УДК 517.93

ДИСКРЕТНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ: КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И МЕДЛЕННЫЕ АМПЛИТУДЫ

В. В. Зайцев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
Россия, 443086 Самара, Московское шоссе, д. 34
E-mail: zaitsev@samsu.ru
Поступила в редакцию 4.08.2017, после доработки 27.10.2017

Для дискретизации времени в дифференциальном уравнении движения осциллятора (генератора) ван дер Поля предложено использовать сочетание численного метода конечных разностей и асимптотического метода медленно меняющихся амплитуд. Разностные аппроксимации временных производных выбираются таким образом, чтобы, во-первых, сохранить в дискретном времени консервативность и собственную частоту линейного контура автоколебательной системы. Во-вторых, требуется совпадение разностного укороченного уравнения для комплексной амплитуды автоколебаний в дискретном времени с аппроксимацией Эйлера укороченного уравнения для амплитуды автоколебаний в аналоговой системе-прототипе. Показано, что реализация такого подхода позволяет сформировать дискретное отображение осциллятора ван дер Поля и ряд отображений осцилляторов томсоновского типа. Адекватность дискретных моделей аналоговым прототипам подтверждена также численным экспериментом.

Ключевые слова: Автоколебательная система, уравнение ван дер Поля, дискретное время, конечные разности, медленно меняющиеся амплитуды, укороченные уравнения, дискретные отображения томсоновских автогенераторов.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

Образец цитирования: Зайцев В.В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: Конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 70–78. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70–78

THE DISCRETE VAN DER POL OSCILLATOR: FINITE DIFFERENCES AND SLOW AMPLITUDES

V. V. Zaitsev

Samara National Research University
34, Moskovskoe shosse, 443086 Samara, Russia
E-mail: zaitsev@samsu.ru
Received 4.08.2017, revised 27.10.2017

For sampling of time in a differential equation of movement of van der Pol oscillator (generator) it is offered to use a combination of the numerical method of finite differences and the asymptotic method of the slowl-changing amplitudes. The difference approximations of temporal derivatives are selected so that, first, to save conservatism and natural frequency of the linear circuit of self-oscillatory system in the discrete time. Secondly, coincidence of the difference shortened equation for the complex amplitude of self-oscillations in the discrete time with Euler's approximation of the shortened equation for amplitude of self-oscillations in analog system prototype is required. It is shown that realization of such approach allows to create discrete mapping of the van der Pol oscillator and a number of mappings of Thomson type oscillators. The adequacy of discrete models to analog prototypes is confirmed with also numerical experiment.

Keywords: Self-oscillatory system, van der Pol's equation, the discrete time, finite differences, slowly changing amplitudes, the shortened equations, the discrete mapping of Thomson self-oscillators.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

References: Zaitsev V.V. The discrete van der Pol oscillator: Finite differences and slow amplitudes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 70–78. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

Введение

В теории нелинейных колебаний осциллятор (генератор) ван дер Поля – автоколебательная система на основе высокодобротного резонатора с кубической нелинейностью в цепи положительной обратной связи – служит универсальной моделью систем различной физической природы [1, 2]. С учётом того, что современная теория рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ) представляет интерес временная дискретизация в математической модели осциллятора, результатом которой является разностное уравнение движения.

Переход к дискретному времени в дифференциальных моделях линейных аналоговых фильтров широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [3]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение, справедливое для линейных систем, тем более относится к системам, содержащим нелинейности.

Один из способов временной дискретизации использует введение нелинейных дельта-воздействий в гамильтониан или уравнение движения НВ-системы. Например, в монографии [4] этим способом построено универсальное и стандартное отображений. В статье [5] анализ дельта-импульсной синхронизации применяется для вывода дискретных отображений неавтономного осциллятора ван дер Поля–Дюффинга. В работе [6] для проектирования ДВ-осциллятора ван дер Поля было предложено использовать условие инвариантности импульсной характеристики линейного резонатора автоколебательной системы относительно дискретизации времени. Принцип импульсной инвариантности можно сформулировать также как замену ядра интегрального уравнения движения нелинейного осциллятора дискретизирующей последовательностью дельта-функций с весовыми коэффициентами из отсчетов импульсной характеристики линейного аналогового контура.

Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. Например, в статье [7] и монографии [8] дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом дискретные отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства. Возможности метода конечных разностей для проектирования ДВ-осцилляторов томсоновского типа проанализированы в работе [9].

В настоящем сообщении дискретизацию времени в дифференциальной модели генератора ван дер Поля предлагается провести на основе совместного использования методов конечных разностей и медленно меняющихся амплитуд.

1. Осциллятор ван дер Поля в непрерывном времени

Осциллятор ван дер Поля – базовая модель теории нелинейных колебаний – задается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0}{Q}\Big(p\big(1 - x^2\big) - 1\Big)\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора, p – параметр превышения порога генерации (порог $p = 1$). Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом Δ, введём в уравнение (1) безразмерную временную переменную $\tau = t/\Delta$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu\Big(p\big(1 - x^2\big) - 1\Big)\frac{dx}{d\tau}. \tag{2}$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0/\omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\nu = \Omega_0/Q$ – полоса резонатора.

Считая, что $\nu \ll 1$, анализ уравнения (2) проведём в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (метода ММА), широко используемого при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [10]. В рамках метода осцилляции $x(t)$ представляются в виде

$$x(\tau) = \frac{1}{2}A(\tau)\exp(j2\pi\Omega_0\tau) + \frac{1}{2}A^*(\tau)\exp(-j2\pi\Omega_0\tau) \tag{3}$$

с комплексной амплитудой $A(\tau)$ функцией времени, медленной по сравнению с $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$. Медленность комплексной амплитуды позволяет пренебречь второй производной $A''(\tau)$ в левой части уравнения (2) и первой производной $A'(\tau)$ в его правой части.

После выделения первой гармоники осцилляций (3) из правой части уравнения (2) и приравнивания амплитудных коэффициентов при $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$ в его правой и левой частях получим так называемое укороченное уравнение вида

$$\frac{dA}{d\tau} = \pi\nu\left(p\left(1 - \frac{1}{4}|A|^2\right) - 1\right)A. \tag{4}$$

На дискретной временной сетке $\tau_n = n\Delta\tau$ с шагом $\Delta\tau = 1$ явный метод Эйлера дает разностную форму укороченного уравнения (4)

$$A_n = A_{n-1} + \pi\nu\left(p\left(1 - \frac{1}{4}|A_{n-1}|^2\right) - 1\right)A_{n-1}. \qquad (5)$$

Здесь $A_n = A(\tau_n)$ – функция дискретного времени.

2. Осциллятор ван дер Поля в дискретном времени

При переходе к дискретному времени в уравнении (2) будем стремиться выполнить два условия. Во-первых, разностный оператор второго порядка, соответствующий левой части уравнения (2), должен быть консервативным и порождать собственные колебания с частотой Ω_0. Это условие приводит к уравнению собственных колебаний в дискретном времени

$$x_n - 2k_1 x_{n-1} + k_2 x_{n-2} = 0, \qquad (6)$$

в котором действительные коэффициенты разностной аппроксимации k_1 и k_2 таковы, что

$$x_n = A_0 \exp(j2\pi\Omega_0 n) = A_0 Z_0^n.$$

Записав для однородного разностного уравнения (6) характеристическое уравнение

$$Z_0^2 - 2k_1 Z_0 + k_2 = 0,$$

нетрудно получить $|Z_0|^2 = 1 = k_2$ и $\mathrm{Re}\ (\mathrm{Z}_0) = \cos(2\pi\Omega_0) = k_1$. Теперь полное уравнение движения ДВ-осциллятора ван дер Поля представим в виде

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu\Big(p\big(1 - x_{n-1}^2\big) - 1\Big)\big(k_3 x_{n-1} - x_{n-2}\big). \qquad (7)$$

При этом для определения коэффициента k_3 разностной аппроксимации производной в правой части (2) потребуем, чтобы укороченное уравнение для комплексной амплитуды автоколебаний в ДВ-генераторе (7) совпадало с эйлеровым приближением (5) укороченного уравнения (4) для комплексной амплитуды автоколебаний в НВ-генераторе (2).

Метод ММА на автоколебания в дискретном времени распространён в статье [11]. Следуя этой работе, автоколебания в (7) запишем в виде

$$x_n = \frac{1}{2}A_n Z_0^n + \frac{1}{2}A_n^* Z_0^{-n}.$$

Теперь медленность комплексной амплитуды A_n позволяет проводить преобразования левой части уравнения (7) с учётом приближённого равенства $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$, а в его правой части – считать комплексную амплитуду постоянной. Все остальные шаги ДВ-метода ММА совпадают с аналогичными шагами НВ-метода. В результате приходим к следующему укороченному уравнению для ДВ-осциллятора (7):

$$A_n = A_{n-1} + \pi\nu\frac{\left(k_3 - Z_0^{-1}\right)}{j\mathrm{Im}\ (\mathrm{Z}_0)}\left(p\left(1 - \frac{1}{4}|A_{n-1}|^2\right) - 1\right)A_{n-1}. \qquad (8)$$

Нетрудно увидеть, что уравнение (8) совпадает с уравнением (5), если положить $k_3 = \mathrm{Re}\ (\mathrm{Z}_0) = \cos(2\pi\Omega_0)$. Таким образом, искомое дискретное отображение (разностное уравнение движения), определяющее ДВ-осциллятор ван дер Поля, имеет вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} &= \\ = 2\pi\nu\Big(p\big(1 - x_{n-1}^2\big) - 1\Big)&\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big). \end{aligned} \tag{9}$$

При умеренных превышениях порога генерации ($p \leq 10$), когда автоколебания еще можно считать квазигармоническими, отображение (9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики НВ-осциллятора (1). Этот вывод непосредственно следует из способа его формирования. Тем не менее, приведем также ряд результатов цифрового анализа временных рядов, генерируемых по алгоритму (9).

3. Численный эксперимент с ДВ-осциллятором ван дер Поля

Энергетические характеристики НВ- и ДВ-осцилляторов можно сопоставить путём сравнения зависимостей амплитуд A_c и A_d первой гармоники установившихся автоколебаний от величины параметра превышения порога генерации. Соотношение этих зависимостей иллюстрируют графики, приведенные на рис. 1.

Для дискретного осциллятора (9) с параметрами $\Omega_0 = 0.17$, $Q = 20$, $\nu = 8.5 \cdot 10^{-3}$ график зависимости $A_d(p)$ получен путем оценки амплитуды автоколебаний по формуле

$$A_d(p) = \sqrt{x_N^2(p) + \left(\frac{\cos(2\pi\Omega_0)x_N(p) - x_{N-1}(p)}{\sin(2\pi\Omega_0)}\right)^2} \tag{10}$$

на основе отсчётов x_{N-1} и x_N установившихся автоколебаний. Отметим, что при записи (10) использована аппроксимация производной $y = dy/d\tau$ вида [11]

$$\mathrm{sinc}\,(2\pi\Omega_0)y_n = \big(\cos(2\pi\Omega_0)x_n - x_{n-1}\big),$$

где $\mathrm{sinc}\,(2\pi\Omega_0) = \sin(2\pi\Omega_0)/2\pi\Omega_0$ – кардинальный синус.

Оценка амплитуды $A_c(p)$ установившихся автоколебаний осциллятора ван дер Поля (1) проведена на основе результатов численного интегрирования задачи Коши для уравнения движения (2) методом Рунге–Кутты четвёртого порядка с фиксированным шагом $\Delta\tau = 1/M$. Временные ряды для оценки $A_c(p)$ сформированы путём выборки из численного решения $X_n = x_{nM}$, $Y_n = y_{nM} = x'_\tau(\tau_{nM})$, а затем использована формула

$$A_c(p) = \sqrt{X_N^2(p) + \left(\frac{Y_N(p)}{2\pi\Omega_0}\right)^2}.$$

В целом, как это следует из рис. 1, зависимости $A_c(p)$ и $A_d(p)$ близки как качественно, так и количественно – максимальное расхождение их значений в представленном примере составляет 7.2%. Причем причина замедленного роста $A_d(p)$ по

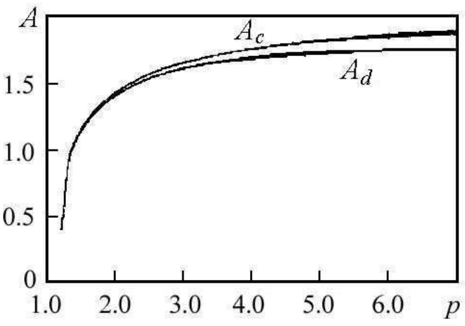


Рис. 1. Огибающие автоколебаний НВ- и ДВ-осцилляторов

Fig. 1. Amplitudes of self-oscillations in continuous and discrete time

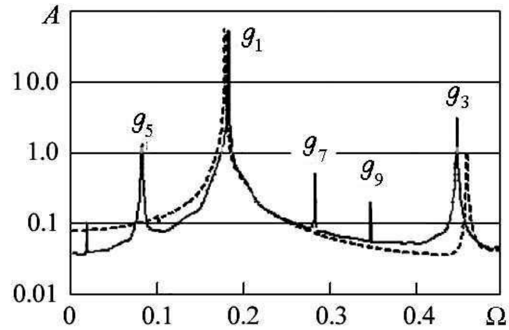


Рис. 2. Амплитудные спектры НВ- и ДВ-осцилляторов

Fig. 2. Amplitude ranges of self-oscillations in continuous and discrete time

сравнению с $A_c(p)$ при увеличении параметра p заключается в повышенном уровне гармоник у ДВ-осциллятора (9). Это подтверждается рис. 2, на котором для $p = 5$ сплошной линией показан амплитудный спектр автоколебаний осциллятора (9), а штриховой – НВ-осциллятора ван дер Поля (2). Символами g_k отмечены гармоники с номерами k. Здесь следует обратить внимание на неустранимый эффект подмены частот (наложения спектров) гармоник автоколебаний в дискретном времени. Что касается основных частот автоколебаний, то они в представленном примере у осцилляторов (2) и (9) весьма близки.

4. Разновидности ДВ-осцилляторов томсоновского типа

Основываясь на дискретном отображении (уравнении движения) осциллятора ван дер Поля, можно предложить ещё ряд ДВ-автогенераторов томсоновского типа.

Вариант уравнения движения (9) нетрудно получить, если ввести в рассмотрение параметр консервативности резонатора ДВ-автогенератора

$$\delta = 1 - \pi\nu \to \exp(-\pi\nu).$$

Тогда (9) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} &= \\ = 2\pi\Omega_0\gamma\big(1 - x_{n-1}^2\big)\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big)&, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\gamma = pQ$ – константа глубины обратной связи.

Очевидно, что при $\delta = 1$ разностное уравнение

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\Omega_0\gamma\big(1 - x_{n-1}^2\big)\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big)$$

представляет собой результат дискретизации времени в уравнении ван дер Поля в его стандартной форме записи [2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0\gamma\big(1 - x^2\big)\frac{dx}{dt}.$$

Вариант ДВ-автогенератора с перестройкой частоты задаётся уравнением

$$x_n - 2\cos\bigl(2\pi\Omega_0(1+m_n)\bigr)x_{n-1} + x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu\Bigl(p\bigl(1 - x_{n-1}^2\bigr) - 1\Bigr)\bigl(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\bigr),$$

где $m_n = \Delta\Omega_n/\Omega_0$ – текущее значение индекса частотной модуляции, $\Delta\Omega_n$ – девиация частоты.

Наконец, проведя в (11) замену $1 - x_{n-1}^2 \to G(x_{n-1})$, где $G(x)$ – четная функция, получим уравнение движения томсоновского ДВ-автогенератора с нелинейностью общего вида

$$x_n - 2\delta\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0\gamma G(x_{n-1})\bigl(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\bigr). \quad (12)$$

Заключение

Предложенный метод дискретизации времени в дифференциальном уравнении квазигармонической автоколебательной системы (системы томсоновского типа) позволяет перейти к рассмотрению дискретных отображений, гарантированно обладающих динамическими характеристиками аналоговых систем-прототипов. Такие отображения можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [12].

При значительных превышениях порога генерации, когда перестаёт выполняться условие квазилинейности исходной автоколебательной системы, дискретные отображения приобретают новые свойства, позволяющие рассматривать их как самостоятельные объекты нелинейной динамики в дискретном времени.

Библиографический список

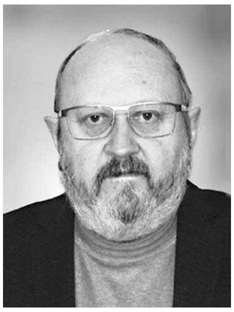
1. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 3–42.
3. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
4. *Заславский Г.М.* Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.–Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
5. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 16–31.

6. *Зайцев В.В., Давыденко С.В, Зайцев О.В.* Динамика автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3, № 2. С. 64–67.
7. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова–Такенса: От непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 139–158.
8. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
9. *Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., Шилин А.Н.* Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 2. С. 35–41.
10. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
11. *Зайцев В.В.* О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, № 1. С. 35–40.
12. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1972. 600 с.

References

1. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Nelinejnye Kolebaniya. M.: Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
2. Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Turukina L.V. Phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. Vol. 22, Issue 4. Pp. 3–42 (in Russian).
3. Oppenheim A., Schafer R. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1999. 870 p.
4. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: University Press, 2005.
5. Kuznetsov A.P., Turukina L.V. Synchronization of self-oscillating van der Pol–Dyuffing system by the short pulses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2004. Vol. 12, Issue 5. Pp. 16–31 (in Russian).
6. Zaitsev V.V., Davydenko S.V, Zaitsev O.V. Dynamics of self-oscillations of the discrete van der Pol oscillator. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2000. Vol. 3, Issue 2. Pp. 64–67 (in Russian).
7. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. Bogdanov–Takens bifurcation: From flows to discrete systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2009. Vol. 17, Issue 6. Pp. 139–158 (in Russian).
8. Morozov A.D. Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-conservative Systems. Moscow; Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2005. 424 p. (in Russian).
9. Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu., Shilin A.N. Finite differences for design of nonlinear discrete time oscillators. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2017. Vol. 20, Issue 2. Pp. 35–41 (in Russian).

10. Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. The Theory of Oscillations in Radio Engineering. M.: Nauka, 1984. 320 p. (in Russian).
11. Zaitsev V.V. About discrete mapping the van der Pol oscillator. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2014. Vol. 17, Issue 1. Pp. 35–40 (in Russian).
12. Lindsey W. Synchronization Systems in Communication and Control. New Jersy: Prentice Hall, 1972. 695 p.



Зайцев Валерий Васильевич – родился (1952) в селе Борское Куйбышевской области. Окончил Куйбышевский государственный университет (1975) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980, кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980). Профессор, заведующий кафедрой радиофизики Самарского университета. Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике. Автор более 100 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 443011 Самара, ул. академика Павлова, 1
Самарский университет
E-mail: zaitsev@samsu.ru