



## БИФУРКАЦИИ ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СМЕЩЕНИЙ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ БИЕНИЙ ШПИНДЕЛЬНОЙ ГРУППЫ

*В. Л. Заковоротный, В. Е. Гвинджилия*

Донской государственный технический университет  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1

E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinnedden@yandex.ru](mailto:sinnedden@yandex.ru)

*Поступила в редакцию 11.08.2017, после доработки 28.10.2017*

**Предмет исследования.** В статье рассматриваются бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений инструмента в динамической системе обработки резанием на токарных станках в зависимости от периодических траекторий биений шпиндельной группы. Динамическая система представлена двумя взаимодействующими механическими подсистемами через динамическую связь, формируемую процессом резания. В свою очередь, связь представляется моделью сил в координатах состояния, траекториях исполнительных элементов и траекториях биений шпиндельной группы. Модель этой связи является нелинейной. Поэтому свойства системы (устойчивость траекторий и формируемые притягивающие множества деформационных смещений) зависят от параметров биений. В такой системе не только создаются условия для параметрического самовозбуждения, но и формируются зависящие от параметров биений различные притягивающие множества деформационных смещений (предельные циклы, инвариантные торы, хаотические аттракторы).

**Обоснование обращения к исследованию данного вопроса.** Возмущения со стороны шпиндельной группы, зависящие от точности станка и его состояния, при обработке детали вызывают формирование различных притягивающих множеств деформационных смещений инструмента, которые изменяют траектории формообразующих движений инструмента относительно детали, влияющие на геометрическую топологию формируемой поверхности. Исследование направлено на раскрытие влияния динамики процесса резания в единстве параметров биений и формируемых притягивающих множеств на геометрическую топологию обрабатываемой поверхности детали, определяя ее соответствие заданным технологическим требованиям.

**Метод исследования.** Свойства притягивающих множеств деформационных смещений и законы их формирования изучаются на основе цифрового моделирования. Для этого предложена математическая модель возмущенной системы.

**Новизна.** В отличие от ранее выполненных исследований в статье анализируется изменение притягивающих множеств в зависимости от параметров биений. Математическая модель системы представлена возмущенной, а силы представляются в виде суммы сил, действующих на переднюю поверхность инструмента, и сил, формируемых в области контакта его задних граней.

**Полученные результаты.** Показаны примеры влияния биений шпиндельной группы на притягивающие множества деформационных смещений системы, также представлены бифуркации системы в зависимости от параметров возмущения.

**Выводы.** По мере изменения параметров возмущения происходит сложное преобразование притягивающих множеств, поэтому при управлении процессом резания, а также при создании программ ЧПУ необходимо учитывать влияние возмущения на предельно достижимое качество изготовления деталей.

*Ключевые слова:* Бифуркация, притягивающие множества, динамическая режущая система, биения шпиндельной группы.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

*Образец цитирования:* Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в зависимости от биений шпиндельной группы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 38–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

## BIFURCATIONS OF ATTRACTING SETS OF DEFORMATION DISPLACEMENT OF CUTTING TOOL DEPENDING ON THE SPINDLE GROUP BEATS

*V. L. Zakovorotny, V. E. Gvinjiliya*

Don State Technical University  
1 Gagarin sq., 344000 Rostov-on-Don, Russia  
E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinnedden@yandex.ru](mailto:sinnedden@yandex.ru)

*Received 11.08.2017, revised 28.10.2017*

**Subject of the study.** Bifurcations of the attracting sets of the deformation displacement of the tool in the dynamic system of the turning machine depending on the beats periodic trajectory of the spindle group are considered in the article. The dynamic system is represented by the two interact mechanical subsystems through the dynamic link formed by the cutting process. Through the link is represented by the forces model in the coordinate condition, the trajectories of the executive elements and the trajectories of the spindle beats group. The model of this link is nonlinear. Therefore the system characteristics (stability of the trajectories and the forming attracting sets of the deformation displacement) depend on the parameters of the beats. In this system not only the conditions for the parametrical self-excitation are created but the different attracting sets of the deformation displacement (limit cycles, invariant tori, chaotic attractors) depending on the parameters of the beats are formed.

**Substantiation of address to studying of this question.** Disturbances by the spindle group depending on the accuracy and condition of the machine cause formation of the various attracting sets of the deformation displacements of the tool during work-process of the detail. These deformation displacements change the shape-generating trajectories of the tool movement relative to the part which influence the geometric topology of the forming surface. The research intends to discover the influence of the dynamic of the cutting process in the unity of the parameters of the beats and the attracting sets with the geometric topology of the work surface of the detail determined its consistency with the specified technological requirements.

**Method of research.** Characteristics of the attracting sets of the deformation displacement and the laws of its formation are studied on the basis of the digital simulation. Mathematical model of the perturbed system was proposed for this purpose.

**Novelty.** In contrast to previously done researches the transformation of the attracting sets of the deformation displacement depending on the parameters of the beats are analyzed in the article. Mathematical model of the system is performed as perturbed, the forces are the sum of the forces acted on the front surface of the tool and forces formed in the contact area of its back side plane.

**Results.** For instance, the influence of the spindle group beats with the attracting sets of the deformation displacement of the system are presented. Bifurcations of the system depending on the parameters of the disturbance are also represented.

**Conclusions.** The complicated transformation of the attracting sets takes place while disturbance parameters changes. Therefore it's necessary to consider the effect of perturbations on attainable quality of the detail during controlling of the cutting process and in a process of CNC program creation.

*Keywords:* Bifurcation, attracting sets, dynamic cutting system, beats of the spindle.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

*References:* Zakovorotny V.L., Gvinjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of deformation displacement of cutting tool depending on the spindle group beats. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 38–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

## Введение

При становлении знаний о динамике процесса резания главное внимание уделялось условиям и механизмам возбуждения автоколебаний [1–5] и анализу устойчивости [6–10]. Под устойчивостью понимается устойчивость заданной и неизменной точки равновесия, рассматриваемой в подвижной системе координат, движение которой определяется управляемыми траекториями исполнительных элементов. При анализе устойчивости используют линейную динамическую модель в вариациях относительно точки равновесия [1–5]. Динамическая связь также учитывает нелинейную зависимость сил от координат состояния [6–34], периодические изменения параметров [14, 17–19], закономерности формирования новых поверхностей [27]. При рассмотрении устойчивости с периодически изменяющимися параметрами, а также при моделировании формирования новых поверхностей резания используется теория Флоке [14, 21, 30]. В последние годы значительное внимание уделено условиям формирования в динамической системе различных притягивающих множеств упругих деформационных смещений [11, 28, 29, 31–34]. Притягивающие множества рассматриваются в системе, точка равновесия которой в подвижной системе координат является заданной и неизменной. На реальном станке равновесие является возмущенным периодическими пространственными биениями шпиндельной группы. Причем траектории биений входят непосредственно в математическое описание сил резания, определяющее формируемую динамическую связь. Поэтому биения изменяют свойства системы. В отличие от ранее выполненных исследований в статье анализируется изменение притягивающих множеств в зависимости от параметров биений.

## Математическое моделирование

Ранее показано, что наиболее важные свойства динамической системы резания можно раскрыть, если рассматривать деформационные смещения  $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$  только вершины режущего инструмента в пространстве относительно несущей системы станка (рис. 1). Уравнение, раскрывающее связь  $X$  и сил резания, при продольном точении определяется системой [1, 17–19]

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + h \frac{dX}{dt} + cX = F_{\Sigma}, \quad (1)$$

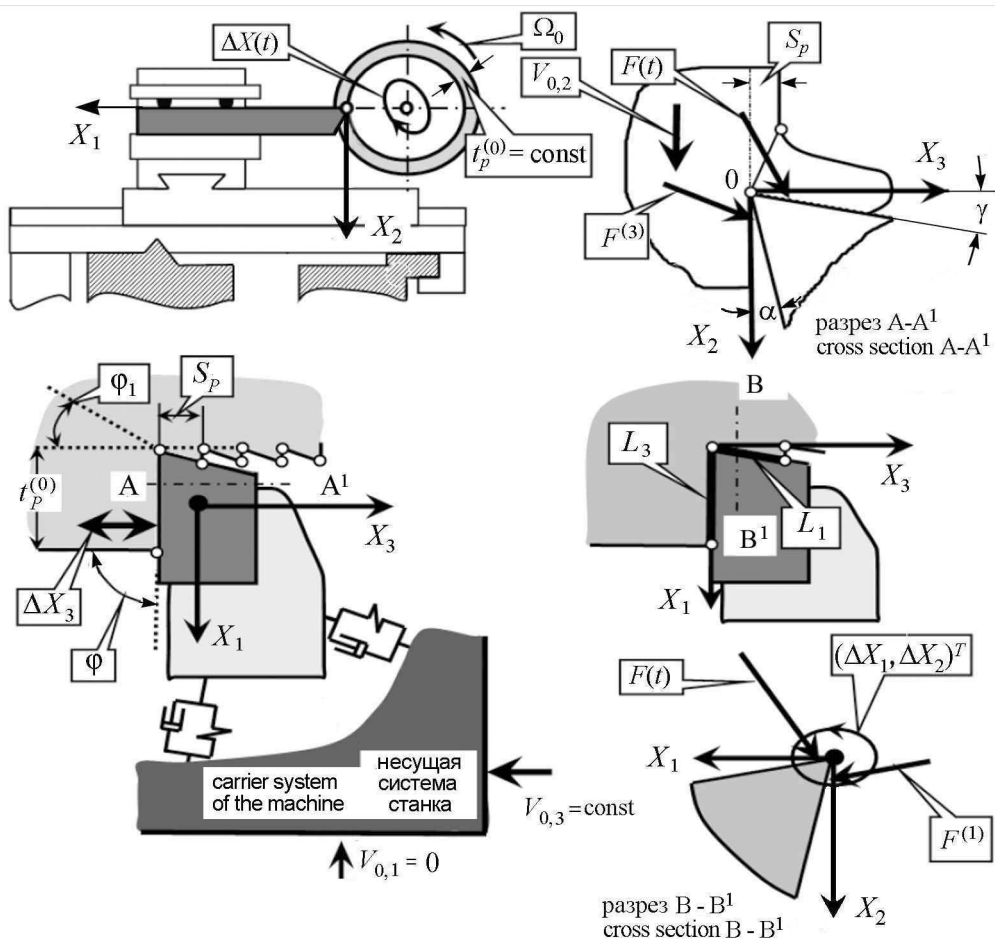


Рис. 1. Ориентация осей деформационных смещений и сил, действующих на режущий инструмент, и возмущений, определяемых биениями шпиндельной группы

Fig. 1. Orientation of the deformation displacement axis and forces acting on cutting tool and the perturbations which are determined by the beats of the spindle group

где  $m = [m_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ ,  $m_{s,k} = m$  при  $s = k$ ,  $m_{s,k} = 0$  при  $s \neq k$  (в  $\text{kg}\cdot\text{s}^2/\text{mm}$ );  $h = [h_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ , (в  $\text{kg}\cdot\text{s}/\text{mm}$ );  $c = [c_{s,k}]$ ,  $s, k = 1, 2, 3$ , (в  $\text{kg}/\text{mm}$ ) – симметричные и положительно определенные матрицы инерционных, скоростных и упругих коэффициентов;  $F_{\Sigma} = F + F^{(i)}$  – силы резания, представленные в координатах состояния и внешних воздействий (биениях шпиндельной группы).

В отличие от ранее выполненных исследований силы представляются в виде суммы сил, действующих на переднюю поверхность инструмента  $F = \{F_1, F_2, F_3\}^T$ , и сил, формируемых в области контакта его задних граней  $F^{(i)} = \{F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}\}^T$ . Раньше влиянием сил  $F^{(i)}$  пренебрегали, так как они зависят от сближения задних граней с обработанной частью детали и без учета биений считались малыми. В рамках настоящего исследования ограничимся случаем, когда дополнительные силы определяются следующим образом:  $F^{(1)} = \{F_1^{(1)}, 0, 0\}^T$ ,  $F^{(2)} = \{0, k_T(F_1^{(1)} + F_3^{(3)}), 0\}^T$  и  $F^{(3)} = \{0, 0, F_3^{(3)}\}^T$ . Здесь  $k_T$  – коэффициент трения в областях контакта задних граней инструмента. Это определяется принятой геометрией инструмента (углы  $\varphi = 0$  и  $\varphi_1 \Rightarrow 0$ ). Кроме этого силы  $F^{(i)}$  зависят не только от скоростей

сближения поверхностей, но и от длины контакта граней инструмента с поверхностью заготовки (рис. 1). Тогда

$$\begin{cases} F_1^{(1)} = \rho_1 \left\{ \int_0^t [V_{0,3} - dX_3/dt] dt + \Delta X_3(t) - X_3 \right\} \exp \{ \alpha_1 [(\Delta V_1(t) - dX_1/dt)] \}, \\ F_3^{(3)} = \rho_3 \left[ t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t) \right] \exp \{ \alpha_3 [V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t)] \}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\rho_1, \rho_3$  – силы, приведенные к длине контакта (в kg/mm);  $\alpha_1, \alpha_3$  – коэффициенты крутизны нарастания сил по мере сближения поверхностей;  $\Delta X_i(t), \Delta V_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – заданные периодические функции, определяемые биениями  $d\Delta X_i(t)/dt = \Delta V_i(t)$ ;  $t_p^{(0)} = \text{const}$  – величина припуска без упругих деформаций;  $V_{0,3} = \text{const}$  – скорость подачи суппорта.

При формировании сил  $F$  учтем их запаздывание по отношению к деформациям [1] и изменение их ориентации в переходных процессах. Тогда справедливо

$$\begin{cases} T_1 dF_1/dt + F_1 = \rho_0 \chi_1 \{ 1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)] \} \times \\ \quad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{ V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t) \} dt, \\ T_2 dF_2/dt + F_2 = \rho_0 \chi_2 \{ 1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)] \} \times \\ \quad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{ V_{0,3} + \Delta V_3(t) - dX_3/dt \} dt, \\ T_3 dF_3/dt + F_3 = \rho_0 \chi_3 \{ 1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)] \} \times \\ \quad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int_{t-T}^t \{ V_{0,3} + \Delta V_3(t) - dX_3/dt \} dt \end{cases} \quad (3)$$

– представление сил  $F$  с учетом запаздывания, определяемого постоянными времени  $T_i, i = 1, 2, 3$ ;  $\rho_0$  – давление стружки на переднюю поверхность в области малых скоростей;  $\mu$  – коэффициент, определяющий соотношение сил при малых и больших скоростях;  $\alpha$  – коэффициент уменьшения сил по мере увеличения скорости резания;  $V_{0,2}$  – скорость резания;  $T = 1/\Omega_0$  – время оборота детали.

Вопросам параметризации модели уделено достаточное внимание [1, 11–13]. Принципиальное отличие систем (1)–(3) заключается в том, что заданные функции  $\Delta X_i(t), \Delta V_i(t)$  входят непосредственно в математическое описание динамической связи, формируемой резанием. Поэтому свойства системы, в том числе формируемые притягивающие множества, зависят от параметров биений. Изучение (1)–(3) выполнено в два этапа. На первом этапе рассматривалась проблема устойчивости. На втором – бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений, возмущенных биениями.

### **Устойчивость стационарных траекторий. Бифуркации притягивающих множеств**

Сложность анализа устойчивости решений системы (1)–(3) и анализа их стационарных состояний определяется тем, что сами решения можно определить только численными методами. В зависимости от частоты биений можно выделить три диа-

пазона. Первый, в котором система при фиксированном времени может рассматриваться замороженной, находится в диапазоне  $\Omega \in (0; 0.1\Omega_0)$ . В рассмотренных ниже примерах  $\Omega_0 = 50$ . Этот частотный диапазон существенно ниже собственных частот колебаний инструмента. Однако на динамику системы оказывает влияние оператор формирования подачи в уравнениях (2) и (3), который является оператором скользящего среднего, и он вызывает перераспределение сил и деформационных смещений в области, зависящей от частоты вращения шпинделя. Второй, в котором наблюдаются условия параметрического самовозбуждения и сложная динамика формирования различных притягивающих множеств, находится в диапазоне  $\Omega \in (5; 500)$ . Третий диапазон  $\Omega \in (500; \infty)$  лежит за собственными частотами подсистемы инструмента. Здесь биения изменяют усредненные по периодам высокочастотных колебаний параметры связи и, следовательно, динамику.

Вначале рассмотрим первый диапазон и проанализируем устойчивость траекторий. Пусть задана «медленно» изменяющаяся точка равновесия  $X_i^* = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Будем считать ее замороженной. В этом случае для фиксированного  $t = t_k$  справедливо:  $\Delta V_i(t_k) = \text{const}$ ,  $\Delta X_i(t_k) = \text{const}$ . Им соответствуют  $X^*(t_k) = \{X_1^*(t_k), X_2^*(t_k), X_3^*(t_k)\}^T = \text{const}$  – это точка равновесия. Она характеризуется отсутствием изменений в деформационных смещениях и вычисляется для фиксированного  $t = t_k$  при  $d^2 X/dt^2 = dX/dt = 0$ , а также  $dF/dt = 0$ . Тогда

$$A(t_k) \cdot X^*(t_k) = \Phi(t_k), \quad (4)$$

где  $X^*(t_k) = \{X_1^*(t_k), X_2^*(t_k), X_3^*(t_k)\}^T$ ;  $\Phi = \{F_1^*, F_2^*, F_3^*\}^T$ ;

$$F_1^* = \rho_1[(S_p^{(0)} - \Delta X_3(t_k)) \exp[\alpha_1 \Delta V_1(t_k)] + \rho_0 \chi_1 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)] S_{p,\Sigma}^{(0)}];$$

$$F_2^* = k_T \{[\rho_1(S_p^{(0)} - \Delta X_3(t_k)) \exp[\alpha_1 \Delta V_1(t_k)] + [\rho_3(t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)) \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))]] + \rho_0 \chi_2 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)] S_{p,\Sigma}^{(0)}];$$

$$F_3^* = [\rho_3(t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)) \exp \alpha_3 [V_{0,3} + \Delta V_3(t_k)] + \rho_0 \chi_3 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)] S_{p,\Sigma}^{(0)}];$$

$$A = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \rho_0 \chi_1 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} S_{p,\Sigma} & c_{2,1} & c_{3,1} + \rho_1 \exp[\alpha_1(\Delta V_1(t_k))] \\ c_{1,2} + k_T \rho_3 \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))] + \rho_0 \chi_2 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} S_{p,\Sigma}^{(0)} & c_{2,2} & c_{3,1} + k_T \rho_1 \exp[\alpha_1(\Delta V_1(t_k))] \\ c_{1,3} + \rho_3 \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))] + \rho_0 \chi_3 \{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\} S_{p,\Sigma}^{(0)} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix};$$

$S_{p,\Sigma} = S_p^{(0)} + \Delta S_p$ ;  $\Delta S_p$  – дополнительное изменение текущей подачи за счет параметров биений шпиндельной группы.

В том случае, если при всех  $t_k \in T^{(B)}$  система является асимптотически устойчивой (здесь  $T^{(B)}$  – период биений), то вычисленная траектория является аттрактором, то есть притягивающим множеством. Для анализа ее устойчивости необходимо [35] рассмотреть линеаризованное уравнение в вариациях относительно  $X^*$ . После замены  $X_i(t) = x_i(t) + X_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и  $F_i(t) = f_i(t) + F_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , вычислим уравнение в вариациях и линеаризуем его в окрестности  $X^*$ . Тогда имеем

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + H \frac{dz}{dt} + Cz = 0, \quad (5)$$

где  $z(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}^T$ ;

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \Leftrightarrow \\ c_{1,2} + k_0 \rho_3 \exp(\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3)) & c_{2,2} & \Leftrightarrow \\ c_{1,3} + \rho_3 \exp(\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3)) & c_{2,3} & \Leftrightarrow \\ \chi_1 \rho_0 S_{p,\Sigma} [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow \\ \chi_2 \rho_0 S_{p,\Sigma} [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow \\ \chi_3 \rho_0 S_{p,\Sigma} [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow \\ \\ \Leftrightarrow & c_{3,1} + \rho_1 \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & -1 & 0 & 0 \\ \Leftrightarrow & e c_{3,2} + k_0 \rho_1 \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & 0 & -1 & 0 \\ \Leftrightarrow & c_{3,3} & 0 & 0 & -1 \\ \Leftrightarrow & \chi_1 \rho_0 (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 1 & 0 & 0 \\ \Leftrightarrow & \chi_2 \rho_0 (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & 1 & 0 \\ \Leftrightarrow & \chi_3 \rho_0 (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H = \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
h_{1,1} + \rho_1 \alpha_1 S_{p,\Sigma} \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & & h_{2,1} & \Leftrightarrow & & \\
h_{1,2} + k_0 \rho_1 \alpha_1 S_{p,\Sigma} \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & & h_{2,2} & \Leftrightarrow & & \\
& h_{1,3} & & & h_{2,3} & \Leftrightarrow \\
0 & & -\chi_1 \rho_0 \alpha S_{p,\Sigma} (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & \Leftrightarrow & & \\
0 & & -\chi_2 \rho_0 \alpha S_{p,\Sigma} (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & \Leftrightarrow & & \\
0 & & -\chi_3 \rho_0 \alpha S_{p,\Sigma} (t_{p,\Sigma} - X_1^*) [1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & \Leftrightarrow & & \\
\hline
& \Leftrightarrow & h_{3,1} & & -1 & 0 & 0 \\
& \Leftrightarrow & h_{3,2} + \rho_3 \alpha_3 (t_{p,\Sigma} - X_1^*) \exp(\alpha_3 \Delta V_3) & & 0 & -1 & 0 \\
& \Leftrightarrow & h_{3,3} + \rho_3 \alpha_3 (t_{p,\Sigma} - X_1^*) \exp(\alpha_3 \Delta V_3) & & 0 & 0 & -1 \\
& \Leftrightarrow & 0 & & 1 & 0 & 0 \\
& \Leftrightarrow & 0 & & 0 & 1 & 0 \\
& \Leftrightarrow & 0 & & 0 & 0 & 1
\end{array} \right].$$

Необходимо отметить, что в (5) большинство коэффициентов зависят от параметров биений, и они являются функциями медленных смещений равновесия  $X^*$ . Им соответствуют замкнутые траектории деформационных смещений и траекторий корней характеристического полинома. Они могут на определенных временных промежутках переходить в правую комплексную полуплоскость. Тогда равновесие становится неустойчивым. Так как система является нелинейной, то на этих временных отрезках в окрестности траектории могут формироваться различные притягивающие множества. Причем, в пределах периода биений возможна динамическая перестройка свойств системы.

Проанализируем изменение ее свойств на примере. Параметры приведены в табл. 1, а модели сил в координатах состояния – в табл. 2. Для удобства дальнейшего анализа примем  $T_1 = T_3 = 0.5T_2 = T_p$ .

Если возмущения отсутствуют, то система имеет единственную точку равновесия и постоянные параметры. Тогда ее свойства можно рассматривать на основе хорошо разработанных методов анализа устойчивости систем с постоянными коэффициентами. Потеря устойчивости определяется следующими механизмами. Во-первых, возможно параметрическое самовозбуждение. Во-вторых, потерю устойчивости могут вызвать запаздывания сил по отношению к вариациям площади срезаемого слоя. В-третьих, потери устойчивости может способствовать падающий участок зависимости сил от скорости. В-четвертых, потеря устойчивости возможна за счет динамического смещения постоянной составляющей параметров, если они близки к границе областей устойчивости. Наконец, если параметры находятся вблизи границы устойчивости, то за счет их изменения система может заходить в область неустойчивости и в дальнейшем в устойчивую область не возвращаться. Этот механизм зависит от добротности подсистемы инструмента. При вычислении необходимо согласование параметров модели и технологических режимов. Это относится, преж-



де всего, к согласованию времени  $T$  в операторе  $\int_{t-T}^t V(\xi) d\xi$  со скоростью подачи. Кроме этого, модуль амплитуды смещений биений не может превышать величины припуска, а колебательные скорости в направлении  $X_2$  не должны превышать скорость резания. В противном случае должны наблюдаться временные отрезки, при которых нарушается контакт инструмента с зоной резания. В этом случае необходимо усложнить модель динамической связи, и учесть переменную структуру модели.

Приведем примеры областей устойчивости (рис. 2) для системы без биений. Они вычислены для режимов: продольная подача  $S_p = 0.1\text{mm}$ , глубина  $t_p = 2.5\text{mm}$ ,

Таблица 1. Параметры динамической системы  
Table 1. Parameters of the dynamic system

$h_{1,1}$ , kg·s/mm	$h_{2,2}$ , kg·s/mm	$h_{3,3}$ , kg·s/mm	$h_{1,2} = h_{2,1}$ , kg·s/mm	$h_{1,3} = h_{3,1}$ , kg·s/mm	$h_{2,3} = h_{3,2}$ , kg·s/mm
0.25	0.15	0.15	0.1	0.08	0.08
$c_{1,1}$ , kg/mm	$c_{2,2}$ , kg/mm	$c_{3,3}$ , kg/mm	$c_{1,2} = c_{2,1}$ , kg/mm	$c_{1,3} = c_{3,1}$ , kg/mm	$c_{2,3} = c_{3,2}$ , kg/mm
1000	800	800	200	100	100

Таблица 2. Параметры модели сил в координатах состояния  
Table 2. Parameters of the force model in the state coordinates

$\rho_0$ , kg/mm <sup>2</sup>	$\alpha$ , s/mm	$\alpha_1$ , s/mm	$\alpha_2$ , s/mm	$T$ , s	$\rho_1$ , kg/mm	$\rho_3$ , kg/mm
50–900	0.01–0.1	0.2–0.5	0.2–0.5	0.01–0.1	0.5–5.0	0.5–5.0

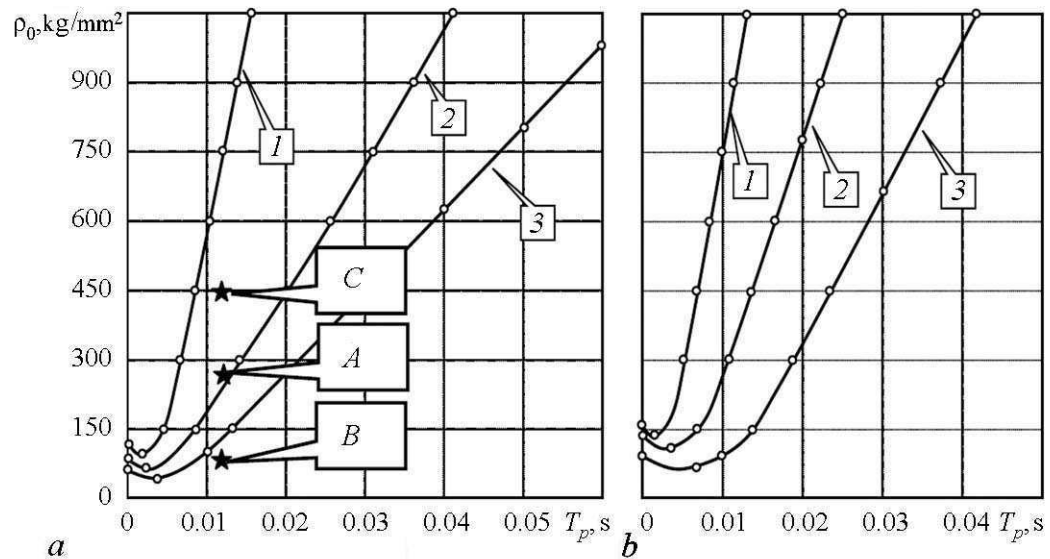


Рис. 2. Области устойчивости невозмущенной системы в плоскости  $\langle T_p - \rho_0 \rangle$ :  $\alpha = 0.05$  (a);  $0.00$  (b). Кривые: 1 –  $k_h = 1.0$ ; 2 –  $k_h = 0.5$ ; 3 –  $k_h = 0.2$

Fig. 2. Stability areas of not perturbation system in the plane  $\langle T_p - \rho_0 \rangle$ :  $\alpha = 0.05$  (a);  $0.00$  (b). Curves: 1 –  $k_h = 1.0$ ; 2 –  $k_h = 0.5$ ; 3 –  $k_h = 0.2$

скорость  $V_{2,0} = 1000$  mm/s. Система устойчива снизу от фигуративных линий. На устойчивость существенно влияют матрицы  $c$  и  $h$ . На иллюстрациях даны области для различных коэффициентов  $k_h$  ( $h_0 = k_h h$ ). Что касается матрицы жесткости, то на устойчивость значительное влияние оказывает коэффициент  $c_{3,3}$ , который формирует связь между силами и деформационными смещениями инструмента в направлении подачи. Заметим, что чувствительность изменения сил к деформационным смещениям в направлении  $X_3$  наибольшая, так как обычно  $t_p \gg S_p$ .

Далее ограничимся случаем  $\Delta X(t) = \Delta X_0 \{\sin \Omega t, \sin(\Omega t + \pi/2)\}^T$ . Радиальные биения моделируются круговыми траекториями движения центра вращения заготовки против часовой стрелки в плоскости  $X_1 - X_2$ . Это согласуется с нашими экспериментами и известными данными [36]. Траектории биений обусловлены формированием циркуляционных сил при взаимодействии роторных систем с трением [37]. Приведем также характерный пример вычисленных пространственных траекторий деформационных смещений (рис. 3) с параметрами, соответствующими точкам  $A$  и  $B$  на рис. 2,  $a$ . На иллюстрации видно, что при удалении параметров от границы области устойчивости (рис. 3,  $a$ ) траектория в плоскости  $X_1 - X_2$  является устойчивой. При приближении параметров к границе области устойчивости невозмущенной системы вдоль траектории наблюдается динамическая перестройка свойств (рис. 3,  $b$ ). Можно выделить два участка асимптотически устойчивой траектории (участки «1-2» и «3-4»), два участка, на которых вдоль траектории формируются притягивающие множества типа предельных циклов с изменяющейся амплитудой (участки «2-3», «4-5» и «6-1»), а также участок «5-6», на котором образуется хаотическая динамика. Приведенная иллюстрация соответствует частоте биений равной 0.3 Гц. Таким образом, при определенных параметрах уже в пределах периода биений мы наблюдаем бифуркации притягивающих множеств, формируемых в окрестности деформационных смещений. По мере увеличения частоты в зависимости от амплитуды биений изменяется топология притягивающих множеств (рис. 4), в частности, устойчивость. На приведенной иллюстрации мы ограничились частотным диапазоном (50–600) Гц. Диаграммы построены на основе использования численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений по сетке. При этом обработано

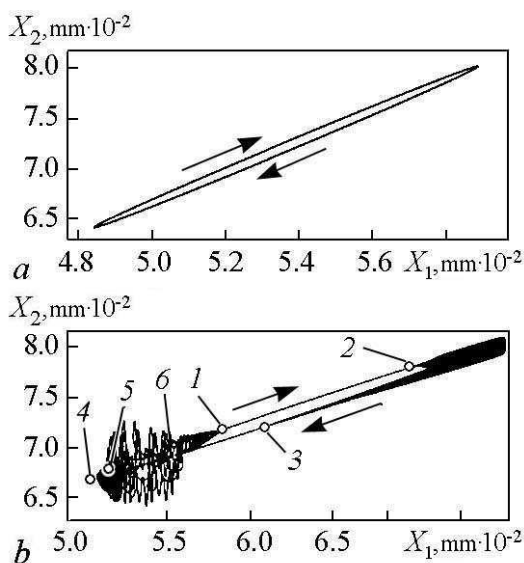


Рис. 3. Пример замкнутых траекторий деформационных смещений вершины инструмента в точках  $A$  и  $B$  на рис. 2,  $a$  – траектория, соответствующая точке  $B$ ;  $b$  – траектория, соответствующая точке  $A$

Fig. 3. The examples of the closed trajectories of the deformation displacement of the tool tip in points  $A$  and  $B$  at the fig. 2,  $a$  – the trajectory is corresponding to the point  $B$ ;  $b$  – the trajectory is corresponding to the point  $A$

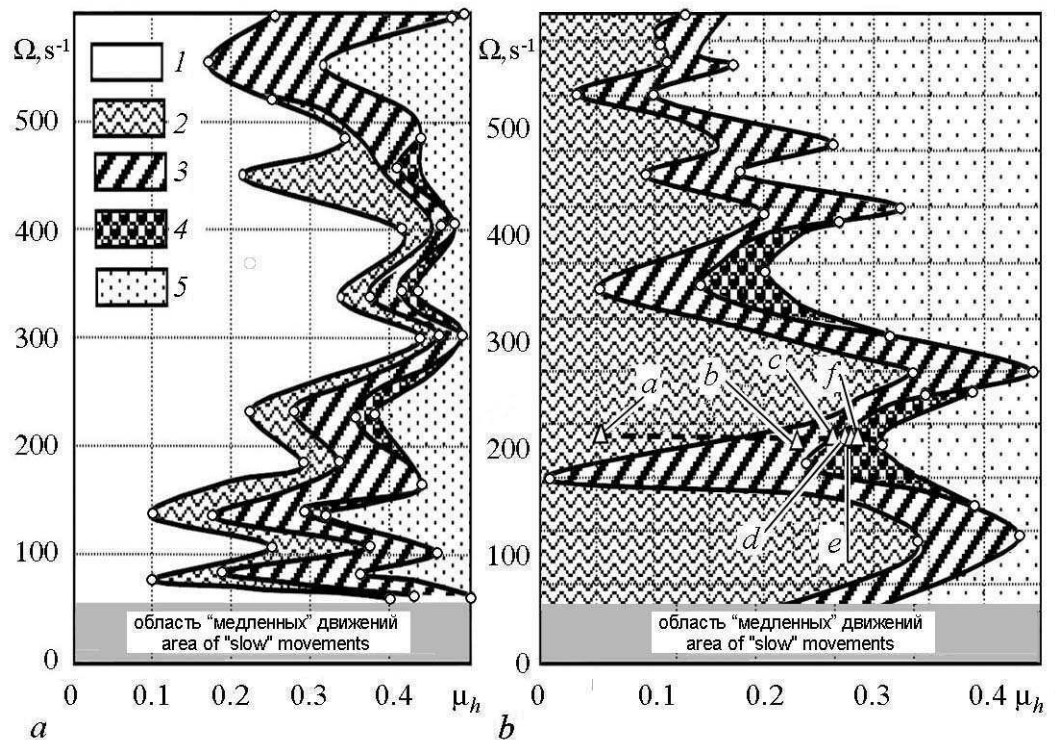


Рис. 4. Диаграммы бифуркаций притягивающих множеств в зависимости от параметров биений шпиндельной группы: *a* – параметры системы соответствуют точке *A* на рис. 2, *a*; *b* – параметры системы соответствуют точке *C* на рис. 2, *a*. Тип притягивающих множеств: 1 – орбитально асимптотически устойчивые периодические движения с частотой биений; 2 – двумерный тор; 3 – предельный цикл с частотой, существенно ниже частоты биений; 4 – хаотическая динамика; 5 – система неустойчива в целом

Fig. 4. Diagrams of the attracting sets bifurcations is depended on the parameters of the spindle group beats: *a* – parameters of the system are corresponding to the point *A* at the fig. 2, *a*; *b* – parameters of the system are corresponding to the point *C* at the fig. 2, *a*. The type of the attracting sets: 1 – orbital asymptotically stable periodic motion with the frequency of the beating; 2 – two-dimensional invariant torus; 3 – limit cycle with a frequency significantly lower than the beats frequencies; 4 – chaotic dynamic; 5 – the system is not stability as a whole

более 10000 полученных расчетом траекторий. На приведенной иллюстрации даны два примера бифуркаций притягивающих множеств. Один (рис. 4, *a*) соответствует точке *A* на рис. 2, *a*. Второй (рис. 4, *b*) – точке *C* на рис. 2, *a*. Кроме этого обозначено  $t_p(t) = t_p^{(0)} + \Delta X_0 \sin(\Omega t) = t_p^{(0)}[1 + \mu_h \sin(\Omega t)]$ . Тогда амплитуда биений оценивается параметром  $\mu_h < 0.5$ . Если рассматривать левую кривую на рис. 4, *a*, то по своей структуре она качественно соответствуют известным диаграммам параметрического самовозбуждения Матье–Хила [38]. Траектории являются асимптотически устойчивыми слева от этой кривой. В отличие от известных диаграмм здесь параметрическое самовозбуждение существует в достаточно широком частотном диапазоне, и область нижних частот находится в диапазоне реальных скоростей резания. Кроме того, эти диаграммы принципиально зависят от удаления параметров системы от границ областей устойчивости невозмущенной системы. В частности, при увеличении добротности колебательных контуров подсистемы инструмента область параметрического самовозбуждения расширяется.

По мере увеличения амплитуды за счет нелинейных связей для каждой частоты биений мы имеем сложные преобразования притягивающих множеств. Здесь можно выделить как участки, на которых наблюдается изменение параметров притягивающих множеств без изменения их топологии, так и участки, на которых изменяется их топология. Для примера на рис. 5 приведены проекции фазовых траекторий на плоскость  $X_1 - dX_1/dt$  для точек, выделенных на рис. 4, *b* треугольниками. Для этих точек, отличающихся амплитудой биений шпindelной группы, отмечаем преобразование двумерного тора (точка «*a*») в предельный цикл (точка «*b*»). Предельного цикла в хаотические колебания через каскад бифуркаций удвоения периода колебаний (точки «*c-f*»). Каскад бифуркаций наблюдается при чрезвычайно малых вариациях амплитуды биений. Характерно, что в области малых амплитуд биений наблюдается наложение изменения деформационных смещений, обусловленных биениями, на автоколебания, которые формируются без биений.

В результате наложения образуется двумерный инвариантный тор с изменяющейся амплитудой, который при дальнейшем увеличении амплитуды биений преобразуется в предельный цикл (область точки «*b*»). Причем частота формируемого предельного цикла существенно меньше частоты биений. Исследования показывают, что в этом случае принципиальное значение имеют дополнительные силы, действующие на задние грани инструмента.

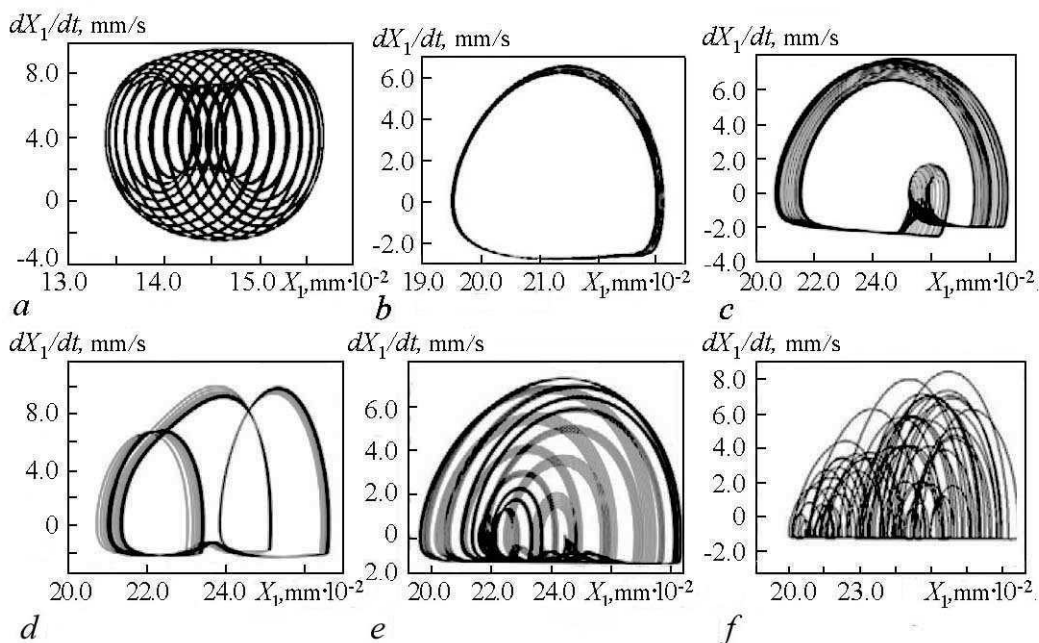


Рис. 5. Пример преобразования проекций фазовых траекторий на плоскость  $(X_1 - dX_1/dt)$  для установившегося состояния по мере увеличения амплитуды биений для точек, выделенных на рис. 4, *b*

Fig. 5. The transformation of the phase trajectories on the plane  $(X_1 - dX_1/dt)$  for the steady state with increasing amplitude of the spindle beats for the points at the fig. 4, *b*

## Анализ результатов

Для прикладной области обработки материалов резанием принципиальное значение имеет преобразование биений шпиндельной группы в траектории формообразующих движений вершины инструмента относительно детали, в точке контакта с ней инструмента. Деформационные смещения вершины инструмента, ответственные за формируемую геометрическую топологию поверхности обрабатываемой детали, во многом определяются деформационными смещениями вершины инструмента, свойства которых в установившемся стационарном состоянии определяются притягивающими множествами. Приведенный материал показывает, что в зависимости от амплитуды и частоты биений в установившихся деформационных смещениях обнаруживается образование различных притягивающих множеств: предельных циклов, инвариантных торов и хаотических аттракторов. Причем их преобразование во многих случаях определяется даже малыми вариациями частоты и амплитуды биений. Даже в том случае, если притягивающим множеством является предельный цикл, но его частота не равна и не кратна частоте вращения детали, на ее поверхности образуется геометрическая топология, в которой можно выделить участки волнистости. В общем случае преобразование биений в формируемую геометрическую топологию поверхности детали не определяется траекториями биений, а формируемыми притягивающими множествами. Это подтверждается известными экспериментальными данными. Кроме этого биения за счет нелинейных связей, не обладающих свойством центральной симметрии относительно равновесия, вызывают динамическое смещение точки равновесия системы, что вызывает изменение размера обрабатываемой детали. Этот факт также хорошо известен в экспериментах, особенно по вибрационному резанию. Параметры динамической связи, формируемой процессом резания, зависят как от технологических режимов, так и от геометрических параметров инструмента. Приведенный материал и предложенные математические модели позволяют на стадии проектирования выбирать в зависимости от состояния металлорежущего станка, определяемого биениями шпиндельной группы, инструмент и режимы, при которых формируется геометрическая топология обрабатываемой детали в соответствии с требованиями по точности и качеству поверхности.

## Заключение

Биения шпиндельной группы непосредственно изменяют динамику процесса резания, вызывая образование в деформационных смещениях инструмента различные стационарные траектории, характеризующиеся притягивающими множествами типа предельных циклов, инвариантных торов и хаотических аттракторов. Причем тип притягивающих множеств является чувствительным к параметрам биений. При управлении процессом резания, в том числе при определении программы ЧПУ обработки деталей на конкретном станке, во-первых, необходимо согласовать технологические режимы и геометрию инструмента с существующими естественным образом на конкретном станке параметрами биений. Во-вторых, при управлении процессом резания на основе варьирования траекториями движения исполнительных элементов станка существует зависящее от биений предельно достижимое качество изготовления деталей.

## Библиографический список

1. *Заковоротный В.Л., Флек М.Б.* Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Терра, 2006, 876 с.
2. *Городецкий Ю.И.* Теория нелинейных колебаний и динамика станков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 69–88.
3. *Гуськов А.М.* Динамика двухрезцового точения. СТИН. 2004. № 11. С. 3.
4. *Гуськов А.М., Воронов С.А., Квашинин А.С.* Влияние крутильных колебаний на процесс сверления с вибровозбудителем // Машиностроение и компьютерные технологии. 2007. № 12. С. 4.
5. *Воронов С.А., Непочатов А.В., Киселев И.А.* Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 1. С. 50–62.
6. *Васин С.А., Васин Л.А.* Синергетический подход к описанию природы возникновения и развития автоколебаний при точении // Научные технологии в машиностроении. 2012. № 1. С. 11–16.
7. *Бородкин Н.Н., Васин С.А., Васин Л.А.* Предотвращение процесса возникновения и развития автоколебаний при точении резцами со структурированными державками // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 11–1. С. 234–243.
8. *Воронов С.А., Киселев И.А.* Нелинейные задачи динамики процессов резания // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 2 (51). С. 9–23.
9. *Gouskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. Pp. 207–221.
10. *Kao Y-C., Nguyen N-T., Chen M-S., Su S.T.* A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. Vol. 77, Issue 9–12. Pp. 1793–1809.
11. *Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M.* Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259 (4). Pp. 917–933.
12. *Stepan G., Insepere T. and Szalai R.* Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, No. 9. Pp. 2783–2798.
13. *Кабалдин Ю.Г.* Самоорганизация и нелинейная динамика в процессах трения и изнашивания инструмента при резании. Комсомольск на Амуре: Изд-во КНАГТУ, 2003. 175 с.
14. *Заковоротный В.Л., Фам Т.Х.* Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания. Вестник Донского государственного технического университета. 2013. Т. 13. № 5–6 (74). С. 97–103.
15. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Самоорганизация и бифуркации

- динамической системы обработки металлов резанием // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 26–39.
16. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Влияние изгибных деформаций инструмента на самоорганизацию и бифуркации динамической системы резания металлов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 40–52.
  17. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние кинематических возмущений в направлении продольной подачи на траектории формообразующих движений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2016. № 4 (192). С. 67–76.
  18. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние погрешности движения исполнительных элементов токарного станка на траектории формообразующих движений // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17, № 1 (88). С. 35–46.
  19. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние флуктуаций на устойчивость формообразующих траекторий при точении // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2017, вып. 2. С. 52–61.
  20. *Заковоротный В.Л., Губанова А.А., Лукьянов А.Д.* Использование синергетической концепции для изучения устойчивости формообразующих траекторий попутного фрезерования. СТИН. 2016. № 4. С. 32–40.
  21. *Masoumi A., Pellicano F., Samani F. S., Barbieri M.* Symmetry breaking and chaos-induced imbalance in planetary gears // *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 80, Issue 1–2. Pp. 561–582.
  22. *Balachandran B.* Non-linear dynamics of milling process // *Philos. Trans. Roy. Soc.* 2001. Vol. 359. Pp. 793.
  23. *Davies M.A., Pratt J.R.* The stability of low immersion milling // *Ann. CIRP*. 2000. Vol. 49. P. 37.
  24. *Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J.* Stability prediction for low radial immersion milling // *J. Manuf. Sci. Engin.* 2002. Vol. 124. P. 217.
  25. *Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H.* Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling // *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2003. Vol. 43. P. 1437.
  26. *Corpus W.T., Endres W.J.* Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation. Part 1: An analytical solution // *J. Manuf. Sci. Engin.* 2004. Vol. 126. P. 467.
  27. *Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2002. Vol. 7. P. 207.
  28. *Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gousskov A.* Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness // *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2004. Vol. 44. P. 1133.

29. Szalai R., Stepan G., Hogan S.J. Global dynamics of low immersion high-speed milling // *Chaos*. 2004. Vol. 14. P. 1069.
30. Floquet M.G. Equations differentielles lineaires a coefficients periodiques // *Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. 1883. Vol. 12. P. 47.
31. Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanova A.A., Khristoforova V.V. Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting // *Journal of Sound and Vibration*. 2016. T. 368. C. 174–190.
32. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Influence of tool flank forces on complex dynamics of a cutting process // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24 (9). Pp. 189–201.
33. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Modeling of frictional chatter in metal cutting // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 89. Pp. 167–176.
34. Zakovorotny V. Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal – cutting tool // *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2015. T. 10. C. 102–116.
35. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
36. Пуш А.В., Зверев И.А. Шпиндельные узлы. Проектирование и исследование. М.: Изд-во «Станкин», 2000. 197 с.
37. Заковоротный В.Л., Шаповалов В.В. Динамика транспортных трибосистем // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2005. № 12. С. 19–24.
38. Данжело Р. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.

## References

1. Zakovorotny V.L., Fleck M.B. Dynamics of Cutting Process. Synergetic Approach. Rostov-on-Don: Terra, 2006. 876 p. (in Russian).
2. Gorodetsky Y.I. The theory of the nonlinear vibrations and the dynamic of the machines. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*. 2001. No. 2. P. 69–88 (in Russian).
3. Guskov A.M. Dynamics of the twin-cutter turn. *Russian Engineering Research*. 2004. No. 11. P. 3 (in Russian).
4. Guskov A.M., Voronov C.A., Kvashnin A.S. The influence of torsional vibrations on the drilling vibration exciter. *Mechanical Engineering and Computer Science*. 2007. No. 12. P. 4 (in Russian).
5. Voronov C.A., Nepochatov A.V., Kiselev I.A. Criteria of the valuation stability of the milling process of the non-rigid parts. *Scientific-Educational and Applied Journal. University News. Engineering*. 2011. No. 1. P. 50–62 (in Russian).
6. Vasin S.A., Vasin L.A. Synergetic approach to the description of the origin and development of the self-oscillation when turning. *Science Intensive Technologies in Mechanical Engineering*. 2012. No. 1. P. 11–16 (in Russian).
7. Borodkin N.N., Vasin S.A., Vasin L.A. Prevention of the process of the emergence and development of self-oscillations whith turning cutters with structured tools.



- Izvestiya Tulskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Technical Science.* 2014. No. 11–1. P. 234–243 (in Russian).
8. Voronov S.A., Kisilev I.A. Nonlinear problems of the dynamics of cutting processes. *Mechanical Engineering and Engineering Education.* 2017. No. 2 (51). P. 9–23 (in Russian).
  9. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. *Commun. Nonlin.Sci. Numer. Simul.* 2002. Vol. 7. P. 207–221.
  10. Kao Y-C., Nguyen N-T., Chen M-S., Su ST. A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* 2015. Vol. 77, Issue 9–12. Pp. 1793–1809.
  11. Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M. Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model. *Journal of Sound and Vibration.* 2003. Vol. 259 (4). Pp. 917–933.
  12. Stepan G., Insperge T. and Szalai R. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15, No. 9. Pp. 2783–2798.
  13. Kabaldin Y.G. Self-organization and Nonlinear Dynamics in the Processes of Friction and Wear of the Tool with Cutting. *Komsomolsk-na-Amure State Technical University,* 2003. 175 p. (in Russian).
  14. Zakovorotny V.L., Fam T.H. Parametric-excitation of the dynamic system of cutting. *Vestnik of DSTU.* 2013. T. 13. No. 5–6 (74). Pp. 97–103 (in Russian).
  15. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Bykador V.S. Self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. T. 22. No. 3. P. 26–39 (in Russian).
  16. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Bykador V.S. The influence of bending deformations of the tool on the self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. T. 22. No. 3. P. 40–52 (in Russian).
  17. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Influence of kinematic perturbations towards longitudinal motion on shape-generating movement trajectories in cutting dynamic system. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series.* 2016. No. 4 (192). P. 67–76 (in Russian).
  18. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The influence of the spindle beats group on attracting sets of the tool deformation displacement. *Vestnik of DSTU.* 2017. T. 17, No. 1 (88). P. 35–46 (in Russian).
  19. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The influence of fluctuation on the shape-generating trajectories stability with a turning. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series.* 2017. No. 2. P. 52–61 (in Russian).
  20. Zakovorotny V.L., Gubanov A.A., Lukyanov A.D. The use of synergetic concept for the study of the stability of the morphogenetic trajectories of the associated milling. *Russian Engineering Research.* 2016. No. 4. P. 32–40 (in Russian).
  21. Masoumi A., Pellicano F., Samani F. S., Barbieri M. Symmetry breaking and chaos-

- induced imbalance in planetary gears. *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 80. Issue 1–2. Pp. 561–582.
22. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process. *Philos. Trans. Roy. Soc.* 2001. Vol. 359. Pp. 793.
  23. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling. *Ann. CIRP*. 2000. Vol. 49. P. 37.
  24. Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J. Stability prediction for low radial immersion milling. *J. Manuf. Sci. Engin.* 2002. Vol. 124. P. 217.
  25. Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H. Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2003. Vol. 43. P. 1437.
  26. Corpus W.T., Endres W.J. Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation – Part 1: An analytical solution. *J. Manuf. Sci. Engin.* 2004. Vol. 126. P. 467.
  27. Gousskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2002. Vol. 7. P. 207.
  28. Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gousskov A. Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2004. Vol. 44. P. 1133.
  29. Szalai R., Stepan G., Hogan S.J. Global dynamics of low immersion high-speed milling. *Chaos*. 2004. Vol. 14. P. 1069.
  30. Floquet G. Equations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1883. Vol. 12. P. 47.
  31. Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanov A.A., Khristoforova V.V. Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. T. 368. C. 174–190.
  32. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Influence of tool flank forces on complex dynamics of a cutting process. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24 (9). Pp. 189–201.
  33. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Modeling of frictional chatter in metal cutting. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 89. Pp. 167–176.
  34. Zakovorotny V. Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal – cutting tool. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2015. T. 10. C. 102–116.
  35. Lyapunov A.M. General Problem on Motion Stability. Moscow: Gostekhizdat, 1950. 167 p. (in Russian).
  36. Push A.V., Zverev I.A. Spindle Units. Design and Project. Moscow: STANKIN, 2000. 197 p. (in Russian).
  37. Zakovorotny V.L., Shapovalov V.V. Dynamics of transport tribo system. *Assembly in Machinebuilding, Instrument Making*. 2005. No. 12. P. 19–24 (in Russian).
  38. D'Angelo G. Linear Systems With Variable Parameters. Moscow: Mashinostroenie, 1974. 287 p. (in Russian).

*Заковоротный Вилор Лаврентьевич* – родился в Красноярске (1940). Окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1962 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем взаимодействующих со средами. С 1981 по 2015 год являлся заведующим кафедрой «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по научной работе ДГТУ. Автор более 400 научных статей как в российских, так и в зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 10 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 42 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционные коллегии 3 журналов, включенных в перечень ВАК РФ. Член трех диссертационных советов.



344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)

*Гвинджилia Валерия Энвериевна* – родилась в городе Ростов-на-Дону (1994). Окончила Донской Государственный Технический Университет (2016), степень бакалавра, специальность «Управление в технических системах». В настоящий момент является магистрантом второго курса обучения специальности «Управление в технических системах», направление – анализ и синтез систем управления движением механических объектов, взаимодействующих с различными средами. Область научных интересов – фундаментальные основы инженерных наук, нелинейная динамика процессов обработки на металлорежущих станках, проблемы самоорганизации и эволюции. Опубликовала 9 научных статей как в российских, так и в зарубежных научных журналах.



344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
Донской государственный технический университет  
E-mail: [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)