду с изучением ансамблей колебательных систем с локальными связями, значительный интерес привлекают к себе сети с более сложной топологией. Одним из примеров таких сетей можно считать системы с *дальнодействующими связями*, когда взаимодействуют не только ближайшие соседи, но и удаленные друг от друга элементы ансамбля. Интерес к ансамблям с дальнодействующими связями подогревается развитием современных инфокоммуникационных технологий, а также исследованиями в области биологии, нейрофизиологии и социологии. В подобных системах может наблюдаться тот же круг явлений, что и в локально связанных сетях, например: синхронизация периодических и хаотических колебаний [1, 2], бегущие волны [3], образование диссипативных пространственных структур [4–6]. В последние годы большой интерес к динамике ансамблей с дальнодействующими связями проявляется в связи с обнаружением в них особого вида кластерных структур, получивших название *химер* [7–11].

Подобно локально связанным системам ансамбли с дальнодействующими связями демонстрируют развитую мультистабильность [12–15]. Мультистабильность – одно из ключевых свойств нелинейных динамических систем, означающее сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Учет мультистабильности, а также возможность управлять ею, важны как при фундаментальных исследованиях систем высокой размерности, так и при их практическом использовании.

В настоящей работе рассматривается специальный вид мультистабильности, характерный для цепочек слабо связанных осцилляторов – *фазовая мультистабильность* [16]. Она проявляется как сосуществование множества аттракторов, колебания которых одинаковы по форме, но отличаются временными (фазовыми) сдвигами между осцилляциями в соседних точках ансамбля

$$x_{i+1}(t) = x_i(t - \tau) \quad (1)$$

(здесь i – номер осциллятора в ансамбле, τ – величина задержки по времени). Решения (1) представляют собой либо синфазные колебания всего ансамбля (при $\tau = 0$), либо бегущие с постоянной фазовой скоростью вдоль цепочки осцилляторов волны [16–18]. При простой форме колебаний набор бегущих волн в конечномерном ансамбле ограничен [18]. Сложная временная динамика, например, каскад бифуркаций удвоения периода, может приводить к *развитой фазовой мультистабильности* [19, 20], при которой число сосуществующих аттракторов многократно увеличивается после каждой бифуркации удвоения периода и становится бесконечно большим на пороге перехода к хаосу. Явление развитой фазовой мультистабильности было изучено для ансамблей осцилляторов и отображений с локальными связями: определены его бифуркационные механизмы [21, 22], закономерности эволюции амплитудных и фазовых спектров [23], закономерности расположения бассейнов притяжения [24]. Существует ли развитая фазовая мультистабильность при дальнодействующих связях? Как радиус действия связей и их величина влияют на это явление? Данные вопросы исследуются в настоящей работе.

1. Исследуемая система

В качестве модели выберем наиболее простую систему, демонстрирующую каскад бифуркаций удвоения периода – кольцо из N логистических отображений

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{j=-L}^L [f(x_{i+j}(n)) - f(x_i(n))]. \quad (2)$$

Здесь $x_i(n)$ – динамическая переменная, зависящая от дискретного времени $n \in Z$ и пространственной координаты $i \in Z$, заданной на отрезке $[1 : N]$; $f(x) = \alpha x(1-x)$ – функция, задающая динамику одиночного логистического отображения, зависящая от параметра α ; γ – сила связей между элементами ансамбля, $L = 1, 2, \dots, N/2$ – их максимальное дальное действие (радиус связей). Структура связей ансамбля изображена на рис. 1.

Динамика одиночного логистического отображения хорошо известна: с ростом параметра α оно демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периодических орбит, завершающийся переходом к хаосу; в закритической области наблюдается развитие хаотической динамики через бифуркации объединения лент хаотических аттракторов. При объединении отображений в ансамбль их временная динамика не претерпевает существенных изменений, однако, в отличие от одиночного отображения,

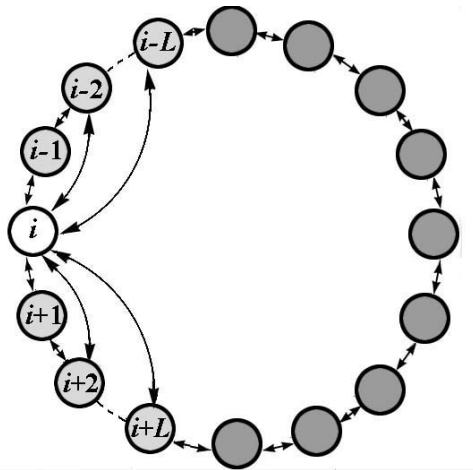


Рис. 1. Структура связей системы (2)

Fig. 1. Structure of couplings of system (2)

ансамбль демонстрирует мультистабильность – сосуществование множества сходных друг с другом колебательных режимов, различающихся *пространственными профилями* (или *пространственными снимками*) – распределениями значений x по пространственной координате i , получаемыми в некоторый фиксированный момент времени. Число мультистабильных состояний, а также форма соответствующих профилей определяются как типом колебаний в каждом из осцилляторов, так и параметрами связей ансамбля L и γ . Рассмотрим эти вопросы для регулярных режимов, то есть для периодических орбит.

2. Фазовая мультистабильность периодических орбит

Рассмотрим отдельный несвязанный элемент ансамбля в режиме M -периодической орбиты X , которая представляет собой упорядоченный набор из M точек $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}\}$, циклически сменяющих друг друга под действием отображения:

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}), \quad k = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

$$x^{(1)} = f(x^{(M)}).$$

Орбите X соответствует M разных траекторий $\{X^{(k)}\}_{k=1}^M$, отличающихся выбором стартовой точки $x(0) \in X$. В частотном представлении каждой из этих траекторий соответствует функция спектральной плотности $F(f)$, представляющая собой эквидистантный набор гармоник с базовой частотой $f_0 = 1/M$:

$$F(f) = \sum_{i=0}^{M/2} C_i \delta(f - i f_0), \quad (4)$$

где $\delta(f)$ – дельта-функция, C_i – комплексная амплитуда i гармоники ($i = 1, 2, \dots$). По аналогии с периодическими колебаниями осцилляторов введем для каждой траектории орбиты $X^{(k)}$ понятие *начальной фазы* $\varphi^{(k)}$. Определим ее как фазу базовой (первой) гармоники дискретного фурье-спектра: $\varphi = \arctan(\text{Im}(C_1)/\text{Re}(C_1))$. В силу свойства (3) начальные фазы всех траекторий орбиты связаны простым соотношением:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(m)} + 2\pi(k - m)f_0, \quad (5)$$

где $\varphi^{(k)}$ – начальная фаза траектории, стартующей из точки $x^{(k)}$.

Перейдем теперь от отдельного элемента к ансамблю в целом. При $\gamma = 0$ колебания в i элементе ансамбля могут характеризоваться любой из M начальных фаз $\varphi^{(k)}$, так что в кольце из N отображений возможны M^N различных инвариантных M -периодических траекторий, соответствующих M^{N-1} орбитам. Каждая из этих орбит характеризуется своим набором начальных фаз $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$. Для удобства анализа вместо значений фаз будем рассматривать их разности по отношению к фазе опорного (первого) элемента:

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_1.$$

В силу выражения (5) каждое из $\Delta\varphi_i$ кратно $2\pi f_0$: $\Delta\varphi_i = 2\pi f_0 s_i$, где $s_i = 0, 1, \dots, M-1$ – целочисленный множитель ($s_1 \equiv 0$). Таким образом, полный набор множителей $\{s_1, \dots, s_N\}$, называемый далее *сигнатурой*, однозначно идентифицирует пространственную структуру выбранного аттрактора и может быть использован для его маркировки. В дальнейшем будем обозначать M -периодическую орбиту с сигнатурой s_1, \dots, s_N как $MC^{s_1, s_2, \dots, s_N}$ (C обозначает Cycle)¹. На рис. 2 показаны моментальные снимки некоторых аттракторов в ансамбле из десяти отображений с разными сигнатурами: (a) $2C^{0000000000}$, (b) $2C^{0101010101}$, (c) $2C^{0111010111}$ и (d) $4C^{0130210321}$, где состояния в момент времени $n = 0$, отображены сплошными, а в последующие $(M - 1)$ моментов – штриховыми линиями.

Легко заметить, что сигнатура аттрактора есть не что иное, как M -ичная кодовая последовательность, построенная по пространственному профилю аттрактора. Использование сигнатур позволяет опустить малосущественные особенности динамики, оставив для анализа пространственную структуру рассматриваемого колебательного режима.

¹Подобная система обозначения мультстабильных состояний была использована в работах [19,20]. Здесь используется ее модифицированный аналог.

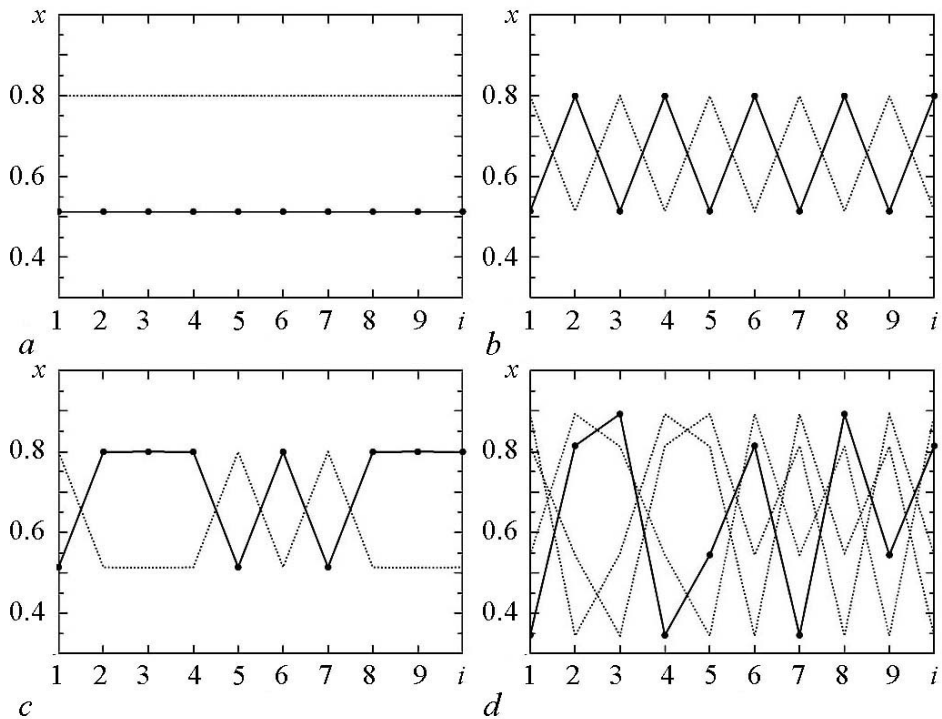


Рис. 2. Пространственные профили (мгновенные снимки) для периодических орбит периода два (*a*, *b*, *c*) и четыре (*d*)

Fig. 2. Spatial snapshots of orbits with periods two (*a*, *b*, *c*) and four (*d*)

3. Эволюция фазовой мультистабильности орбит периода два

Как было отмечено выше, при слабой связи число сосуществующих периодических аттракторов (QA) будет определяться как количеством точек орбиты M , так и размером ансамбля N . В случае орбиты периода один фазовая мультистабильность отсутствует, и в ансамбле реализуется единственный глобально устойчивый аттрактор. Таким образом, простейшим режимом, для которого наблюдается фазовая мультистабильность, является орбита периода два. Выберем значение параметра $\alpha = 3.2$, соответствующее данному типу колебаний, и исследуем для него эволюцию мультистабильности в ансамбле (2).

При нулевой связи число аттракторов составляет 2^{N-1} . Рассмотрим, как изменится это значение при наличии взаимодействия и как оно зависит от величины и радиуса связей в ансамбле. Для расчета QA используем следующую методику.

- Создадим набор из P случайных начальных условий $\{\mathbf{x}_l(0)\}_{l=1}^P$, каждое из которых представляет собой N -вектор, с компонентами, равномерно распределенными в интервале $]0 : 1[$.
- Для каждого начального вектора $\mathbf{x}_l(0)$ получим соответствующий аттрактор, из которого выделим M конечных точек:
 $\mathbf{X}_l = \{\mathbf{x}_l(n_0 + 1), \dots, \mathbf{x}_l(n_0 + M)\}$ (n_0 – длительность переходного процесса).
- Определим, сколько из полученных орбит \mathbf{X}_l соответствуют разным аттракторам: отнесем \mathbf{X}_l и \mathbf{X}_m к разным аттракторам, если расстояние между ними $d(\mathbf{X}_l, \mathbf{X}_m)$ больше некоторого порогового значения ε .

В ходе компьютерных экспериментов были проведены исследования зависимости QA от L и γ в ансамбле из десяти отображений при $P = 2000$ и $n_0 = 5000$. Результаты расчетов представлены на рис. 3 в виде трехмерного графика $QA(L, \gamma)$.

Из анализа полученных результатов можно заключить следующее.

- Максимальное число аттракторов в ансамбле достигается при нулевой связи и сохраняется вплоть до порогового значения γ_m , величина которого практически не зависит от радиуса связей ($\gamma_m \simeq 0.05$ для всех L).
- При превышении порога рост γ сопровождается уменьшением числа аттракторов; данный процесс завершается, когда в фазовом пространстве остается единственный глобально устойчивый аттрактор, соответствующий режиму синфазных колебаний.
- Уменьшение числа аттракторов с ростом γ происходит тем быстрее, чем больше радиус связей L .

Исследуем зависимости $QA(\gamma)$ при разных L более подробно. Введем в рассмотрение индекс мультистабильности η как отношение текущего числа аттракторов к максимальному:

$$\eta = \frac{QA}{M^{N-1}}.$$

На рис. 4 приведены графики $\eta(\gamma)$ для разных значений параметра дальности действия L . Сопоставление графиков позволяет заключить, что увеличение дальности действия ведет к более плавному, но в то же время, в среднем – к более быстрому спадаю индекса мультистабильности с ростом связи. В локально связанном ансамбле процесс разрушения мультистабильности происходит «скачками», а сама зависимость имеет выраженный ступенчатый характер (см. кривую l_1). При увеличении дальности действия ступенчатый характер сохраняется, однако ширина ступенек (за исключением первой) с ростом L сужается (линии $l_{2,3}$). Уменьшение числа аттракторов во всех рассмотренных случаях завершается появлением глобально устойчивого синфазного режима; при этом в ансамблях с большим дальностью действия переход к этому состоянию наблюдается при меньших значениях γ .

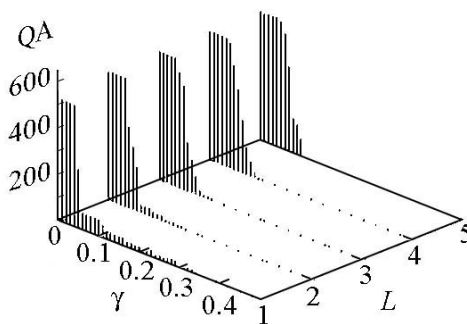


Рис. 3. Число сосуществующих устойчивых орбит периода два в ансамбле из десяти отображений в зависимости от силы и радиуса связей

Fig. 3. The number of stable orbits of period-two in the ten-maps ensemble in dependence of strength and radius of the couplings

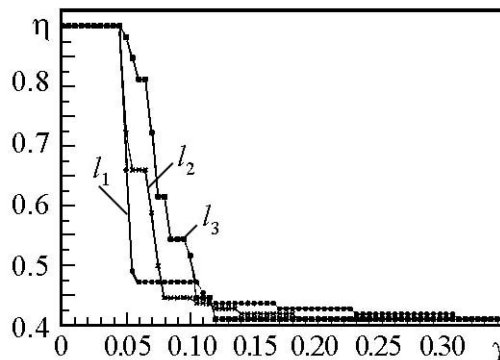


Рис. 4. Зависимость индекса мультистабильности η от параметра связи γ при $L = 1$ (l_1), 2 (l_2), 4 (l_3) в ансамбле из десяти отображений

Fig. 4. Dependence of multistability index η from coupling parameter γ at $L = 1$ (l_1), 2 (l_2), 4 (l_3) in the ten-maps ensemble

Проанализируем последовательность исчезновения аттракторов из фазового пространства системы (2) с точки зрения их пространственной структуры. Эту структуру удобно описывать в виде набора *фазовых кластеров*, под которыми мы будем понимать подмножества соседних элементов ансамбля $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}\}$ с одинаковыми значениями фаз. В сигнатуре аттрактора $MC^{s_1 \dots s_N}$ такому кластеру соответствует набор из m одинаковых идущих подряд индексов: $s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+m}$. Попробуем определить, как связана кластерная структура аттрактора с его устойчивостью, для чего исследуем, как меняется набор «разрешенных» длин фазовых кластеров с ростом связи.

Рассмотрим сначала изменения в кластерной структуре аттракторов при локальных связях ($L = 1$). В интервале $0 \leq \gamma < \gamma_m$ в пространственных профилях орбит наблюдаются кластеры любой допустимой длины от $CL = 1$ до $CL = N/2$ (рис. 5, *a*). При $\gamma \simeq \gamma_m$ мы видим резкое падение индекса мультистабильности с $\eta = 1$ до $\eta \simeq 0.14$ (см. рис. 4), что сопровождается, как следует из рис. 5, *a*, исчезновением режимов, пространственная структура которых содержит кластеры единичной длины. Дальнейший рост связей при $\gamma \simeq 0.11, 0.167, 0.22$ приводит к последовательному исчезновению режимов с фазовыми кластерами длиной два, три и четыре. Наконец, при $\gamma \geq 0.31$ становятся неустойчивыми орбиты с длиной кластеров $N/2$, и в фазовом пространстве остается единственный глобально устойчивый режим синфазных колебаний.

В случае дальнедействующих связей ($L > 1$) общая тенденция к «разрушению» коротких кластеров сохраняется, но при этом изменяется порядок их исчезновения. При $L = 2$ сначала исчезают моды с кластерами длиной два ($\gamma \simeq 0.077$), затем –

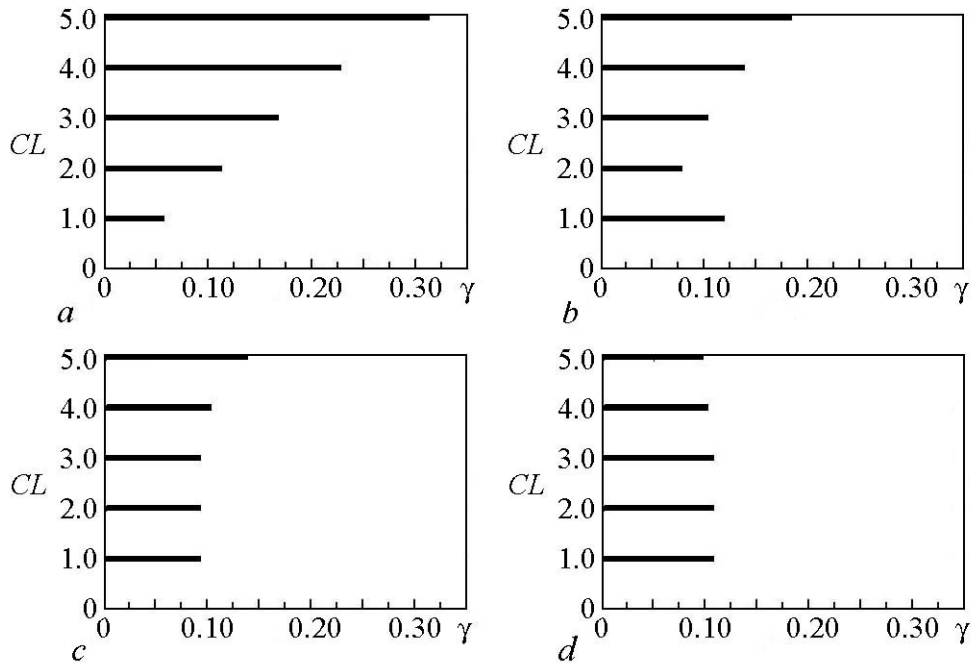


Рис. 5. Длины пространственно однородных кластеров (CL), наблюдаемых в ансамбле, в зависимости от γ при $L = 1$ (*a*), 2 (*b*), 3 (*c*) и 5 (*d*)

Fig. 5. Lengths of spatially homogeneous clusters (CL) in dependence of γ at $L = 1$ (*a*), 2 (*b*), 3 (*c*) and 5 (*d*)

три ($\gamma \simeq 0.1$), а уже потом – один, четыре и пять элементов ($\gamma \simeq 0.117, 0.138, 0.182$), соответственно (рис. 5, *b*). При $L = 3$ исчезновение кластеров длинами один, два и три происходит почти одновременно ($\gamma \simeq 0.092$), а затем, с небольшой задержкой при $\gamma \simeq 0.102$ исчезают кластеры длиной четыре и при $\gamma \simeq 0.138$ – длиной пять элементов (рис. 5, *c*). Аналогичные закономерности наблюдаются в полностью связанной сети ($L = 5$), где исчезновение кластеров любых длин, меньших $N/2$, происходит практически одновременно (рис. 5, *d*).

Таким образом, для каждого L существует свой набор пороговых значений γ_q , при переходе через которые наблюдается исчезновение аттракторов с фазовыми кластерами длиной q . Соответственно, система (2) работает как пространственный фильтр, позволяющий существовать структурам с определенными характерными пространственными масштабами и подавляющий структуры с другими характерными масштабами.

4. Фильтрующие свойства структуры связей

Рассмотрим систему (2) с точки зрения пространственной фильтрации. Для большей наглядности перепишем ее в форме

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j f(x_{i+j}(n)), \quad (6)$$

где $h_0 = 1 - \gamma$, $h_j = \gamma/(2L)$ ($j = \pm 1, \dots, \pm L$) – положительные константы. В формуле (6) каждый временной шаг можно разбить на два: нелинейное преобразование

$$x_i(n + \frac{1}{2}) = f(x_i(n))$$

и линейная свертка по пространственной координате

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j x_{i+j}(n + \frac{1}{2}).$$

Последнее уравнение можно интерпретировать как результат воздействия линейного цифрового фильтра порядка $2L + 1$ с импульсной характеристикой h_j на пространственную траекторию x_i . Частотная (волновая) характеристика такого фильтра представляет собой преобразование Фурье от импульсной характеристики h_j ; для указанных выше значений коэффициентов h_j она имеет следующий вид:

$$R(\bar{f}) = 1 - \gamma + \frac{\gamma}{L} \sum_{k=1}^L \cos(2\pi k \bar{f}). \quad (7)$$

Здесь $\bar{f} \in [0 : 0.5]$ – нормированная пространственная частота. Характерный вид функции (7), построенной для $\gamma = 0.3$ и $L = 10$, приведен на рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) пространственного фильтра имеет *лепестковую* структуру, подобную хорошо известной в радиофизике функции $\text{sinc}(x)$ с выраженным максимумом $R(0) = 1$ и осциллирующими «хвостами», спадающими по амплитуде и «приподнятыми» над осью абсцисс на некоторую постоянную величину ΔR ,

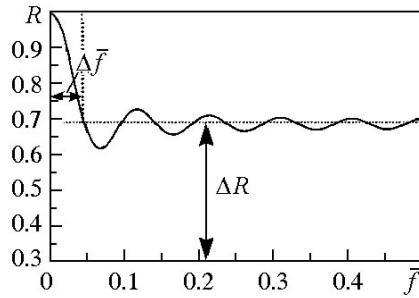


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика пространственного фильтра, образуемого системой связей, при $L = 10$ и $\gamma = 0.3$

Fig. 6. Amplitude-frequency characteristic of spatial filter formed by the system of couplings at $L = 10$ and $\gamma = 0.3$

и, с другой стороны, изменение пространственных профилей оставшихся режимов вследствие частотных искажений.

которая близка к $(1 - \gamma)$ при $L \gg 1$. Ширина основного лепестка $\Delta \bar{f}$, определяется параметром дальнего действия: $\Delta \bar{f} \simeq 1/(2L)$. Таким образом, связи между отображениями (2) действуют как пространственный фильтр нижних частот, ширина полосы пропускания которого определяется радиусом L , а возвышение «полосы пропускания» над «полосой заграждения» – силой связей γ . Результатом действия этого фильтра является, с одной стороны, подавление тех режимов, пространственные спектры которых выходят за пределы полосы пропускания фильтра,

5. Пространственная фильтрация орбит периода два

Рассмотрим изменения в кластерной структуре с точки зрения пространственной фильтрации. Для этого перейдем от пространственных профилей орбит к их пространственным спектрам мощности:

$$P_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_k(n) X_k^*(n), \quad (8)$$

где

$$X_k(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(n) \exp\left(-j \frac{2\pi i k}{N}\right)$$

– дискретное преобразование Фурье от точек орбиты, взятых как функция пространственной координаты². Для орбиты с пространственным периодом N спектр (8) – есть совокупность N гармоник на нормированных частотах $f_k = k/N$ ($k=0, 1, \dots, N-1$). В силу свойства симметрии дискретного преобразования Фурье относительно центральной частоты, значимыми из них является половина: от \bar{f}_0 до $\bar{f}_{N/2}$.

Амплитуды гармоник пространственного спектра определяются формой его профиля, а значит, и кластерной структурой орбиты. Наличие кластеров длиной q в профиле орбиты будет означать рост спектра в окрестности частоты $\bar{f}^{(q)} = 1/(2q)$. Например, профиль орбиты $2C^{0101000101}$ (рис. 7, *a*) содержит три фазовых кластера единичной длины. Соответственно, в пространственном спектре данной орбиты гармоника на частоте $\bar{f}^{(1)} = 0.5$ имеет максимальную амплитуду (рис. 7, *b*). Профиль орбиты $2C^{0011001101}$ (рис. 7, *c*) состоит из нескольких кластеров длиной два. В спектре орбиты это проявляется увеличением амплитуд второй и третьей гармоник, располагающихся слева и справа от характерной частоты $\bar{f}^{(2)} = 0.25$ (рис. 7, *d*).

²При расчете спектра используются центрированные сигналы, из которых удалена постоянная составляющая

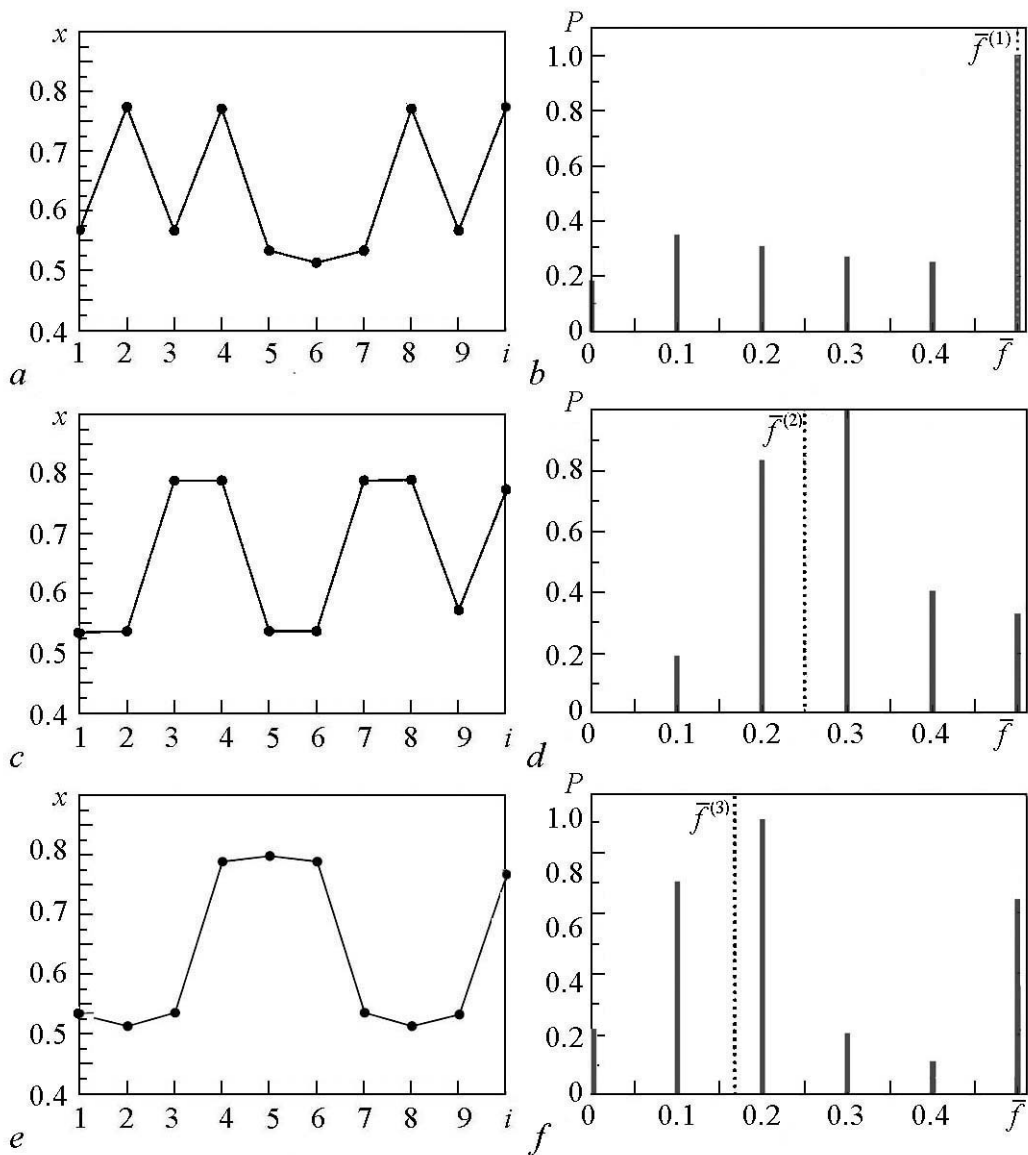


Рис. 7. Пространственные профили (слева) и спектры (справа) некоторых режимов: $2C^{0101000101}$ (a, b), $2C^{0011001101}$ (c, d) и $2C^{0001110001}$ (e, f); $L = 1, \gamma = 0.04$

Fig. 7. Spatial snapshots (left column) and spectra (right column) of some regimes: $2C^{0101000101}$ (a, b), $2C^{0011001101}$ (c, d) and $2C^{0001110001}$ (e, f); $L = 1, \gamma = 0.04$

Аналогично, наблюдается рост амплитуд гармоник вблизи частоты $\bar{f}^{(3)} = 0.167$ для орбиты $2C^{0001110001}$, профиль которой содержит кластеры длиной три (рис. 7, e, f) и т.д.

Рассмотрим, как соотносятся критические частоты кластеров с АЧХ пространственного фильтра. Для этого построим графики $R_\gamma(f)$ при критических значениях $\gamma = \gamma_q$ (см. рис. 5, a-d), на которых пунктирными линиями отобразим значения указанных характерных частот кластеров $\bar{f}^{(q)} = 1/(2q)$ ($q = 1, 2, \dots, 5$).

Начнем рассмотрение с локально связанного ансамбля ($L = 1$). В этом случае при любом γ АЧХ представляет собой монотонно затухающую функцию (рис. 8, a):

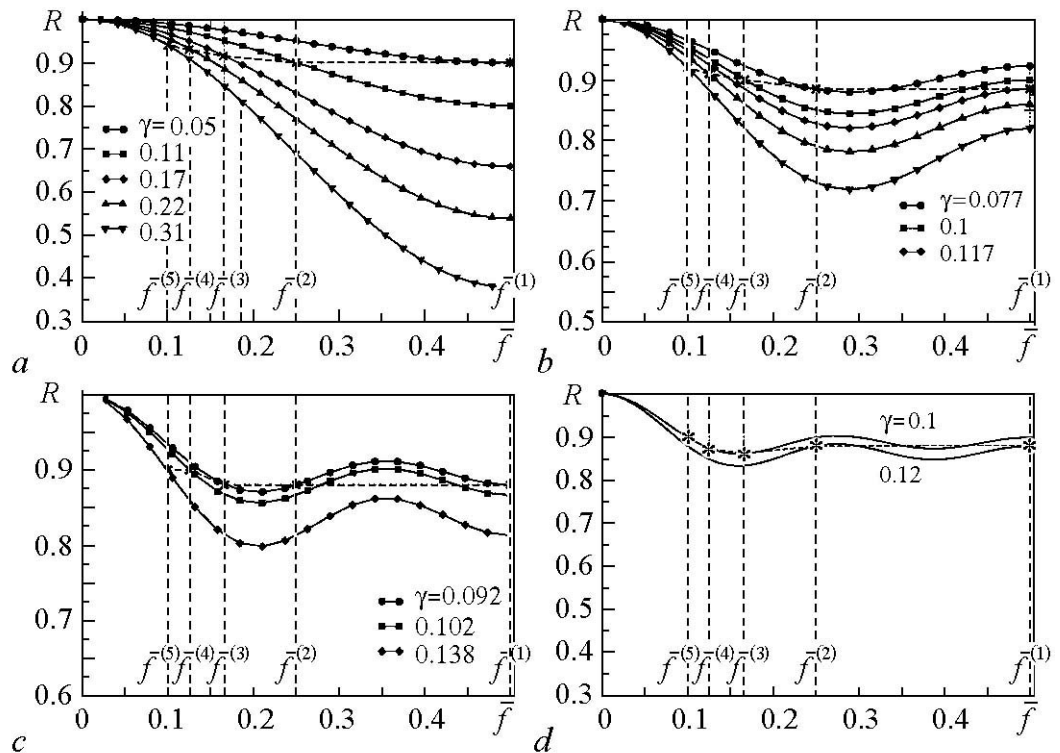


Рис. 8. АЧХ фильтра связей, построенные для пороговых значений γ , при которых происходит скачкообразное изменение числа сосуществующих орбит: $L = 1$ (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d); вертикальные пунктирные линии отмечают характерные частоты \bar{f}_q кластеров длиной q

Fig. 8. Amplitude-frequency characteristic of the coupling filter for the threshold couplings γ , at which there are abrupt changes of the number of orbits: $L = 1$ (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d); vertical dot lines mark the basic frequencies \bar{f}_q of q -clusters

коэффициент передачи фильтра достигает максимального значения на нулевой частоте и минимального значения для $\bar{f} = 0.5$. Соответственно, точки пересечения графика АЧХ с линиями характерных частот $\bar{f}^{(q)}$ будут упорядочены по возрастанию длин кластеров: $R_\gamma(\bar{f}^{(1)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(2)}) < \dots < R_\gamma(\bar{f}^{(5)})$, то есть в том же порядке, что наблюдался при численном исследовании изменения кластерной структуры режимов (см. рис. 5, a). Более того, как видно из рис. 8, a, точки пересечения графиков $R_{\gamma_q}(\bar{f})$ с линиями базовых частот $\bar{f}^{(q)}$ (отмечены знаками \times) находятся почти на одном уровне; для наглядности эти точки соединены штриховой линией. Таким образом, значения коэффициента передачи в этих точках $R^{(q)} = R_{\gamma_q}(\bar{f}^{(q)})$ для локально связанного ансамбля являются пороговыми: при значениях связи, для которых $R_\gamma(\bar{f}^{(q)}) > R^{(q)}$, кластеры длиной q наблюдаются, а при $R_\gamma(\bar{f}^{(q)}) < R^{(q)}$ – уже нет.

Перейдем теперь к ансамблям с нелокальными связями. При $L = 2$ (рис. 8, b) АЧХ фильтра теряет монотонный характер, в результате чего ее глобальный минимум находится не на частоте $\bar{f} = 0.5$, а на частоте $\bar{f} \simeq 0.3$. Соответственно меняется и порядок следования значений $R_\gamma(\bar{f}^{(q)})$: $R_\gamma(\bar{f}^{(2)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(3)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(1)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(4)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(5)})$, что, как мы видим из сопоставления с рис. 5, b, соответствует наблюдаемому порядку исчезновения кластеров, рассмотренному ранее. Пороговые значения коэффициента передачи, так же, как и в случае ($L = 1$), принимают

близкие значения и равны, соответственно: $\{0.89, 0.9, 0.89, 0.91, 0.92\}$. Аналогичные закономерности наблюдаются и при других значениях L , например, в полностью связанной сети при $L = 5$. В этом случае, вследствие сильно осциллирующей формы АЧХ, пороговые значения для всех характерных частот оказываются близки друг к другу и переход от развитой мультистабильности к единственному синфазному режиму происходит почти мгновенно при $\gamma \simeq 0.1$.

Таким образом, последовательность разрушения мультистабильных состояний, наблюдаемая при увеличении величины связей, определяется АЧХ пространственного фильтра, который составляет система связей между осцилляторами ансамбля. Данный фильтр, подавляя одни пространственные моды и сохраняя другие, формирует тем самым набор сосуществующих режимов.

6. Режим глобальной синфазной синхронизации

Кроме рассмотренных выше пространственно неоднородных мод, в системе (2) всегда существует режим синфазной синхронизации, который остается устойчивым при любых значениях L и $\gamma \geq 0$. Поскольку несинфазные моды с ростом связи теряют устойчивость, то при превышении параметром γ некоторого порогового значения γ_t мультистабильность исчезает, и аттрактор, соответствующий синфазным колебаниям, становится глобальным. Величина порога γ_t зависит от радиуса связей L и размера ансамбля N . Определим эту зависимость в ходе численных исследований.

Поскольку число сосуществующих режимов чрезвычайно быстро растет с увеличением N , проверить устойчивость всех сосуществующих предельных множеств методом прямого перебора начальных условий не представляется возможным. Однако, как следует из результатов исследований в предыдущем разделе, переходу к режиму глобальной синхронизации предшествует потеря устойчивости пространственно неоднородной модой с фазовыми кластерами длиной $N/2$, поэтому значение параметра связи $\gamma_{N/2}$, при котором происходит данная бифуркация, может быть выбрано в качестве оценки для величины γ_t : $\gamma_t \simeq \gamma_{N/2}$.

В ходе численных исследований было определено пороговое значение γ_t в зависимости от N и L . График $\gamma_t(N, L)$ показан на рис. 9 в виде карты, на которой значение γ_t в данной точке отображается оттенком серого цвета: чем больше значение γ_t , тем темнее цвет точки. Измерения проводились внутри области, ограниченной сверху линией $L=N/2$, которая задает верхнюю допустимую границу для радиуса связей. Ниже этой линии распо-

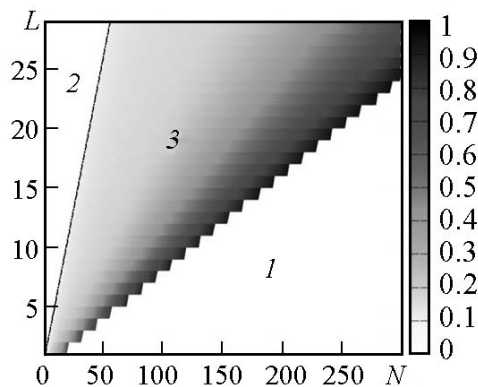


Рис. 9. Зависимость критического значения γ от N и L : область 1 соответствует отсутствию режима глобальной синхронизации, 3 – наличию данного режима, в области 2 радиус связей превышает допустимое значение

Fig. 9. Dependence of critical value γ from N and L : area 1 refers to the absence of global synchronization, 3 – to its presence, 2 – the area where the radius of coupling is greater than the allowed values

ложена конусообразная область, в которой наблюдается мультистабильность. Здесь с ростом размера ансамбля N наблюдается рост порогового значения γ_t , которое при определенном $N = N_t$ достигает значения $\gamma_t = 1$. Зависимость N_t от L приблизительно соответствует прямой $N_t \simeq 14L$. Соответственно, при $N > N_t$ глобальная синхронизация не реализуется ни при каких значениях $\gamma < 1$, и мультистабильность сохраняется при любых L (область I на рисунке). Таким образом, мы видим, что при любом L существует диапазон значений N , когда мультистабильность сменяется моностабильным режимом синфазных колебаний. В то же время, существует верхняя граница длины ансамбля $N = N_t$ за которой пространственно неоднородные состояния реализуются при сколь угодно сильной связи из диапазона $[0 : 1[$.

Попробуем оценить полученные зависимости с точки зрения рассмотренного ранее пространственного фильтра. Как известно, спектр пространственно однородного режима содержит единственную гармонику на частоте $\bar{f} = 0$, в то время как пространственные спектры других мод содержат также гармоники на частотах $\bar{f}_i = i/N$. С ростом γ АЧХ фильтра связей понижается на всех частотах, кроме нулевой частоты, в окрестности которой она всегда близка к единице (см. рис. 6). Предположим, что существует некоторое пороговое значение коэффициента передачи фильтра ξ , разграничивающее «полосу пропускания» ($\Delta\bar{f}_+ : R(\bar{f}) > \xi$ при $\bar{f} \in \Delta\bar{f}_+$) и «полосу подавления» ($\Delta\bar{f}_- : R(\bar{f}) < \xi$ при $\bar{f} \in \Delta\bar{f}_-$), так что моды становятся неустойчивыми, если их пространственные спектры в своей основной части попадают в полосу подавления. Значение нормированной частоты, отделяющее полосу пропускания от полосы подавления есть «границная частота» пространственного фильтра связей: $\bar{f}_{\text{гп}} = R^{-1}(\xi)$. При сделанных предположениях пороговое значения γ_t можно найти из условия: $f_1 \leq \bar{f}_{\text{гп}}$, где $f_1 = 1/N$ – частота первой гармоники в спектре. Отсюда, используя выражение (7), получим оценку критической силы связей

$$\gamma_t = \frac{1 - \xi}{1 - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \cos(2\pi k/N)}. \quad (9)$$

При $L/N \ll 1$, используя аппроксимацию $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$, формулу (9) можно упростить:

$$\gamma_t \simeq \frac{3(1 - \xi)N^2}{\pi^2(L + 1)(2L + 1)}. \quad (10)$$

Здесь использовано известное математическое соотношение: $\sum_{k=1}^L k^2 = L(L+1)(2L+1)/6$. При $L \gg 1$ формула (10) упрощается до обратной квадратичной зависимости:

$$\gamma_t \simeq \frac{3(1 - \xi)}{2\pi^2\mu^2}, \quad (11)$$

где $\mu = L/N$ – нормированный радиус связей, меняющийся в пределах от $\mu = 0$ (для несвязанного ансамбля) до $\mu = 0.5$ (для полносвязной сети).

Рассмотрим, насколько точна полученная оценка (11). Для этого, исходя из экспериментальных результатов, построим семейства характеристик $\gamma_t(N)$ для разных значений L (рис. 10, а). Графики представляют собой монотонно возрастающие к значению $\gamma_t = 1$ функции, скорость возрастания которых убывает с ростом радиуса связей L . Качественное сходство разных графиков на рис. 10, а позволяет

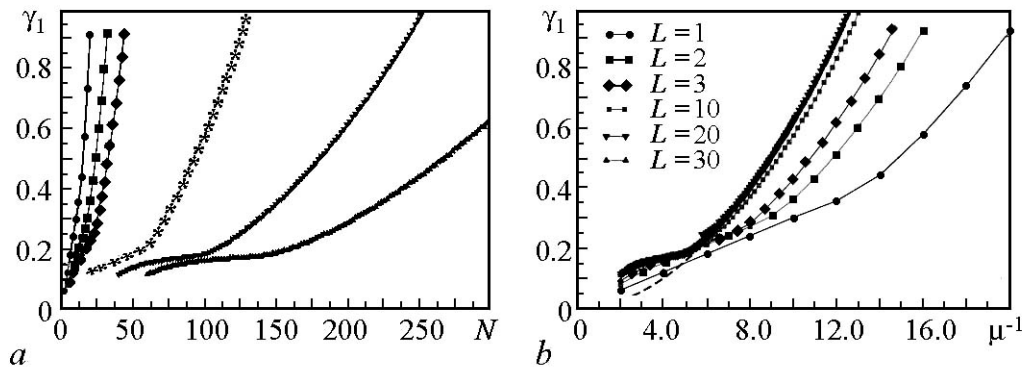


Рис. 10. График зависимости порогового значения коэффициента связи γ_t от размера ансамбля N (a); тот же рисунок в нормированной системе координат μ^{-1} (b)

Fig. 10. Plot of threshold value of coupling γ_t with the ensemble size N (a); the same – for normalized values of coordinate μ^{-1} (b)

предположить наличие масштабной симметрии. Действительно, нормировав размер ансамбля N на радиус связей L (то есть перейдя к зависимости от обратного параметра дальнего действия μ^{-1}), при $L \gg 1$ мы получим в новых координатах общую кривую $\gamma_t(\mu^{-1})$. Подтверждением этому является рис. 10, b, на котором изображены те же экспериментальные графики, что и на рис. 10, a, но в новой системе координат. Из рисунка видно, что с ростом L графики сближаются друг к другу и при $L \geq 10$, практически сливаются. Полученная зависимость хорошо аппроксимируется выражением (11), если $\mu^{-1} \geq 5$, то есть при $L/N \leq 0.2$. Таким образом оценочная формула (11) может быть использована для определения границы существования режима глобальной синхронизации при $10 \lesssim L \lesssim N/5$.

Формула (11) дает возможность также оценить верхнюю границу размера ансамбля, для которого еще наблюдается мультистабильность. Для этого нужно подставить в нее $\gamma_t = 1$ и решить относительно N :

$$N_t \simeq \frac{\pi}{\sqrt{1.5(1-\xi)}} L. \quad (12)$$

Обратим внимание, что выражение (12) линейное, что совпадает с качественной зависимостью, полученной ранее на основании анализа рис. 9. Количественное сопоставление при значении $\xi \simeq 0.955$, для которого построена аппроксимирующая кривая на рис. 10, b, дает оценку: $N_t \simeq 12L$, что близко к определенной ранее экспериментально $N_t = 14L$.

7. Мультистабильность орбит бóльших периодов

Для орбит бóльших периодов ($M > 2$) число одновременно сосуществующих мультистабильных состояний существенно возрастает. При малой связи ($\gamma \simeq 0$) даже для ансамблей средних размеров число орбит периода четыре становится настолько большим, что делает их подсчет и идентификацию чрезвычайно трудной. Тем не менее попробуем качественно сопоставить полученные ранее закономерности

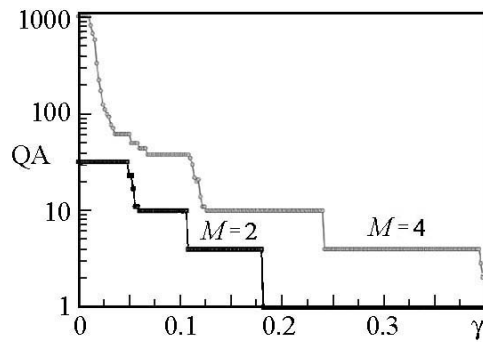


Рис. 11. Зависимость числа аттракторов от параметра связи в цепочке из шести отображений для орбит периода четыре и два; радиус связей равен двум

Fig. 11. Dependence of the number of attractors on the coupling parameter in a chain of 6 maps for the orbits of the period 4 and 2; the coupling radius equal 2

Для режимов периода четыре. Выберем число элементов ансамбля равным шести. В этом случае максимальное число сосуществующих аттракторов периода четыре равно 1024, а орбит периода два – 32. Пользуясь методикой, описанной выше, построим для данного случая зависимость числа аттракторов, одновременно существующих в ансамбле, от величины связи γ , сравнив эту зависимость с аналогичной, построенной для орбит с $M = 2$. Результаты расчетов приведены на рис. 11. Для удобства сопоставления графики построены в логарифмическом масштабе по оси ординат. Как видно из графиков, между двумя зависимостями существует очевидное качественное сходство. Для орбит периода четыре в области малой связи ($\gamma \lesssim 0.01$) наблюдается «ступенька», на которой сохраняется максимальное число аттракторов. Затем, в интервале $0.01 \lesssim \gamma \lesssim 0.07$ происходит быстрый спад мультистабильности, после которого зависимость $QA(\gamma)$ практически совпадает с соответствующей зависимостью для $M = 2$, будучи сдвинутой относительно последней в сторону больших значений параметра связей. Качественное сходство в процессах разрушения мультистабильности для орбит периода два и четыре следует из сходства их пространственных спектров. Действительно, форма пространственных снимков орбит больших периодов отличается от соответствующего снимка орбиты периода два, на базе которой эти орбиты образованы, лишь наличием на их фоне мелкомасштабных флуктуаций; последние не могут оказать существенного влияния на форму пространственного спектра.

Выводы

Ансамбль отображений с бифуркациями удвоения периода при слабых дальнедействующих связях демонстрирует развитую фазовую мультистабильность. С ростом силы связей, а также радиуса их действия, число сосуществующих состояний монотонно уменьшается и, если размер ансамбля не слишком большой, мультистабильность исчезает. В этом случае система демонстрирует режим глобальной синфазной синхронизации.

Зависимость числа сосуществующих режимов от силы связей носит ступенчатый характер. В области слабых связей существует конечный интервал по связи, где наблюдается максимально возможное число устойчивых мод. Этот интервал одинаков для ансамблей с разным дальнедействием связей. С ростом связей происходит скачкообразное уменьшение числа орбит в соответствии с их пространственной кластерной структурой. Порядок «разрушения» кластеров разной длины зависит от радиуса дальнедействия связей.

Для оценки закономерностей уменьшения мультстабильности с ростом связей удобно использовать спектральный подход, рассматривая систему связей ансамбля в качестве цифрового фильтра. При таком рассмотрении изменение формы АЧХ фильтра с изменением числа и силы связей позволяет определить порядок исчезновения режимов с характерными пространственными кластерами, а также оценить границу между мультстабильностью и режимом глобальной синхронизации. В этом случае, если сразу множество орбит с одинаковыми характерными пространственными масштабами выходят за пределы полосы пропускания фильтра, то они одновременно теряют устойчивость, в результате чего мультстабильность существенно уменьшается.

Библиографический список

1. *Ermentrout G.B.* Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 22. Pp. 1–9.
2. *Crawford J.D., Davies K.T.R.* Synchronization of globally coupled phase oscillators: Singularities and scaling for general couplings//*Physica D.* 1990. Vol. 125. Pp. 1–46.
3. *Ren L., Ermentrout G.B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // *Physica D.* 2000. Vol. 143. P. 56.
4. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence.* Berlin: Springer. 1984.
5. *Cross M.G., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, no. 3. Pp. 851–1112.
6. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems.* Singapore: World Scientific. 2002.
7. *Abrams D.M., Strogatz S.H.* Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 174102.
8. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hovel P., Scholl E.* Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. P. 234102.
9. *Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Scholl E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // *Nature Physics.* 2012. Vol. 8. Pp. 658–661.
10. *Богомолов С.А., Стрелкова Г.И., Scholl E., Анищенко В.С.* Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, № 14. С. 103–110.
11. *Gopal R., Chandrasekar V.K., Venkatesan A., Lakshmanan M.* Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89. P. 052914.
12. *Areccchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. Pp. 1217–1220.
13. *Prengel F., Wacker A., Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. Pp. 1705–1712.
14. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. Pp. 11221–11224.

15. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. Pp. 708–711.
16. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, no. 1. Pp. 55–74.
17. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, no. 6. Pp. 1664–1687.
18. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
19. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
20. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 2. С. 291–295.
21. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, no. 6. P. 1014.
22. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, no. 5. P. 056212.
23. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974–981.
24. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695–711.

References

1. Ermentrout G.B. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 22, pp. 1–9.
2. Crawford J.D., Davies K.T.R. *Physica D.*, 1990, vol. 125, pp. 1–46.
3. Ren L., Ermentrout G.B. *Physica D.*, 2000, vol. 143, p. 56.
4. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves and turbulence.* Berlin: Springer. 1984.
5. Cross M.G., Hohenberg P.C. *Rev. Mod. Phys.*, 1993, vol. 65, no. 3, pp. 851–1112.
6. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems.* Singapore: World Scientific, 2002.
7. Abrams D.M., Strogatz S.H. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, p. 174102.
8. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hovel P., Scholl E. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, p. 234102.
9. Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Scholl E. *Nature Physics*, 2012, vol. 8, pp. 658–661.
10. Bogomolov S.A., Strelkova G.I., Anishchenko V.S., Scholl E. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, no. 7, pp. 765–768.

11. Gopal R., Chandrasekar V.K., Venkatesan A., Lakshmanan M. *Phys. Rev. E.*, 2014, vol. 89, p. 052914.
12. Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, pp. 1217–1220.
13. Prengel F., Wacker A., Scholl E. *Phys. Rev. B.*, 1994, vol. 50, pp. 1705–1712.
14. Sun N.G., Tsironis G.P. *Phys. Rev. B.*, 1995, vol. 51, pp. 11221–11224.
15. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 708–711.
16. Ermentrout G.B. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 23, no. 1, pp. 55–74.
17. Ermentrout G.B. *SIAM J. of Appl. Math.*, 1992, vol. 52, no. 6, pp. 1664–1687.
18. Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E. *Izvestija VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 4, pp. 37–54 (in Russian).
19. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Gulyaev Y.P., Seleznev E.P. *Technical Physics Letters*, 1989, vol. 15, no. 3, pp. 60–65 (in Russian).
20. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Pudovochkin O.B., Seleznev E.P. *Radiotekhnika i elektronika*, 1993, vol. 38, no. 2, pp. 291–295 (in Russian).
21. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, p. 1014.
22. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 63, p. 056212.
23. Astakhov V.V., Shabunin A.V., Anishchenko V.S. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1997, vol. 42, p. 907.
24. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, vol. 15, p. 695–711.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru