



ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ АВТОГЕНЕРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В. П. Пономаренко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: ponomarenko@vmk.unn.ru

В работе исследуются режимы динамического поведения модифицированной системы с частотно-фазовым управлением, в которой используются двухканальный дискриминатор в цепи фазового управления и многочастотный дискриминатор с периодической нелинейностью в цепи частотного управления. Рассмотрен случай одинаковых фильтров низких частот третьего порядка в цепях управления. Математическая модель исследуемой частотно-фазовой системы представляется нелинейной динамической системой в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве и характеризуется множеством состояний равновесия. Цель работы состоит в выявлении новых динамических режимов и нелинейных явлений, обусловленных указанной модификацией системы.

При изучении динамики системы интерес представляет рассмотрение режима фазовой синхронизации, являющегося основным рабочим режимом в традиционных приложениях систем с фазовым управлением, и несинхронных режимов, которые служат основными рабочими процессами в новых, нетрадиционных приложениях, связанных с генерацией хаотических колебаний. Решение этих задач выполнено с применением компьютерного моделирования, которое базируется на качественных и численных методах нелинейной динамики. Определены условия синхронизации, выяснено, что в системе может реализоваться множество разнообразных (как периодических, так и хаотических) несинхронных режимов. Численный анализ показал существование в системе качественно новых квазисинхронных и асинхронных режимов, интересных для прикладных задач генерации колебаний с хаотической модуляцией их частоты и фазы.

В процессе численного моделирования проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинхронных режимов. Обнаружено наличие высокой степени мультстабильности несинхронных режимов частотно-фазовой системы. Рассмотрены особенности динамики системы, обусловленные параметрами, характеризующими инерционность цепей управления и степень влияния цепи частотной автоподстройки. Результаты представлены в виде одно- и двухпараметрических бифуркационных диаграмм, проекций фазовых портретов и сечения Пуанкаре, реализаций колебательных процессов. Выявленные новые несинхронные режимы модифицированной системы

с частотно-фазовым управлением представляют интерес при решении прикладных задач построения генераторов хаотических сигналов на основе систем с фазовым управлением.

Ключевые слова: Системы с фазовым и частотно-фазовым управлением, динамическое поведение, синхронный и несинхронные режимы, устойчивость, бифуркации, аттракторы периодических и хаотических режимов, фазовые портреты, динамический хаос.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-3-52-74

Образец цитирования: Пономаренко В.П. Динамические режимы и нелинейные явления в модифицированной автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 3. С. 52–74.

DYNAMICAL MODES AND NONLINEAR PHENOMENA IN MODIFIED AUTOOSCILLATORY SYSTEM WITH FREQUENCY-PHASE CONTROL

V. P. Ponomarenko

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University
Prospect Gagarina, 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ponomarenko@vmk.unn.ru

In the proposed paper, we investigate the dynamical behavior of the modified system with frequency-phase control, which uses two-channel discriminator in the circuit of phase control and multi-frequency discriminator with periodic nonlinearity in the circuit of frequency control. We consider the case of identical low-pass filters of the third order in the both control circuits. Mathematical model of analyzed frequency-phase system is presented by a nonlinear dynamical system in the four-dimensional cylindrical phase space. The model is characterized by a great number of equilibrium states. The aim of this work is to reveal new dynamical modes and nonlinear phenomena due to the specified modification.

The study of the system under consideration dynamics consists in analysis of the phase synchronous mode, which is the main operating state in traditional applications of the systems with phase control, and non-synchronous modes of the frequency-phase system that serve as the basic working process in a new, non-traditional applications associated with the generation of chaotic oscillations. For solving these problems, we use computer modeling that based on qualitative and numerical methods of nonlinear dynamics. The conditions of the synchronous mode realization are determined. The existences of a great number various periodic and chaotic non-synchronous modes are established. Numerical analysis showed the existence in the system of qualitatively new quasi-synchronous and asynchronous modes, which are interesting for applied problems of generation of oscillations with chaotic modulation of their frequency and phase.

In the process of numerical simulation, we have analyzed the bifurcations leading to the emergence and disappearance of non-synchronous modes. High level of the non-synchronous modes multistability of frequency-phase system is discovered. The peculiarities of the dynamics of the system caused by the parameters that characterize the inertia of the control circuits and the degree of influence of the circuit frequency control are studied. The results are presented in the form of one- and two-parameter bifurcation diagrams, phase portraits, Poincare sections and waveforms of oscillations.

The revealed new non-synchronous modes of the modified system with frequency-phase control are of interest in the solution of applied problems of constructing generators of chaotic signals on the base of the systems with phase control.

Keywords: System with phase and frequency-phase control, dynamical behavior, synchronous and non-synchronous modes, stability, bifurcations, attractors of periodic and chaotic modes, phase portraits, dynamical chaos, multi-scroll chaotic attractors.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-3-52-74

Paper reference: Ponomarenko V.P. Dynamical modes and nonlinear phenomena in modified autooscillatory system with frequency-phase control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 3. P. 52–74.

Введение

Автогенераторные системы с фазовым и комбинированным частотным управлением частотой генерируемых колебаний широко применяются в современных инфокоммуникационных системах [1–6]. Наличие цепей фазового и частотного управления и возможность объединения систем путем организации различных связей между ними обеспечивают решение как традиционных задач синхронизации и слежения, так и новых задач генерации разнообразных периодических и хаотических автомодуляционных колебаний. К тому же возможна модификация таких систем, способствующая увеличению набора возможных автомодуляционных колебаний различной сложности. В связи с этим исследование нелинейной динамики различных вариантов систем с фазовым и частотным управлением сохраняет актуальность.

Объектом исследования в данной работе является система с комбинированным частотно-фазовым управлением, иначе называемая системой частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [2, 7]. Система ЧФАП отличается наличием в цепях управления двух дискриминаторов рассогласований – фазового и частотного. Автоматическая подстройка частоты колебаний управляемого (перестраиваемого) генератора к частоте колебаний эталонного (внешнего) генератора в такой системе осуществляется в результате суммарного корректирующего воздействия на управляемый генератор со стороны фазовой и частотной цепей управления. Для традиционных приложений систем ЧФАП, в которых основной задачей является обеспечение и поддержание синхронного режима с совпадением частот колебаний эталонного и управляемого генераторов, частотно-фазовые системы интересны тем, что они позволяют частично разрешить предъявляемые противоречивые требования по обеспечению широкой области захвата в синхронный режим и помехоустойчивости [7, 8]. Для теории колебаний и нелинейной динамики системы ЧФАП представляют интерес как сложные автоколебательные системы, в которых могут возникать различные динамические состояния и нелинейные явления (синхронизация, развитие неустойчивости синхронного режима и переходы по различным сценариям к несинхронным режимам различной сложности с периодической, квазипериодической или хаотической автомодуляцией частоты колебаний управляемого генератора, бифуркации колебательных режимов, мультистабильность и др.). Этот интерес в значительной степени стимулирован перспективой создания на основе систем с фазовым и частотным управлением устройств генерирования сложных регулярных и хаотических сигналов для использования в коммуникационных системах [2, 4, 5].

В работах [2, 7, 9–14] исследованы динамические режимы и бифуркации в моделях частотно-фазовых систем с фильтрами различной сложности в цепях управления при синусоидальной характеристике фазового дискриминатора и непериодической нелинейной характеристике частотного дискриминатора. В данной работе, продолжающей исследования [9–12], изучаются особенности динамического поведения модифицированной системы ЧФАП, в которой используются двухканальный фазовый дискриминатор в цепи фазового управления и многочастотный дискриминатор с периодической характеристикой в цепи частотного управления.

Многочастотный дискриминатор с периодической характеристикой реализуется на основе фазового дискриминатора и линии задержки [3, 15–17], его характеристика имеет бесконечное число нулей, которые могут быть использованы в качестве множества частот настройки этого дискриминатора. Двухканальный фазовый

дискриминатор реализуется параллельным включением двух парциальных фазовых дискриминаторов с характеристиками $F_1(\varphi) = \sin \varphi$ и $F_2(\varphi) = \sin(m\varphi)$ с суммированием их выходных сигналов (φ – фазовое рассогласование колебаний эталонного и управляемого генераторов системы ЧФАП, m – умножающий коэффициент, $m > 1$) [18, 19]. Рассматриваемая модификация фазового дискриминатора привлекательна тем, что приводит к увеличению числа состояний равновесия в моделях системы ЧФАП, а следовательно, к появлению новых типов периодических и хаотических автомодуляционных режимов управляемого генератора. Изучение динамических режимов и бифуркаций, возникающих в системе ЧФАП с такой модификацией частотного и фазового дискриминаторов, является целью и основным содержанием данной работы.

1. Математическая модель исследуемой системы

Общее уравнение динамики системы ЧФАП, записанное в операторной форме ($p \equiv d/dt$) для разности фаз φ , имеет вид [7]

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p)F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p)\Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где $K_1(p)$ и $K_2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров низких частот в цепях фазового и частотного управления, $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, Ω_1 и Ω_2 – максимальные частотные рассогласования, которые могут быть скомпенсированы цепями управления, $\delta\omega$ – начальная расстройка частот колебаний эталонного и управляемого генераторов. Для рассматриваемой модификации дискриминаторов системы ЧФАП будем аппроксимировать их характеристики функциями [16–18]

$$F(\varphi) = a \sin \varphi + d \sin(m\varphi), \quad \Phi(p\varphi) = \sin(\beta_1 \varphi), \quad (2)$$

где a и d – амплитуды выходных сигналов парциальных фазовых дискриминаторов, β_1 – параметр многочастотного дискриминатора.

Конкретный вид математических моделей рассматриваемой системы ЧФАП, получаемых из уравнения (1), определяются коэффициентами передачи $K_1(p)$ и $K_2(p)$. В данной работе будем рассматривать случай, когда в цепях управления системы используются одинаковые фильтры низких частот третьего порядка ($K_1(p) = K_2(p) = 1/(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3)$), где a_1 , a_2 и a_3 – постоянные времени. В этом случае математическая модель исследуемой системы ЧФАП, полученная на основании уравнения (1), представляется динамической системой

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= u, & \frac{du}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu_1 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - a \sin \varphi - d \sin(m\varphi) - u - \varepsilon y - \mu z - b \sin(\beta u) \end{aligned} \quad (3)$$

с четырехмерным фазовым пространством $U = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), u, y, z\}$. В уравнениях (3) введено безразмерное время $\tau = \Omega_1 t$ и параметры $\varepsilon = a_1 \Omega_1$, $b = \Omega_2 / \Omega_1$, $\mu = a_2 \Omega_1^2$, $\mu_1 = a_3 \Omega_1^3$, $\gamma = \delta\omega / \Omega_1$, $\beta = \beta_1 \Omega_1$. Система (3) инвариантна относительно замены $(\varphi, u, y, z, \gamma) \rightarrow (-\varphi, -u, -y, -z, -\gamma)$, поэтому достаточно ее рассматривать при значениях относительной начальной расстройки $\gamma \geq 0$.

Исследование модели (3) проведено с применением компьютерного моделирования, которое базируется на качественных и численных методах нелинейной динамики [20–24] и использовании программного комплекса «ДНС» [25], обеспечивающего решение задач обнаружения периодических и хаотических движений и исследование бифуркаций в динамических моделях с цилиндрическим фазовым пространством. В качестве характеристик исследуемых движений системы (3) используем реализации колебательных процессов, проекции фазовых портретов аттракторов, мультипликаторы периодических движений, сечение Пуанкаре, ляпуновские характеристические показатели.

2. Состояния равновесия системы (3)

Уравнения для определения состояний равновесия имеют вид

$$u = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \gamma - a \sin \varphi - d \sin(m\varphi) = 0. \quad (4)$$

Число состояний равновесия, расположенных в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства U , зависит от параметров γ , a , d и m . Рассмотрим уравнения (4) в случаях, когда $m = 2$ и $m = 3$, в которых удается получить аналитические выражения для бифуркационных значений параметра γ , при переходе через которые происходит изменение числа состояний равновесия системы (3).

В случае $m = 2$ система (3) не имеет состояний равновесия при значениях $\gamma > \gamma_1(a, d)$, где

$$\gamma_1(a, d) = \left(3a + \sqrt{a^2 + 32d^2}\right) \sqrt{1 - \left(\sqrt{a^2 + 32d^2} - a\right)^2 / 64d^2} / 4; \quad (5)$$

имеет два состояния равновесия $A_1(\varphi_1, 0, 0, 0)$ и $A_2(\varphi_2, 0, 0, 0)$ при значениях $d < a/2$, $0 < \gamma < \gamma_1(a, d)$. Координаты φ_1 и φ_2 , определяемые из последнего уравнения в (4), удовлетворяют неравенствам $0 < \varphi_1 < \varphi_{m1}$, $\varphi_{m1} < \varphi_2 < \pi$, где $\varphi_{m1} = \arccos\left(\left(-a + \sqrt{-a + 32d^2}\right) / 8d\right)$. При значениях $d > a/2$, $0 < \gamma < \gamma_2(a, d)$, где

$$\gamma_2(a, d) = \left(-3a + \sqrt{a^2 + 32d^2}\right) \sqrt{1 - \left(\sqrt{a^2 + 32d^2} + a\right)^2 / 64d^2} / 4, \quad (6)$$

система (3) имеет четыре состояния равновесия $A_1(\varphi_1, 0, 0, 0)$, $A_2(\varphi_2, 0, 0, 0)$, $A_3(\varphi_3, 0, 0, 0)$ и $A_4(\varphi_4, 0, 0, 0)$; координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 удовлетворяют неравенствам $0 < \varphi_1 < \varphi_{m1}$, $\varphi_{m1} < \varphi_2 < \pi$, $-\pi < \varphi_3 < -\varphi_{m2}$, $-\varphi_{m2} < \varphi_4 < -\varphi_{m1}$, где $\varphi_{m2} = \pi - \arccos\left(\left(a + \sqrt{a + 32d^2}\right) / 8d\right)$. Значения $\gamma = \gamma_1(a, d)$ и $\gamma = \gamma_2(a, d)$, определяемые (5) и (6), являются бифуркационными – при $\gamma = \gamma_1(a, d)$ сливаются состояния равновесия A_1 и A_2 ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{m1}$), а при $\gamma = \gamma_2(a, d)$ сливаются состояния равновесия A_3 и A_4 ($\varphi_3 = \varphi_4 = -\varphi_{m2}$).

В случае $m = 3$ система (3) не имеет состояний равновесия, если $d < a/9$, $\gamma > a - d$; имеет два состояния равновесия $A_1(\varphi_1, 0, 0, 0)$ и $A_2(\varphi_2, 0, 0, 0)$, где $0 < \varphi_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \varphi_2 < \pi$, если $d < a/9$, $0 < \gamma < a - d$. При значениях $a/9 < d < a$ система (3) не имеет состояний равновесия, когда $\gamma > \gamma_3(a, d)$, где

$$\gamma_3(a, d) = \left((a + 3d) \sqrt{(a + 3d)/3d}\right) / 3; \quad (7)$$

имеет четыре состояния равновесия $A_1(\varphi_1, 0, 0, 0)$, $A_2(\varphi_2, 0, 0, 0)$, $A_3(\varphi_3, 0, 0, 0)$ и $A_4(\varphi_4, 0, 0, 0)$, где $0 < \varphi_1 < \varphi_{m3}$, $\varphi_{m3} < \varphi_2 < \pi/2$, $\pi/2 < \varphi_3 < \varphi_{m4}$, $\varphi_{m4} < \varphi_4 < \pi$, $\varphi_{m3} = \arcsin\left(\sqrt{(a+3d)/3d}/2\right)$, $\varphi_{m4} = \pi - \varphi_{m3}$, когда $(a-d) < \gamma < \gamma_3(a, d)$; имеет два состояния равновесия A_1 и A_4 , когда $0 < \gamma < a-d$. При значениях $d > a$ система (3) не имеет состояний равновесия, когда $\gamma > \gamma_3(a, d)$; имеет четыре состояния равновесия A_1, A_2, A_3 и A_4 , когда $(d-a) < \gamma < \gamma_3(a, d)$; имеет шесть состояний равновесия, когда $0 < \gamma < (d-a)$ – к A_1, A_2, A_3 и A_4 добавляются состояния равновесия $A_5(\varphi_5, 0, 0, 0)$ и $A_6(\varphi_6, 0, 0, 0)$, где $-\varphi_{m4} < \varphi_5 < -\pi/2$, $-\pi/2 < \varphi_6 < -\varphi_{m3}$. Значения $\gamma = \gamma_3(a, d)$, определяемые (7), где $d < a/9$, $\gamma = (a-d)$ и $\gamma = (d-a)$, являются бифуркационными – когда $\gamma = \gamma_3(a, d)$, сливаются состояния равновесия A_1 и A_2 ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{m3}$), а также состояния равновесия A_3 и A_4 ($\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_{m4}$); когда $\gamma = a-d$, где $d < a/9$, сливаются состояния равновесия A_1 и A_4 ($\varphi_1 = \varphi_4 = \pi/2$); когда $\gamma = (a-d)$, где $a/9 < d < a$, сливаются состояния равновесия A_2 и A_3 ($\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$); когда $\gamma = d-a$, где $d > a$, сливаются состояния равновесия A_5 и A_6 ($\varphi_5 = \varphi_6 = -\pi/2$).

При возрастании параметра m увеличивается число состояний равновесия системы (3) – например, когда $m = 4$, система может иметь, в зависимости от величин параметров γ, a и d , два, четыре, шесть или восемь состояний равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства, а когда $m = 15$, максимальное число состояний равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ равно 30. Отметим, что система (3) с традиционной нелинейностью $F(\varphi) = \sin \varphi$ может иметь не более двух состояний равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Исследуя корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + \frac{\mu}{\mu_1} \lambda^3 + \frac{\varepsilon}{\mu_1} \lambda^2 + \frac{1+b\beta}{\mu_1} \lambda + \frac{F'(\varphi_i)}{\mu_1} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где $\varphi_i(\gamma, a, d, m)$ – координата анализируемого состояния равновесия системы (3), устанавливаем, что состояния равновесия, для которых $F'(\varphi_i) < 0$, являются неустойчивыми (в рассмотренных выше случаях, когда $m = 2$ и $m = 3$, это состояния равновесия A_2, A_4 и A_6); состояния равновесия, для которых $F'(\varphi_i) > 0$, являются устойчивыми при значениях $\mu_1 < \mu_{1i}^0(\gamma, b, \beta, \mu, \varepsilon, a, d, m)$, где

$$\mu_{1i}^0 = \frac{\mu}{1+b\beta} \left(\varepsilon - \frac{\mu F'(\varphi_i)}{1+b\beta} \right), \quad (9)$$

и неустойчивыми при значениях $\mu_1 > \mu_{1i}^0$ (в рассмотренных выше случаях, когда $m = 2$ и $m = 3$, это состояния равновесия A_1, A_3 и A_5).

На плоскости параметров (b, μ_1) при фиксированных значениях остальных параметров системы (3) кривые $\mu_1 = \mu_{1i}^0$, определяемые (9), расположены в области значений $b > b_{0i}$, где $b_{0i} = 1/\beta (\mu F'(\varphi_i)/\varepsilon - 1)$, $\mu_{1i}^0 = 0$ при $b = b_{0i}$; кривые $\mu_1 = \mu_{1i}^0$ имеют максимумы при $b = b_{mi} = 1/\beta (2\mu F'(\varphi_i)/\varepsilon - 1)$, максимальные значения μ_{1i}^0 равны $\varepsilon^2/(4F'(\varphi_i))$.

Каждое из устойчивых состояний равновесия системы (3) соответствует синхронному режиму системы ЧФАП, в котором разность частот колебаний эталонного и управляемого генераторов равна нулю, а стационарное значение разности фаз φ_i^0 находится из последнего уравнения в (4). Области $C_{0i} : \{\mu_1 < \mu_{1i}^0\}$ являются областями удержания синхронных режимов, отличающихся величиной стационарного

значения φ_i^0 . При переходе с изменением параметров через границы областей C_{0i} в фазовом пространстве U происходит, в соответствии с [26], либо появление устойчивых предельных циклов S_i вокруг ставших неустойчивыми состояний равновесия (предельных циклов колебательного типа), либо стягивание седловых предельных циклов C_i к устойчивым состояниям равновесия с последующим мягким или жестким переходом системы к устойчивым предельным циклам S_i . Циклы S_i соответствуют квазисинхронным режимам системы ЧФАП с периодической модуляцией частоты управляемого генератора.

3. Квазисинхронные режимы системы

Рассмотрим особенности возникновения и развития квазисинхронных режимов системы ЧФАП, обратившись к результатам однопараметрического исследования системы (3) при значениях параметров $\gamma = 0.65$, $b = 0.2$, $\mu_1 = 0.02$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 0.5$, $m = 3$, $a = 1$, $d = 0.75$ и вариации параметра μ . При рассматриваемых значениях параметров система (3) имеет четыре состояния равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства $A_1(0.21, 0, 0, 0)$, $A_2(1.17, 0, 0, 0)$, $A_3(1.97, 0, 0, 0)$ и $A_4(2.93, 0, 0, 0)$.

Состояние равновесия A_1 устойчиво при значениях $\mu \in M_s$, где $M_s : (0.158 \leq \mu \leq 0.307)$, и неустойчиво при значениях $\mu \in M_{u1}$ и $\mu \in M_{u2}$, где $M_{u1} : (0 < \mu < 0.158)$, $M_{u2} : (\mu > 0.307)$. В интервале M_s при значениях $0.158 \leq \mu \leq 0.241$ в фазовом пространстве U существуют, кроме устойчивого состояния равновесия A_1 , два предельных цикла колебательного типа вокруг A_1 – внешний C_1 устойчивый и внутренний C_2 седловой. При уменьшении параметра μ наблюдается следующая динамика системы (3). Когда значение μ переходит в интервал M_{u1} (через $\mu = 0.158$), в системе реализуется суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа [20,23,24], в результате которой из состояния равновесия A_1 при потере его устойчивости рождается устойчивый предельный цикл S_1 , расположенный внутри предельного цикла C_2 . В интервале значений $0.104 \leq \mu < 0.158$ в фазовом пространстве существуют неустойчивое состояние равновесия A_1 и три предельных цикла – S_1, C_1 и C_2 . Циклы S_1 и C_1 отвечают квазисинхронным режимам системы ЧФАП, какой из них реализуется в системе – это зависит от начальных условий. При дальнейшем уменьшении μ и переходе через значение 0.104 в системе наблюдается седло-узловая бифуркация [20,23,24] – предельные циклы C_1 и C_2 сливаются и исчезают, и в окрестности неустойчивого состояния равновесия A_1 остается устойчивый предельный цикл S_1 .

При обратном движении по параметру μ из интервала M_{u1} в интервал M_s в фазовом пространстве вначале возникает пара предельных циклов C_1 и C_2 , когда $\mu > 0.104$, затем исчезает устойчивый предельный цикл S_1 , стягиваясь к неустойчивому состоянию равновесия A_1 , когда μ превышает значения 0.158 . В интервале M_s при значениях $0.158 \leq \mu < 0.241$ в окрестности ставшего устойчивым состояния равновесия A_1 остаются предельные циклы C_1 и C_2 . Теперь, в зависимости от начальных условий, в системе ЧФАП реализуется либо синхронный режим, либо квазисинхронный режим цикла C_1 . При дальнейшем возрастании μ вначале (с превышением значения 0.241) в системе наблюдается бифуркация удвоения периода [20,23,24] предельного цикла C_1 . В интервале значений $0.241 < \mu \leq 0.307$ в фазовом пространстве в окрестности устойчивого состояния равновесия A_1 существу-

ют устойчивый двухоборотный предельный цикл C_1^2 и неустойчивый предельный цикл C_2 . Далее при выходе из интервала M_s (с превышением параметром μ значения 0.307) в системе реализуется субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, когда неустойчивый предельный цикл C_2 исчезает, стягиваясь к устойчивому состоянию равновесия A_1 . При значениях $\mu \in M_{u2}$, когда $0.307 < \mu \leq 0.351$, в фазовом пространстве существуют неустойчивое состояние равновесия A_1 и устойчивый предельный цикл C_1^2 . Затем в интервале значений $0.351 < \mu \leq 0.388$ при возрастании μ наблюдаются обратная и затем прямые бифуркации удвоения периода предельного цикла C_1 , которые при переходе через значение $\mu = 0.388$ завершаются возникновением в фазовом пространстве колебательного хаотического аттрактора P_1 . Далее, когда значение параметра μ превышает 0.392, в системе происходит жесткий переход от квазисинхронного режима хаотического аттрактора P_1 к периодическому квазисинхронному режиму предельного цикла C_3 , локализованного в фазовом пространстве в окрестности устойчивого состояния равновесия A_3 .

Состояние равновесия A_3 устойчиво при значениях $0.125 \leq \mu \leq 0.636$. При переходе с уменьшением μ через граничное значение 0.125 в системе наблюдается суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой из состояния равновесия A_3 в фазовом пространстве рождается устойчивый предельный цикл S_3 . При дальнейшем уменьшении μ цикл S_3 исчезает, фазовые траектории системы (3) уходят из окрестности состояния равновесия A_3 . Если же в квазисинхронном режиме цикла S_3 двигаться по параметру μ в сторону его увеличения, тогда с превышением значения 0.124 предельный цикл S_3 исчезает, стягиваясь к состоянию равновесия A_3 , которое становится устойчивым. При переходе через значение $\mu = 0.243$ наблюдается седло-узловая бифуркация с рождением в фазовом пространстве U устойчивого C_3 и седлового C_4 предельных циклов вокруг состояния равновесия A_3 . В интервале значений $0.243 < \mu \leq 0.606$ в фазовом пространстве существуют устойчивое состояние равновесия A_3 и пара предельных циклов C_3 и C_4 .

Эволюцию квазисинхронного режима предельного цикла C_3 при дальнейшем возрастании параметра μ характеризуют однопараметрическая бифуркационная диаграмма (μ, u) , (φ, u) -проекции фазовых портретов и фрагменты реализаций $\varphi(\tau)$, соответствующие аттракторам системы (3) и приведенные на рис. 1. В соответствии с (μ, u) -диаграммой на рис. 1, а при возрастании μ в фазовом пространстве U образуется, в результате бифуркаций удвоения периода предельного цикла C_3 (рис. 1, б), хаотический аттрактор P_3 колебательного типа (рис. 1, в), то есть происходит мягкий переход к хаотическому квазисинхронному режиму системы ЧФАП. Интересно, что при дальнейшем возрастании μ аттрактор P_3 при $\mu > 0.729$ преобразуется в хаотический двухспиральный аттрактор V колебательного типа (рис. 1, д), называемый в литературе double-scroll аттрактором [27, 28]. Траектории на аттракторе V имеют витки как вокруг каждого из неустойчивых состояний равновесия A_1 и A_3 , так и вокруг трех состояний равновесия A_1, A_2 и A_3 , то есть квазисинхронный режим хаотического аттрактора V характеризуется нерегулярными переключениями колебаний относительно A_1 и A_3 .

При продолжении увеличения параметра μ в структуре аттрактора V появляются витки вращательных фазовых траекторий, число таких витков растет при возрастании μ . В результате в фазовом пространстве при $\mu > 0.805$ формируется хаотический аттрактор W колебательно-вращательного типа (рис. 1, е). Для движений на аттракторе W характерно чередование неограниченного возрастания (вращения)

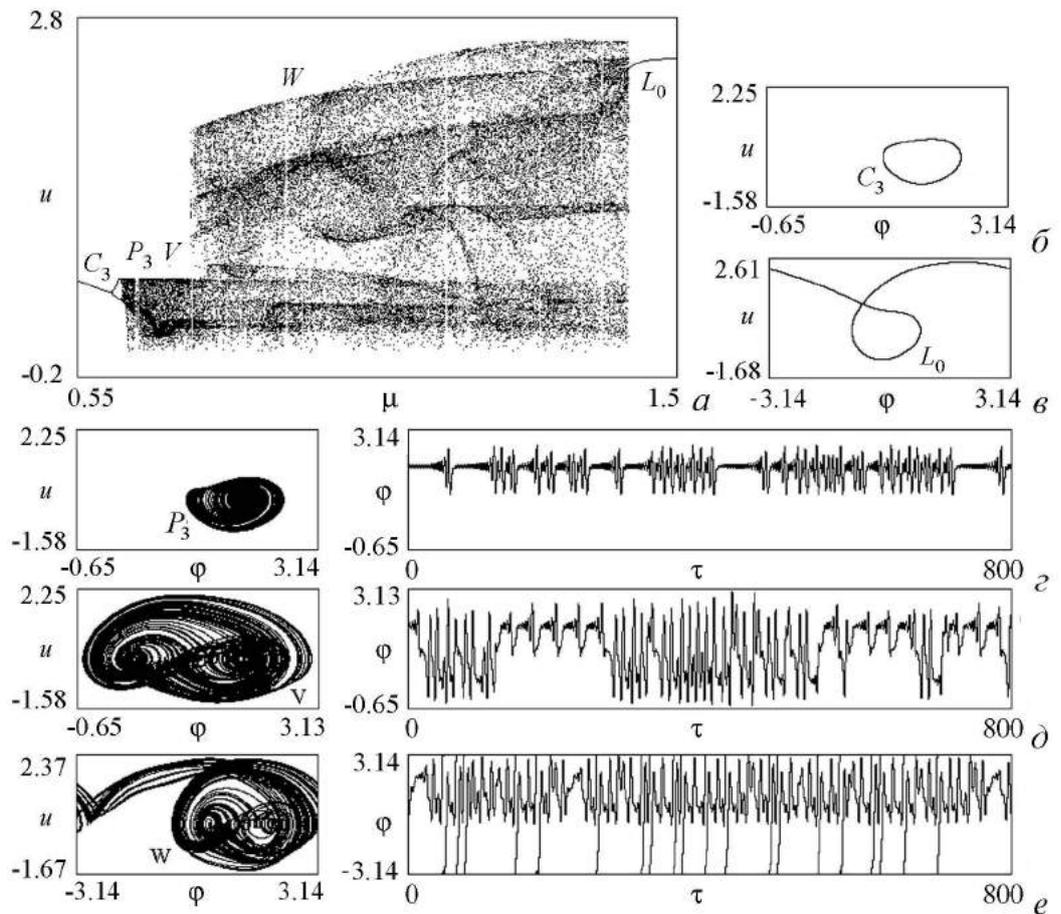


Рис. 1. Диаграмма развития квазисинхронного режима предельного цикла C_3 при изменении параметра μ (а) и аттракторы системы (3) (б–е) при $\mu = 0.58$ (б), 1.5 (в), 0.65 (г), 0.76 (д), 0.95 (е) и значениях параметров $\gamma = 0.65$, $b = 0.2$, $\mu_1 = 0.02$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 0.5$, $m = 3$, $a = 1$, $d = 0.75$

разности фаз φ и ее колебательного поведения на хаотическом аттракторе V . Возникновение в системе ЧФАП квазисинхронного режима хаотического двухспирального аттрактора V и асинхронного режима колебательно-вращательного аттрактора W обусловлено применением двухканального фазового дискриминатора с характеристикой $F(\varphi)$, определяемой (2). В системе ЧФАП с одноканальным фазовым дискриминатором, имеющим синусоидальную характеристику, такие режимы не реализуются. Когда значение параметра μ превышает 1.423 , наблюдается жесткий переход системы к асинхронному режиму вращательного предельного цикла L_0 (рис. 1, в). При дальнейшем возрастании μ в системе ЧФАП наблюдается чередование периодических и хаотических асинхронных режимов.

Численное исследование системы (3) показало, что с увеличением числа состояний равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства U могут формироваться хаотические многоспиральные (multi-scroll) аттракторы колебательного типа с переходами между неустойчивыми состояниями равновесия, аналогичные аттракторам в моделях электронных генераторов Чуа [28, 29], и хаотические аттракторы колебательно-вращательного типа с колебательной стадией на многоспиральных хаотических аттракторах. На рис. 2 приведены примеры аттракторов такого типа:

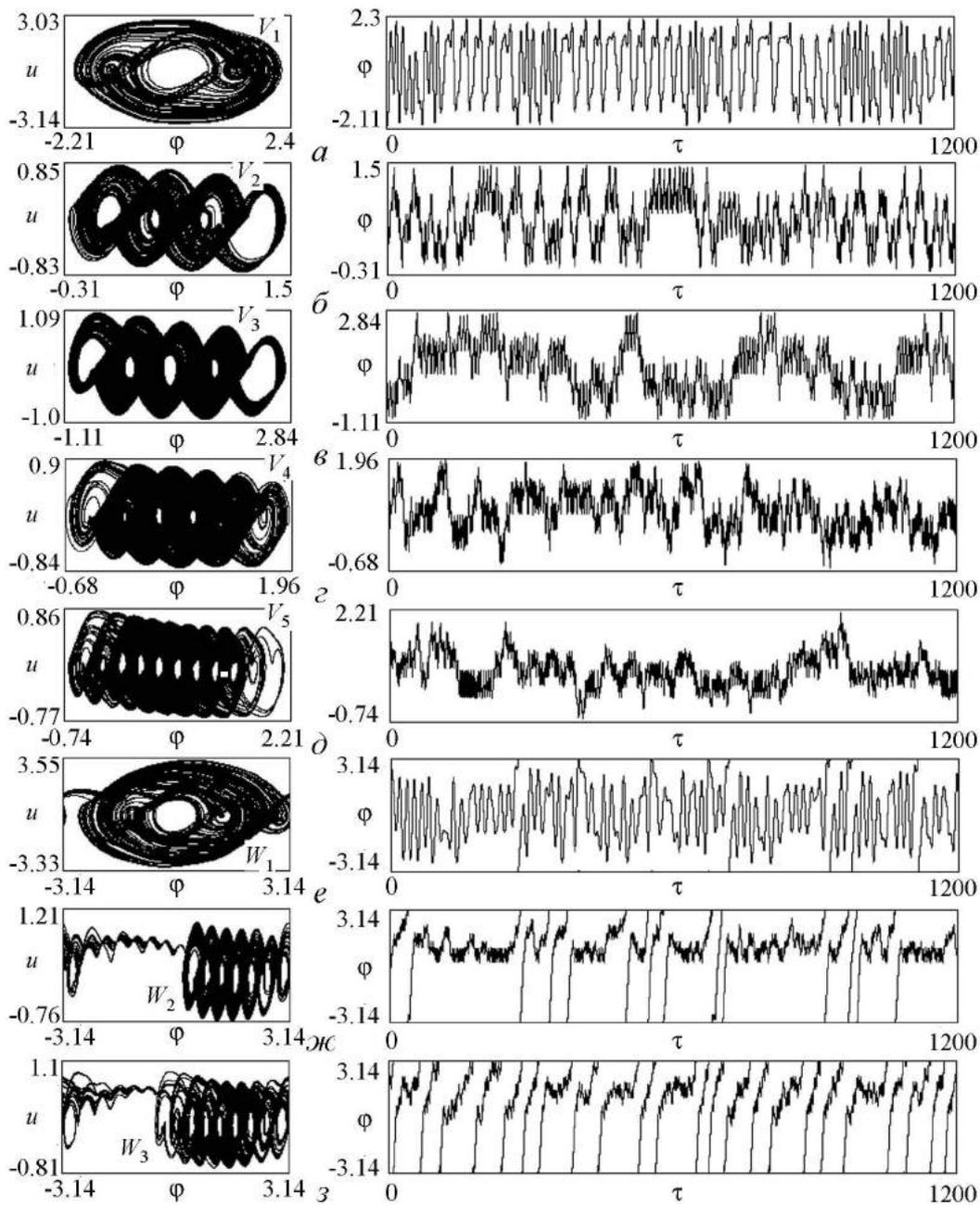


Рис. 2. Аттракторы сложных квазисинхронных и асинхронных режимов, наблюдаемые в фазовом пространстве системы (3) при следующих значениях параметров:

	γ	b	μ_1	β	ε	m	a	d	μ
a	0.1	0.2	0.02	8	0.5	4	1	2	0.45
\bar{b}	0.1	0.21	0.02	4	0.5	15	0.2	0.8	0.19
b	0.1	0.2	0.02	8	0.5	8	0.2	0.8	0.35
z	0.1	0.2	0.025	4	0.5	15	0.2	0.8	0.27
d	0.1	0.2	0.02	8	0.5	25	0.2	0.8	0.17
e	0.1	0.2	0.02	8	0.5	4	1	2	0.65
$ж$	0.25	0.2	0.02	8	0.5	15	0.2	0.8	0.13
$з$	0.2	0.2	0.02	8	0.5	15	0.2	0.8	0.28

трех-, четырех-, пяти-, шести- и десятиспиральных хаотических аттракторов колебательного типа V_1, V_2, V_3, V_4 и V_5 (рис. 2, $a-d$) и колебательно-вращательных хаотических аттракторов W_1, W_2 и W_3 с колебательной стадией на трех-, семи- и девятиспиральных хаотических аттракторах (рис. 2, $e-z$).

4. Асинхронные режимы системы

Как показали результаты численного исследования системы (3), в фазовом пространстве U может существовать большое число вращательных предельных циклов, обусловленное периодической характеристикой $\Phi(u) = \sin(\beta u)$ частотного дискриминатора системы ЧФАП. Такие предельные циклы располагаются как в области $u > 0$, так и в области $u < 0$ фазового пространства. С целью получения представления о динамике таких режимов системы была построена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (b, μ_1) при значениях параметров $\gamma = 0.25, \varepsilon = 25, \beta = 8, \mu = 4.8, m = 3, a = 0.2, d = 0.8$, когда в системе ЧФАП наблюдаются как периодические, так и хаотические несинхронные режимы. При рассматриваемых значениях параметров γ, m, a и d система (3) имеет в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства шесть состояний равновесия A_1-A_6 . Диаграмма (b, μ_1) приведена на рис. 3, на ней представлены кривые, соответствующие бифуркациям состояния равновесия A_1 , колебательного предельного цикла S_1 и четырех вращательных предельных циклов, локализованных в области $u > 0$ фазового пространства U . Охарактеризуем эти кривые.

Кривая 1 на рис. 3, a – это граница $\mu_1 = \mu_{11}^0$ области устойчивости состояния равновесия A_1 , определяемая (9). В малой окрестности кривой 1 проходят границы $\mu_1 = \mu_{13}^0$ и $\mu_1 = \mu_{15}^0$ областей устойчивости состояний равновесия A_3 и A_5 , также определяемые (9), не изображенные на рис. 3, a , причем $\mu_{11}^0 < \mu_{13}^0 < \mu_{15}^0$. Состояния равновесия A_1, A_3 и A_5 являются устойчивыми при значениях $\mu_1 < \mu_{11}^0, \mu_1 < \mu_{13}^0$ и $\mu_1 < \mu_{15}^0$, соответственно. При пересечении границ $\mu_1 = \mu_{11}^0, \mu_1 = \mu_{13}^0$ и $\mu_1 = \mu_{15}^0$ с возрастанием параметров μ_1 или b в фазовом пространстве U появляются устойчивые колебательные предельные циклы S_1, S_3 и S_5 , соответственно.

Кривая 2 на рис. 3, a отвечает бифуркации рождения в фазовом пространстве устойчивого двумерного тора T_0^1 колебательного типа из предельного цикла S_1 . В малой окрестности кривой 2 проходят кривые, не изображенные на рис. 3, a , от-

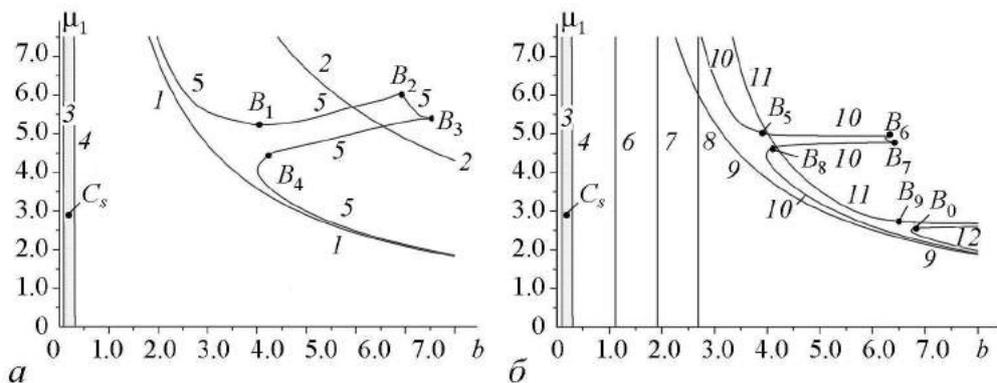


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма (b, μ_1) динамических режимов модели (3) при значениях параметров $\gamma = 0.25, \beta = 8, \varepsilon = 25, m = 3, a = 0.2, d = 0.8, \mu = 4.8$

вечающие бифуркациям рождения в фазовом пространстве устойчивых двумерных торов T_0^1 колебательного типа из предельных циклов S_3 и S_5 . При пересечении этих бифуркационных кривых с возрастанием μ_1 или b вначале возникает тор T_0^1 , затем – торы T_0^3 и T_0^5 . На рис. 4, *a, б* приведены (φ, u) -проекции фазовых портретов циклов S_1, S_3 и S_5 и торов T_0^1, T_0^3 и T_0^5 .

Кривая 3 на рис. 3, *a, б* соответствует образованию в фазовом пространстве U устойчивой петли Π_φ сепаратрисы седло-фокуса A_4 (седловая величина $\sigma = \lambda_4 + \text{Re}\lambda_j < 0, j = 1, 2, 3$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 – корни характеристического уравнения (8) для состояния равновесия A_4). При пересечении кривой 3 с уменьшением b из петли Π_φ рождается устойчивый [20, 24] вращательный предельный цикл L_0^+ . Соответствующие этому циклу (φ, u) -проекция фазового портрета и фрагмент реализации $u(\tau)$ приведены на рис. 4, *в*. Таким образом, в области значений параметров между кривой 3 и линией $b = 0$ в системе ЧФАП одновременно существуют режим синхронизации и асинхронный режим предельного цикла L_0^+ . В области C_s (между кривыми 3 и 4 на рис. 3, *a*) существует только режим синхронизации.

Кривая 4 на рис. 3, *a* и кривые 6, 7, 8 на рис. 3, *б* соответствуют седло-узловым бифуркациям вращательных (2 π -периодических по φ) предельных циклов, расположенных в области $u > 0$ фазового пространства U . При пересечении на плоскости (b, μ_1) кривых 4, 6, 7 и 8 в фазовом пространстве появляются устойчивые предельные циклы L_1^+, L_2^+, L_3^+ и L_4^+ , соответственно. На рис. 5, *a–д* приведены (φ, u) -проекции фазовых портретов этих циклов. Режим цикла L_1^+ существует в области значений μ_1 и b между кривыми 4 и 5 (см. рис. 3, *a*), режим цикла L_2^+ – в области значений μ_1 и b между кривыми 6 и 9 (см. рис. 3, *б*). Область существования режима цикла L_3^+ заключена между кривыми 7 и 10 (см. рис. 3, *б*), область значений μ_1 и b , при которых существует режим цикла L_4^+ , ограничена кривой 8 и кривыми 11 и 12 (см. рис. 3, *б*).

Части кривой 5 выше точки B_1 и ниже точки B_4 (см. рис. 3, *a*) отвечают бифуркации рождения в фазовом пространстве устойчивого двумерного вращательного тора T_1^+ из предельного цикла L_1^+ при пересечении этих частей кривой 5 с

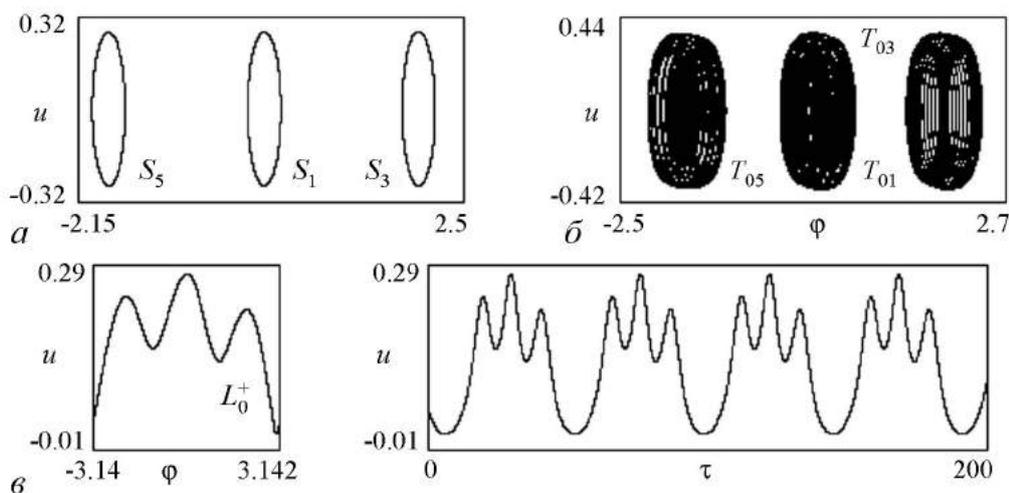


Рис. 4. Аттракторы квазисинхронных и асинхронного режимов, наблюдаемые при изменении параметра b : $b = 4.0$ (*a*); 5.5 (*б*); 0.095 (*в*) ($\gamma = 0.25, \beta = 8, \varepsilon = 25, m = 3, a = 0.2, d = 0.8, \mu = 4.8, \mu_1 = 6.5$)

возрастанием b . Части B_1B_2 и B_3B_4 кривой 5 соответствуют седло-узловой бифуркации предельного цикла L_1^+ , эта бифуркация приводит к исчезновению цикла L_1^+ и прекращению соответствующего ему асинхронного режима при пересечении частей B_1B_2 и B_3B_4 кривой 5 соответственно с возрастанием и уменьшением параметра μ_1 . При пересечении части B_2B_3 кривой 5 наблюдается потеря устойчивости режима предельного цикла L_1^+ в результате бифуркации удвоения периода.

Кривая 9 на рис. 3, б отвечает потере устойчивости предельного цикла L_2^+ через бифуркацию рождения в фазовом пространстве устойчивого двумерного тора T_2^+ вращательного типа при возрастании параметра b . Части кривой 10 выше точки B_5 и точки B_8 (см. рис. 3, б) отвечают рождению в фазовом пространстве устойчивого двумерного вращательного тора T_3^+ из предельного цикла L_3^+ . Тор T_3^+ рождается при переходе через эти части кривой 10 с возрастанием b . Части B_5B_6 и B_7B_8 кривой 10 соответствуют исчезновению предельного цикла L_3^+ в результате седло-узловой бифуркации при пересечении кривых B_5B_6 и B_7B_8 соответственно при возрастании и уменьшении параметра μ_1 . Часть B_6B_7 кривой 10 отвечает бифуркации удвоения периода предельного цикла L_3^+ .

Часть кривой 11 выше точки B_9 и часть кривой 12 ниже точки B_0 (см. рис. 3, б) соответствуют бифуркации рождения устойчивого двумерного тора T_4^+ вращательного типа из предельного цикла L_4^+ . Тор T_4^+ рождается при пересечении указанных кривых с возрастанием параметров μ_1 или b . Часть кривой 11 ниже точки B_9 и часть кривой 12 выше точки B_0 отвечают седло-узловой бифуркации предельного цикла L_4^+ , в результате которой он исчезает при пересечении этих частей кривых 11 и 12 соответственно с возрастанием и уменьшением параметра μ_1 .

На рис. 5 даны (φ, u) -проекции фазовых портретов торов T_1^+ , T_2^+ , T_3^+ и T_4^+ . Результаты, приведенные на рис. 5, показывают развитие режимов предельных циклов L_1^+ , L_2^+ , L_3^+ и L_4^+ при изменении параметра b в интервале $(2.25; 4.0)$ при фиксированном значении параметра $\mu_1 = 6.5$. Видно, что при возрастании b , кроме появления режимов торов T_1^+ , T_2^+ , T_3^+ и T_4^+ , в области $u > 0$ фазового пространства возникает еще один устойчивый вращательный предельный цикл L_5^+ , расположенный выше предельного цикла L_4^+ (рис. 5, e). Численное исследование системы (3) показало, что при возрастании параметра b реали-

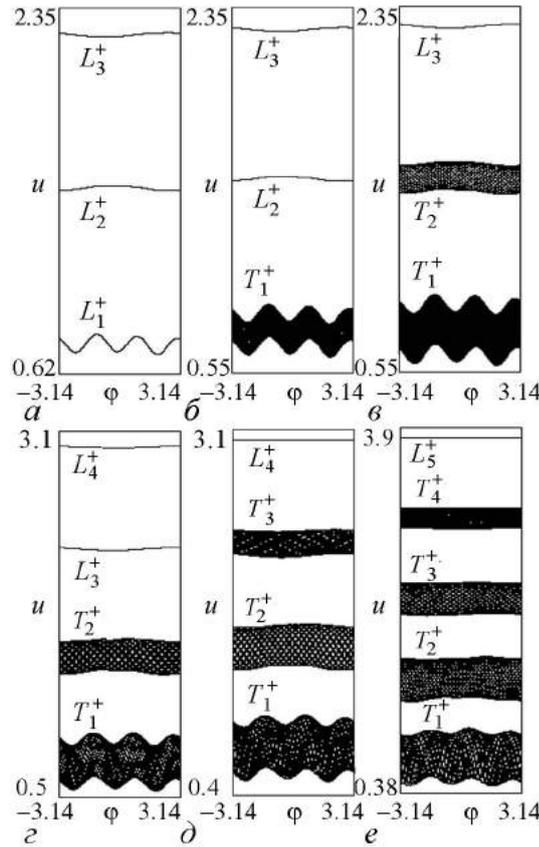


Рис. 5. Аттракторы асинхронных режимов, наблюдаемые в фазовом пространстве при изменении параметра b : $b = 2.25$ (а), 2.45 (б), 2.65 (в), 2.9 (г), 3.3 (д), 4.0 (е) ($\gamma = 0.25$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $m = 3$, $a = 0.2$, $d = 0.8$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 6.5$)

зуются седло-узловые бифуркации, в результате которых в фазовом пространстве появляются устойчивые и седловые вращательные предельные циклы, локализованные выше предельного цикла L_5^+ . Эти предельные циклы при возрастании b испытывают бифуркации рождения устойчивых двумерных вращательных торов, седло-узловые бифуркации и бифуркации удвоения периода. Кроме этого, выяснено существование, наряду с вращательными предельными циклами, расположенными в области $u > 0$ фазового пространства U , аналогичных предельных циклов, локализованных в области $u < 0$ фазового пространства, и бифуркаций этих циклов, аналогичных

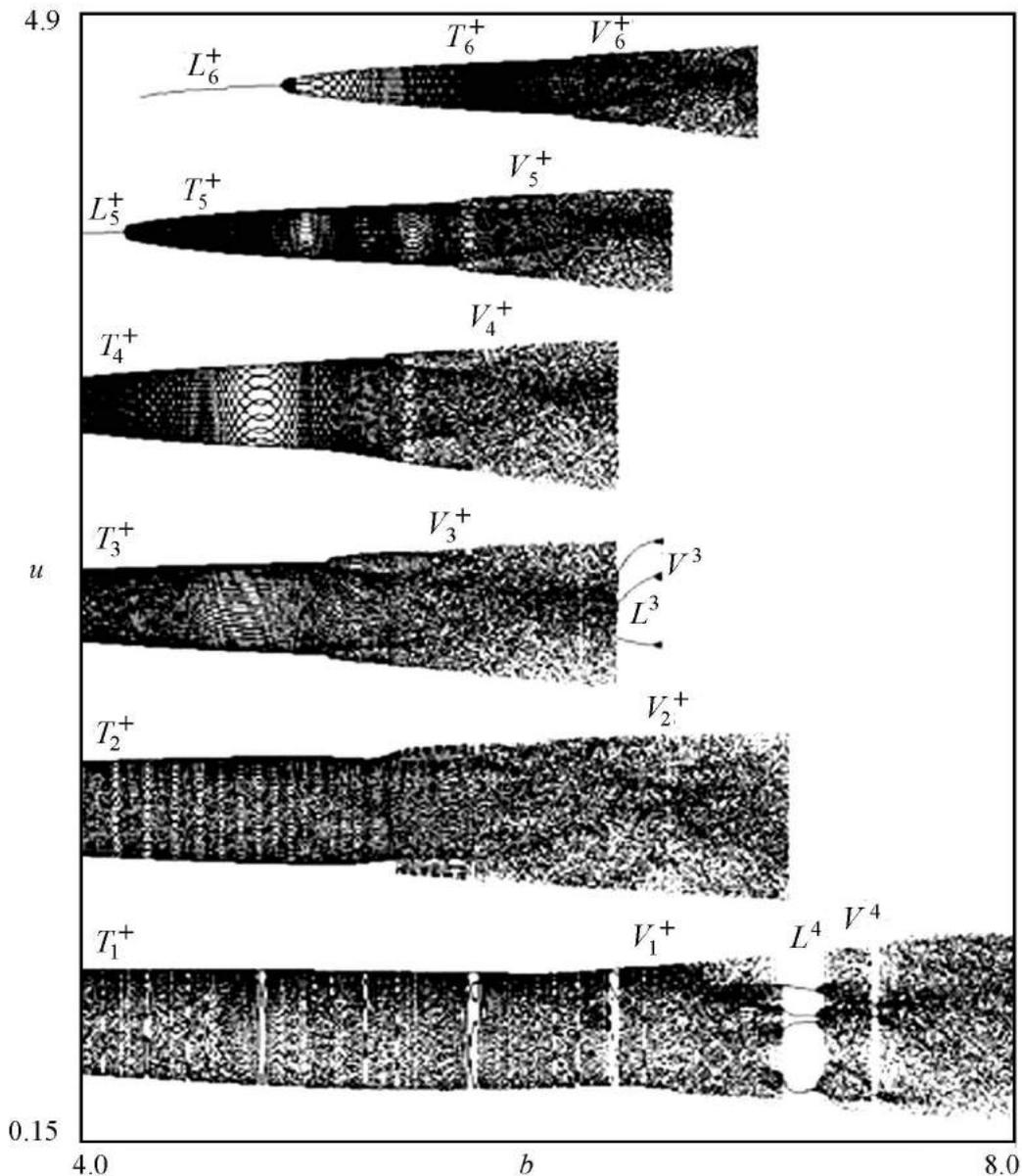


Рис. 6. Эволюция асинхронных режимов, развивающихся в системе на базе предельных циклов L_5^+ , L_6^+ и торов T_1^+ , T_2^+ , T_3^+ , T_4^+ при увеличении параметра b ($\gamma = 0.25$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $m = 3$, $a = 0.2$, $d = 0.8$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 6.5$)

бифуркациям вращательных предельных циклов, расположенных в области $u > 0$. Примечательно, что область устойчивости состояний равновесия и области с вращательными предельными циклами пересекаются на плоскости (b, μ_1) , то есть режим синхронизации и периодические асинхронные режимы, а также периодические квазисинхронные и асинхронные режимы могут существовать в системе ЧФАП одновременно. От начальных значений фазовых переменных зависит, какой из этих режимов реализуется в системе.

Полученные результаты о возможных динамических состояниях системы (3) свидетельствуют о высокой степени мультистабильности системы, которая увеличивается при возрастании параметра b . Рассмотрим особенности динамики системы (3), обусловленные вращательными движениями, локализованными в области $u > 0$ фазового пространства. Развитие асинхронных режимов системы ЧФАП при возрастании параметра b в интервале $(2.25; 4.0)$ характеризуют проекции фазовых портретов аттракторов, приведенные на рис. 5. Эволюцию асинхронных режимов при значениях $b > 4.0$ характеризует однопараметрическая бифуркационная диаграмма (b, u) , построенная при $\mu_1 = 6.5$ и вариации параметра b и приведенная на рис. 6. На рис. 7–9 даны примеры (u, y) -проекций отображения Пуанкаре плоскости $\varphi = -\pi$ в плоскость $\varphi = \pi$, порождаемого фазовыми траекториями системы (3), (φ, u) -проекций фазовых портретов и реализаций колебаний $u(\tau)$, соответствующих аттракторам системы (3), развивающимся в фазовом пространстве U при возрастании b . Анализ диаграммы (b, u) позволил выяснить следующие сценарии развития режимов торов $T_1^+, T_2^+, T_3^+, T_4^+$ и предельного цикла L_5^+ (см. рис. 5) при изменении параметра b от 4.0 до 8.0.

Картина эволюции режима тора T_1^+ (соответствующая этому тору инвариантная замкнутая кривая Γ_1 сечения Пуанкаре приведена на рис. 7, а) характеризуется следующими явлениями: бифуркацией удвоения периода кривой Γ_1 (с образованием двухпетлевой инвариантной замкнутой кривой Γ_1^2), адекватной бифуркации удвоения тора T_1^+ с последующей потерей гладкости [24, 30] кривой Γ_1^2 и возникновением вращательного хаотического аттрактора V_1^+ (рис. 7, б); прекращением хаотических колебаний в режиме аттрактора V_1^+ и жестким переходом к режиму четырехуго-

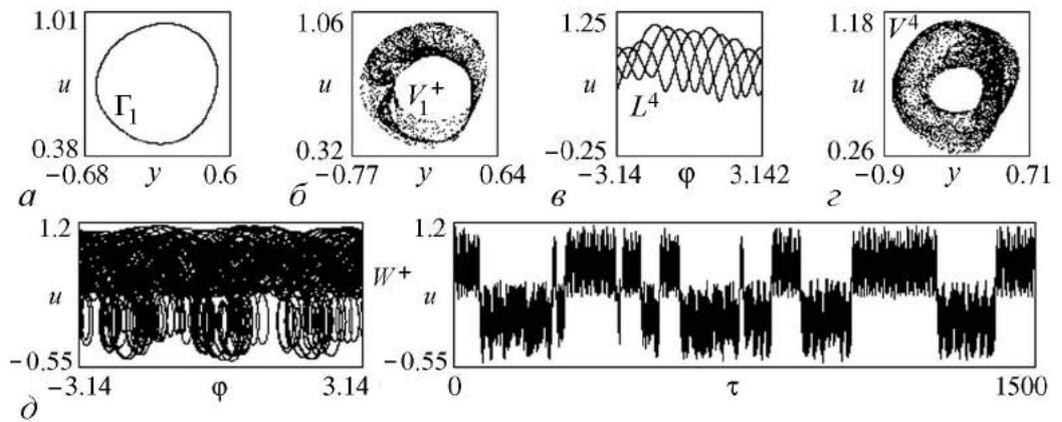


Рис. 7. Примеры аттракторов асинхронных режимов, развивающихся в системе на базе тора T_1^+ , наблюдаемых при изменении параметра b : $b = 6.45$ (а), 6.9 (б), 7.05 (в), 8.15 (г), 8.35 (д) ($\gamma = 0.25, \beta = 8, \varepsilon = 25, m = 3, a = 0.2, d = 0.8, \mu = 4.8, \mu_1 = 6.5$)

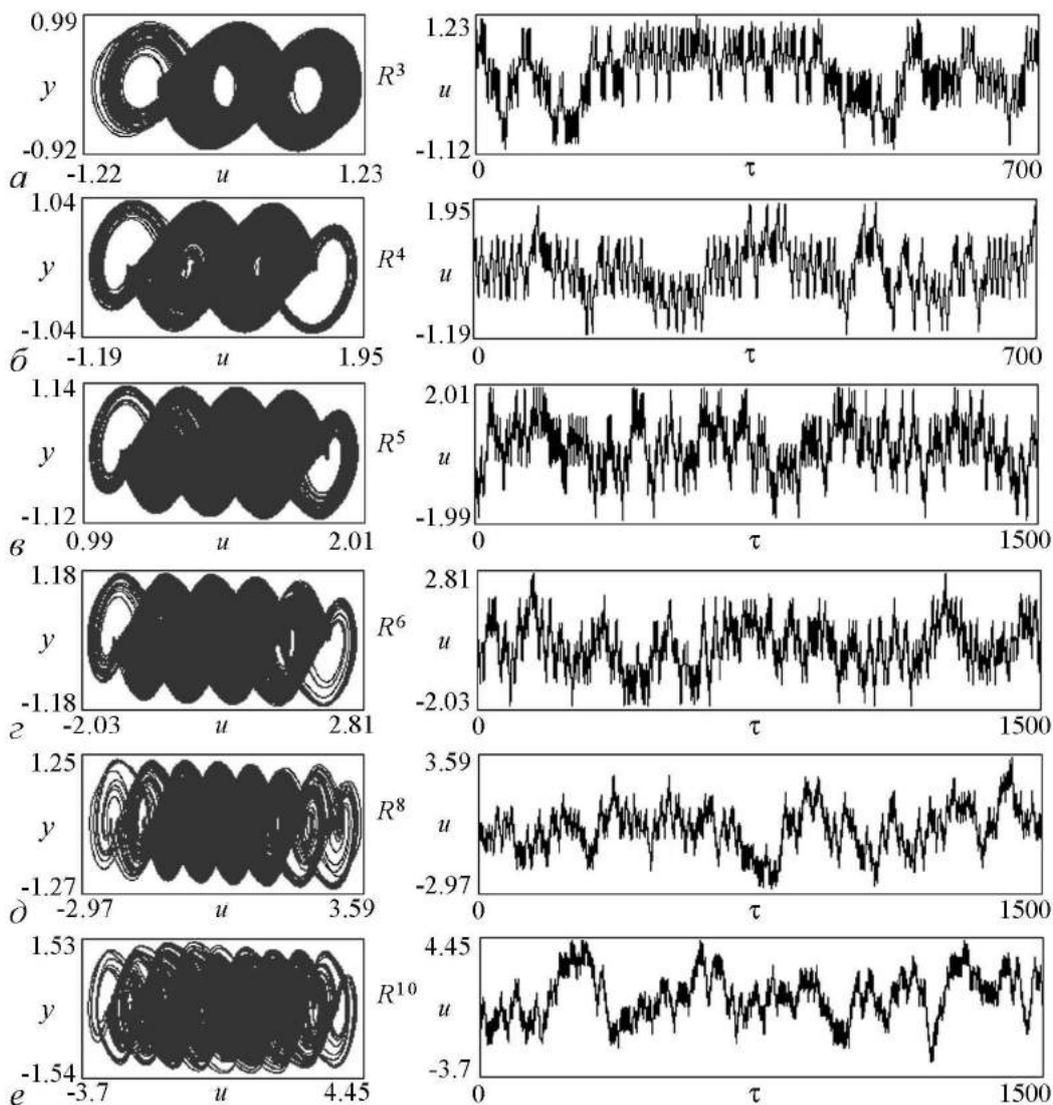


Рис. 8. Примеры сложных хаотических асинхронных режимов с переключениями колебаний, соответствующих аттракторам R^n с $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, при $\mu_1 = 6.5$; $b = 9.8$ (а), 13.0 (б), 15.0 (в), 16.3 (г), 16.8 (д), 20.0 (е) и значениях параметров $\gamma = 0.25$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $m = 3$, $a = 0.2$, $d = 0.8$, $\mu = 4.8$

ротного (8л-периодического по φ) вращательного предельного цикла L^4 (рис. 7, в); бифуркациями удвоения периода цикла L^4 и образованием вращательного хаотического аттрактора V^4 (рис. 7, г); преобразованием аттрактора V^4 в хаотический аттрактор W^+ колебательно-вращательного типа (рис. 7, д). Для режима аттрактора W^+ характерны нерегулярно переключающиеся хаотические движения колебательного и вращательного типа. Интересно, что вид реализации $u(\tau)$ и (u, y) -проекция фазового портрета хаотического аттрактора W^+ напоминают двухспиральный хаотический аттрактор с переключениями переменной u .

При дальнейшем возрастании параметра b в фазовом пространстве формируются сложные хаотические аттракторы вращательного типа R^n ($n = 3, 4, 5, \dots$) с n областями сосредоточения вращательных движений и нерегулярными переключе-

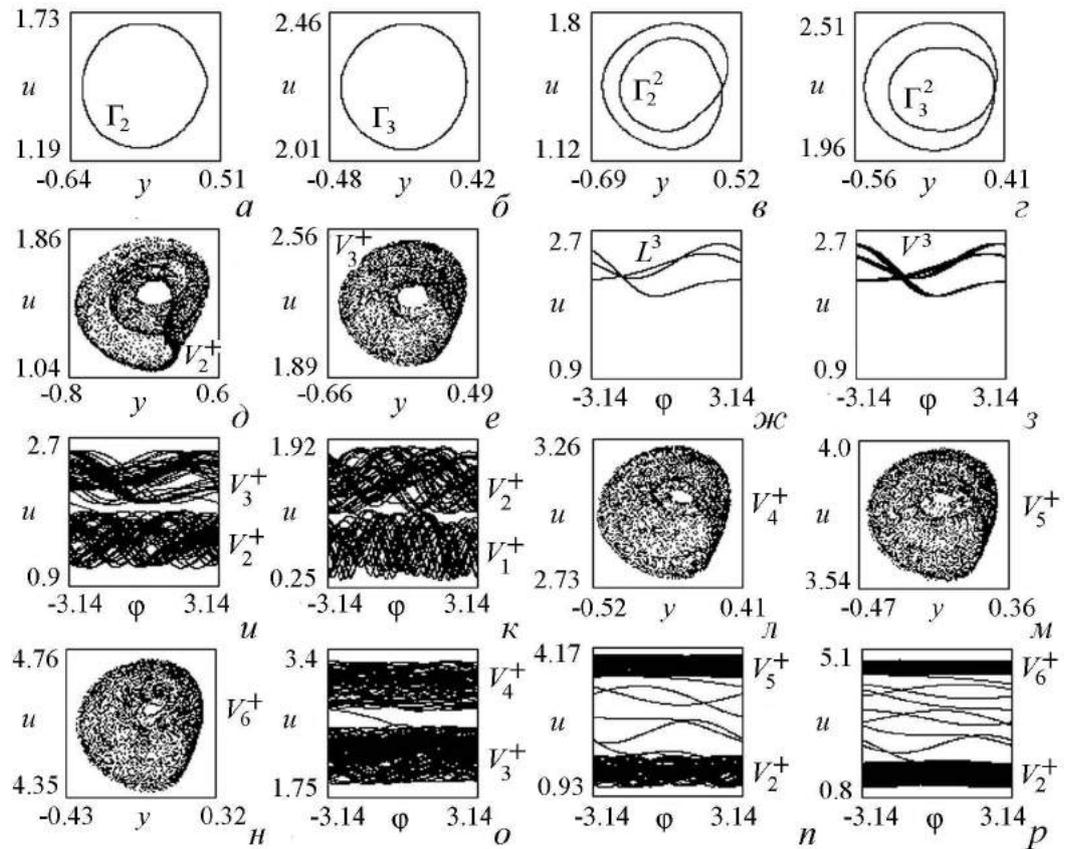


Рис. 9. Аттракторы асинхронных режимов и переходы между режимами, наблюдаемые при изменении параметра b : $b = 5.25$ (а), 5.0 (б), 5.55 (в), 5.3 (г), 6.95 (д), 5.8 (е), 6.35 (ж), 6.483 (з), 6.484 (и), 7.01 (к), 5.85 (л), 6.13 (м), 6.55 (н), 6.279 (о), 6.515 (п), 6.887 (р) ($\gamma = 0.25$, $\beta = 8$, $\varepsilon = 25$, $m = 3$, $a = 0.2$, $d = 0.8$, $\mu = 4.8$, $\mu_1 = 6.5$)

ниями между этими областями. Примечательно, что аттракторы R^n по виду (u, y) -проекций фазовых портретов и реализаций колебаний $u(\tau)$ похожи на хаотические многоспиральные аттракторы колебательного типа, изображенные на рис. 2, а–д. На рис. 8 приведены примеры хаотических аттракторов R^n с $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Видно, что на (u, y) -проекциях фазовых портретов этих аттракторов четко выделяются n областей сосредоточения вращательных движений, между которыми совершаются нерегулярные перебросы. Видно также, как усложняется структура хаотического аттрактора при возрастании параметра b . Об этом усложнении свидетельствуют вычисленные величины максимальных ляпуновских характеристических показателей ρ_m аттракторов R^n , приведенных на рис. 8, – эти показатели имеют значения $0.44, 0.45, 0.75, 0.9, 0.97, 1.07$, соответственно. Как известно, возрастание максимального ляпуновского характеристического показателя свидетельствует об увеличении скорости разбегания близких фазовых траекторий на аттракторе R^n . Отметим, что возможность формирования в системе ЧФАП асинхронных режимов с нерегулярными переключениями колебаний на вращательных хаотических аттракторах R^n обусловлена периодической характеристикой $\Phi(u)$ многочастотного дискриминатора, определяемой (2).

Рассмотрим особенности эволюции режимов торов T_2^+ и T_3^+ при возрастании параметра b (см. рис. 6). Они характеризуются бифуркациями удвоения этих торов, когда соответствующие торам T_2^+ и T_3^+ инвариантные замкнутые кривые Γ_2 и Γ_3 сечения Пуанкаре (рис. 9, а, б) становятся двухпетлевыми Γ_2^2 и Γ_3^2 (рис. 9, в, з), и переходом к режимам вращательных хаотических аттракторов V_2^+ и V_3^+ (рис. 9, д, е) в результате потери гладкости кривых Γ_2^2 и Γ_3^2 . Режим аттрактора V_3^+ жестко сменяется режимом трехоборотного (6л-периодического по φ) предельного цикла L^3 (рис. 9, ж), на базе которого в фазовом пространстве формируется вращательный хаотический аттрактор V^3 (рис. 9, з). От режима аттрактора V^3 система жестко переходит к режиму хаотического аттрактора V_2^+ (рис. 9, и). В свою очередь, при дальнейшем возрастании b система от режима аттрактора V_2^+ жестко переключается на режим хаотического аттрактора V_1^+ (рис. 9, к).

Эволюция режимов тора T_4^+ и торов T_5^+ и T_6^+ , возникающих из предельных циклов L_5^+ и L_6^+ (см. рис. 6) при возрастании b , имеет характер, похожий на характер развития режимов торов T_2^+ и T_3^+ . Отличие состоит в том, что, во-первых, при возрастании b наблюдаются две бифуркации удвоения периода инвариантных замкнутых кривых Γ_4 , Γ_5 и Γ_6 в сечении Пуанкаре с образованием четырехпетлевых инвариантных замкнутых кривых Γ_4^2 , Γ_5^2 и Γ_6^2 , а во-вторых, переходы к режимам вращательных хаотических аттракторов V_4^+ , V_5^+ и V_6^+ (рис. 9, л, м, н) происходят через разрушение кривых Γ_4^2 , Γ_5^2 и Γ_6^2 в результате потери гладкости. При дальнейшем возрастании b последовательно реализуются (см. рис. 6) жесткие переходы от режима аттрактора V_4^+ к режиму аттрактора V_3^+ (рис. 9, о), от режима аттрактора V_5^+ к режиму аттрактора V_2^+ (рис. 9, н) и от режима аттрактора V_6^+ к режиму аттрактора V_2^+ (рис. 9, п).

Представленные результаты исследования динамики системы (3) показывают, что в системе ЧФАП с двухканальным фазовым дискриминатором и многочастотным дискриминатором с характеристиками, определяемыми (2), и одинаковыми фильтрами третьего порядка в цепях фазового и частотного управления создаются возможности для реализации множества разнообразных периодических, квазипериодических и хаотических автомодуляционных колебательных режимов управляемого генератора.

Заключение

В данной работе представлены результаты исследования режимов динамического поведения и нелинейных явлений в модификации автогенераторной частотно-фазовой системы, в которой используются двухканальный фазовый дискриминатор и многочастотный дискриминатор с периодической характеристикой. Исследование проведено на основе математической модели (3) с двумя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве. Выяснено, что указанная модификация системы ЧФАП, которая отражается в появлении в системе периодических нелинейностей, определяемых (2), приводит к качественно новым эффектам в динамике системы – увеличению числа состояний равновесия в области $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ фазового пространства, возможности возникновения сложных квазисинхронных режимов на хаотических многоспиральных аттракторах, характерных для многоустойчивых динамиче-

ских систем, и асинхронных режимов на колебательно-вращательных хаотических аттракторах с колебательной стадией движений на многоспиральных хаотических аттракторах, а также возможности возникновения асинхронных режимов на вращательных хаотических аттракторах с нерегулярными переходами между различными колебательными состояниями.

Получены условия существования синхронного режима, определяющие границу области его удержания при изменении параметров системы. Выяснено, что поведение системы вне области удержания синхронного режима является достаточно сложным и разнообразным. Выявлено одновременное существование в рассматриваемой системе ЧФАП множества периодических, квазипериодических и хаотических автомодуляционных режимов, в том числе и таких, которые невозможны в традиционной системе ЧФАП, которое обуславливает высокую степень мультистабильности системы. Обнаружены разнообразные сценарии развития автомодуляционных режимов управляемого генератора при изменении параметров системы. Примечательно, что явления сложной динамики наблюдаются в системе, в том числе и при относительно небольших величинах параметра инерционности μ_1 и параметра b , характеризующего степень влияния частотной цепи управления.

Представленные в работе данные о динамических режимах модифицированной системы ЧФАП могут быть полезными при решении задач управления характеристиками генерируемых в системе колебательных процессов и перевода в колебательный режим с желаемыми свойствами. Новые квазисинхронные и асинхронные режимы модифицированной системы ЧФАП представляют практический интерес для получения имеющих равномерный спектр широкополосных колебаний с хаотической модуляцией их неэнергетических параметров: частоты и фазы и применения таких сигналов в информационно-коммуникационных системах с прямохаотической передачей данных [4, 5, 31].

Библиографический список

1. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
2. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
3. Каганов В.И. Радиоэлектронные системы автоматического управления. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия–Телеком, 2009. 432 с.
4. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840–849.
5. Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В. Генерация сверхширокополосного хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 6. С. 709–718.
6. Шахтарин Б.И., Кобылкина П.И., Сидоркина Ю.А., Кондратьев А.В., Митин С.В. Генераторы хаотических колебаний: Учебное пособие. М.: Гелиос АРВ, 2007. 248 с.

7. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
8. Каганов В.И., Терещенко С.В. Помехоустойчивость двухкольцевой системы автоматического управления // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 3. С. 353.
9. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75–91.
10. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Хаотическая и регулярная динамика автогенераторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205–214.
11. Пономаренко В.П. Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33–51.
12. Пономаренко В.П. Динамические режимы и нелинейные эффекты в автогенераторе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 18–40.
13. Матросов В.В. Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 4. С. 334–342.
14. Матросов В.В. Моделирование динамики системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. «Математическое моделирование и управление». 2006. Вып. 2(31). С. 17–28.
15. Капранов М.В., Романов Е.В. Линейные модели системы ЧАП с дискриминатором на линии задержки // Радиотехника. 1988. № 11. С. 34–38.
16. Пономаренко В.П. Нелинейные эффекты в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 66–84.
17. Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифуркации в системе частотно-фазовой автоподстройки с многочастотным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 2. С. 186–200.
18. Chernobayev V.G., Kapranov M.V. Investigation of multi channel phase discriminator phase locked loops // Proceedings of 2nd International Conference «Control of Oscillations and Chaos». July 5–7, St. Petersburg, Russia. 2000. Vol. 1. P. 130–132.
19. Chernobayev V.G., Kapranov M.V. Chaos in two-channel phase locked loops with multi-frequency discriminators // Perspective Technologies in Information. Vladimir: IENR, 1999. Vol. 2. P. 282–285.
20. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
21. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
22. Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л. Электронная синергетика. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1989. 248 с.

23. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 336 с.
24. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
25. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.
26. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
27. *Madan R.N.* (Editor). *Chua's Circuits: A Paradigm for Chaos* // World Scientific Series on Nonlinear Science, series B. 1993. Vol. 1. World Scientific, Singapore. 1043 p.
28. *Suykens J.A.K., Vanderwalle J.* Generation of n -double scrolls ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) // IEEE Transaction on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications. 1993. Vol. 40, No 11. P. 861–867.
29. *Bilotta E., Pantano P., Stranges F.* A gallery of Chua attractors: Part 1 // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, No 1. P. 1–60.
30. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.М., Тюрюкина Л.В.* Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
31. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса / Под общ. ред. А.С. Дмитриева. М.: Техносфера, 2012. 424 с.

References

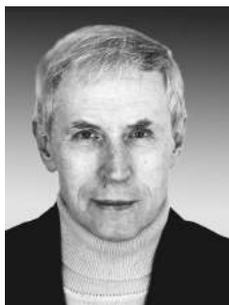
1. Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. Theory of Oscillations in Radio Engineering. Moscow: Nauka, 1984. 320 p. (in Russian).
2. Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Nonlinear Dynamics of Phase-Locked Systems. Nizhny Novgorod: Izdatel'stvo Nizhegorodskogo Universiteta, 2013. 366 p. (in Russian).
3. Kaganov V.I. Radio Electronics Automatic Control Systems: Computerized course. Train aid for institutions of higher learning. Moscow: Hot line-Telecom, 2009. 432 p. (in Russian).
4. Dmitriev A.S. Shirokov M.E. Choice of Generator for a Direct Chaotic Communication System. *Journal of Communication Technology and Electronics*. 2004. Vol. 49, No7. P. 790.
5. Dmitriev A.S., Kletsov A.V., Kuz'min L.V. Generation of Ultrawideband Phase Chaos in the Decimeter Band. *Journal of Communication Technology and Electronics*. 2009. Vol. 54, No6. P. 675.
6. Shakhtarin B.I., Kobylkina P.I., Sidorkina Yu.A., Kondrat'ev A.V., Mitin S.V. Generators of Chaotic Oscillations: Train aid. Moscow: Gelios ARV, 2007. 248 p. (in Russian).
7. Kapranov M.V. About the capture range at the automatic frequency-phase control. *Nauchnye Doklady Vyshei Shkoly. Seriya «Radiotekhnika i Elektronika»*. 1958. Vol. 2, No9. P. 162. (in Russian).
8. Kaganov V.I., Tereshenko S.V. Noise-Immunity of the Double-Loop System of Automatic Control. *Journal of Communication Technology and Electronics*. 2012. Vol. 57. № 3. P. 323.

9. Ponomarenko V.P., Tikhonov E.A. Dynamics of a phase-frequency-feedback oscillator with an inverted frequency discriminator characteristic. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2003. Vol. 11, No6. P. 75–91. (in Russian).
10. Ponomarenko V.P., Tikhonov E.A. Chaotic and regular dynamics of a self-oscillator system with a nonlinear frequency-phase control loop. *Journal of Communication Technology and Electronics*. 2004. Vol. 49, No2. P. 187.
11. Ponomarenko V.P. Dynamical regimes in models of autooscillatory systems with frequency and frequency-phase control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 15, No3. P. 33–51. (in Russian).
12. Ponomarenko V.P. Dynamical regimes and nonlinear phenomena in generator with frequency-phase control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2008. Vol. 16, No 6. P. 18–40. (in Russian).
13. Matrosov V.V. The dynamics of a frequency- and phase-controlled oscillator. *Radio-physics and Quantum Electronics*. 2004. Vol. 47, No 4. P. 297–304.
14. Matrosov V.V. Modeling of dynamics of the frequency-phase control system with the first-order filters. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. Seriya «Mathematical Modeling and Control»*. 2006. Vol. 2(31). P. 17–28. (in Russian).
15. Kapranov M.V., Romanov E.V. Linear models of the automatic frequency control system with a discriminator constructed with the use of a delay line. *Radiotekhnika*. 1988. No11. P. 34–38. (in Russian).
16. Ponomarenko V.P. Nonlinear effects in autooscillatory system with frequency-phase control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 20, No4. P. 66–84. (in Russian).
17. Ponomarenko V.P. Dynamic modes and bifurcations in the frequency-phase lock system with a multiple-frequency discriminator. *Journal of Communication and Electronics*. 2015. Vol. 60, No 2. P. 179–192.
18. Chernobayev V.G., Kapranov M.V. Investigation of multi channel phase discriminator phase locked loops. *Proceedings of 2nd International Conference «Control of Oscillations and Chaos»*. July 5–7, St. Petersburg, Russia. 2000. Vol. 1. P. 130–132.
19. Chernobayev V.G., Kapranov M.V. Chaos in two-channel phase locked loops with multi-frequency discriminators. *Perspective Technologies in Information*. Vladimir: IENR, 1999. Vol. 2. P. 282–285.
20. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2009. 548 p.
21. *Sistemu Fazovoi Synchronizatsii*. Eds V.V. Shakhgildyan, L.N. Belustina. Moscow: Radio and Svyaz, 1982. 288 p. (in Russian).
22. Ermolayev Yu.L., Sanin A.L. *Electronic Synergetics*. Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, 1989. 248 p. (in Russian).
23. Neimark Yu.I. *Dynamic Systems and Controlled Processes*. Moscow: Knizhny Dom «LIBROCOM», 2014. 336 p. (in Russian).
24. Anishchenko V.S. *Complex Oscillations in the Simple Systems*. Moscow: Nauka, 1990. 312 p. (in Russian).

25. Dynamics of Nonlinear Systems. Complex of the Programs for Research of Nonlinear Dynamical Systems with Continuous Time/ Comp. by V.V. Matrosov. N. Novgorod: Izdatel'stvo Nizhegorodskogo Universiteta, 2002. 54 p. (in Russian).
26. Bautin N.N. Behavior of the Dynamic Systems Near-by the Boundaries of Stability Domain. Moscow: Nauka, 1984. 176 p. (in Russian).
27. R.N. Madan (Editor). Chua's Circuits: A Paradigm for Chaos. World Scientific Series on Nonlinear Science, series B. 1993. Vol. 1. World Scientific, Singapore. 1043 p.
28. Suykens J.A.K, Vanderwalle J. Generation of n -double scrolls ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$). *IEEE Transaction on Circuits and Systems-1: Fundamental Theory and Applications*. 1993. Vol. 40. No 11. P. 861–867.
29. Bilotta E., Pantano P., Stranges F. A gallery of Chua attractors: Part 1. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. Vol. 17, No 1. P. 1–60.
30. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.M., Turukina L.V. Physics of Quasiperiodic Oscillations. Saratov: Nauka, 2013. 252 p. (in Russian).
31. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of Chaos / Ed. A.S. Dmitriev. Moscow: Tekhnosfera, 2012. 424 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 31.03.2017

Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1963). В 1968–2015 годах работал в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ ПМК ННГУ). С 2015 года работает в Институте информационных технологий, математики и механики (ИИТММ) ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. С 2013 года – учёный секретарь НИИ ПМК ННГУ. С 2015 года профессор кафедры прикладной математики ИИТММ. Разработал курсы «Качественные методы нелинейной динамики», «Нелинейная динамика и ее приложения». Область научных интересов – теория колебаний, нелинейная динамика, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация», «Системы фазовой синхронизации» и «Взаимодействующие системы с фазовым управлением: регулярная и хаотическая динамика», автор монографии «Нелинейная динамика систем с частотно-фазовым управлением: модели, регулярные и хаотические режимы». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)
 E-mail: ponomarenko@vmk.unn.ru