Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

УДК 517.957:517.537.3

МЕТОД НЬЮТОНА ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, д. 77
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

Предложена модификация метода степенных рядов Ньютона для решения нелинейных обыкновенных и неинтегрируемых эволюционных уравнений. На первом этапе метода определяется несколько первых членов степенного ряда для искомой зависимой переменной. Для этого используется либо прямое разложение в степенной ряд по независимой переменной с последующей подстановкой в уравнение, либо разложение в функциональный ряд метода возмущений по степеням формального параметра. Во втором случае последовательное решение уравнений метода возмущений позволяет выразить члены ряда в форме возрастающих натуральных степеней экспоненциального решения линеаризованной задачи и получить степенной ряд после соответствующей замены. На втором этапе метода постулируется геометричность полученного степенного ряда. Для большинства интегрируемых уравнений такой ряд оказывается безусловно геометрическим, то есть найденные слагаемые составляют последовательность геометрической прогрессии. Для многих неинтегрируемых уравнений возникают условия, связывающие коэффициенты уравнения с параметрами искомого решения, при выполнении которых члены ряда образуют геометрическую прогрессию. В этих случаях сумма геометрической прогрессии есть точное решение исходного уравнения. Показано, что знаменатель прогрессии представляется многочленом, степень которого не может быть меньшей порядка полюса решения уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении третьего порядка и семействе обобщенных эволюционных уравнений Курамото–Сивашинского, для которых построены точные рациональные и уединенно-волновые решения. Указаны достоинства и недостатки предложенного метода по сравнению с другими известными методами решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Геометрический ряд, метод возмущений, нелинейные эволюционные уравнения, точные решения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Ссылка на статью: Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 64–83.

NEWTON'S METHOD OF CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NON-INTEGRABLE EVOLUTION EQUATIONS

A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Politekhnicheskaya 77, Saratov, 410008, Russia
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

A modification of the Newton's power series method for solving nonlinear ordinary equations and non-integrable evolution equations is proposed. In the first stage of the method the first few terms of a power series for the sought dependent variable are determined. For this we use either the direct power series expansion in independent variable, followed by substitution into the equation, or the decomposition into functional series of perturbation method in powers of the formal parameter. In the second case, a sequential solutions of the equations of the perturbation method allows us to express the terms of the series in the form of increasing natural degrees of exponential solution of the linearized problem and obtain a power series after the corresponding replacement. In the second stage of the method we postulate that the resulting power series is the geometric. For most integrable equations the power series is unconditionally geometric, in other words, found terms of the series form a sequence of geometric progression. For many non-integrable equations, there are conditions linking the coefficients of the equation with the parameters of the sought solution, under which the terms of the series form a geometric progression. In these cases, the sum of a geometric progression is the exact solution to the original equation. It is shown that the denominator of the progression is represented by a polynomial, the degree of which is not less than the pole order of the solution. The effectiveness of the method is demonstrated on a third-order nonlinear ordinary differential equation and the family of generalized Kuramoto-Sivashinski evolution equations, for which the exact rational and solitary-wave solutions are found. The advantages and disadvantages of the proposed method in comparison with other known methods of solving nonlinear differential equations are given.

Keywords: Geometric series, the perturbation method, nonlinear evolution equations, exact solutions.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Paper reference: Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 64–83.

Введение

Под «методом Ньютона» обычно понимают итерационный численный метод нахождения нуля или минимума заданной функции. Однако сам Ньютон основным своим достижением считал создание общего метода решения дифференциальных и алгебраических уравнений, закодированного в известном письме Лейбницу от 24 октября 1576 года [1]. Суть метода состояла в разложении всех зависимых переменных в бесконечные степенные ряды, подстановке последних в исходные уравнения и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях независимых переменных или формального малого параметра – для определения коэффициентов неизвестных функций. В.И. Арнольд отмечал [2], что при таком подходе открытым остается единственный вопрос о сходимости получающихся рядов – зато теорема о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений доказывается автоматически, совместно с теоремой о зависимости решений от начальных условий. Ньютон же установил, что его степенные ряды сходятся как геометрическая прогрессия, и не сомневался в их сходимости. Простота и эффективность метода позволили Ньютону решить огромное число задач.

Кроме степенных рядов, Ньютон также использовал дробно-степенные разложения при решении нелинейных алгебраических уравнений. Соответствующий аппарат, называемый методом многоугольника Ньютона, в настоящее время эффективно используется. Так, в [3] дано развитие метода многоугольников для нахождения точных решений эволюционных уравнений, а в [4] многоугольники и многогранники Ньютона включены в теорию торических многообразий.

Данная статья посвящена дальнейшему развитию метода Ньютона в части, относящейся к его ключевому наблюдению о геометричности степенных рядов. В разделе 1 рассмотрено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, линеаризуемое при помощи неточечной замены переменных [5]. Показано, что ряды по степеням независимой переменной, как и ряды по степеням экспонент по независимой переменной, являются геометрическими. В первом случае сумма ряда дает выражение для точного решения уравнения в виде рациональной дроби; во втором случае получаются точные солитоноподобные решения в виде бегущего импульса и бегущего фронта. При этом структура точных решений позволяет определить вид замены зависимой переменной, линеаризующей исходное уравнение. В разделе 2 предложена модификация метода Ньютона для построения точных уединенно-волновых решений неинтегрируемых эволюционных уравнений. Рассмотрено семейство обобщенных уравнений Курамото–Сивашинского, моделирующих широкий круг явлений в задачах нелинейной волновой динамики [6], построены точные солитоноподобные решения. В Заключении перечислены достоинства и недостатки предложенного метода.

1. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Точные решения уравнения 3-го порядка. Рассмотрим уравнение, возникающее в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, в случае Эйлера–Пуансо [5]

$$u_{zzz} - \frac{u_z u_{zz}}{u} + \alpha u_z u^2 = 0, \tag{1}$$

где α – постоянная величина. Умножив (1) почленно на u и проинтегрировав по z, получим уравнение 2-го порядка

$$u_{zz}u - u_z^2 + \frac{\alpha}{4}u^4 + C_{\text{int}} = 0. \tag{2}$$

Полагая постоянную интегрирования C_{int} равной нулю, будем искать решение уравнения (2), согласно методу степенных рядов Ньютона, в форме

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и группируя по степеням z, получим систему уравнений для определения коэффициентов a_n

$$
\begin{aligned}
z^0:&\quad (1/4)\alpha a_0^4 + 2a_0a_2 - a_1^2 = 0,\\
z^1:&\quad \alpha a_0^3 a_1 + 6a_0a_3 - 2a_1a_2 = 0,\\
z^2:&\quad \alpha\left(a_0^3a_2 + (3/2)a_0^2a_1^2\right) + 12a_0a_4 - 2a_2^2 = 0,\\
z^3:&\quad \alpha\left(a_0^3a_3 + 3a_0^2a_1a_2 + a_0a_1^3\right) + 20a_0a_5 + 4a_1a_4 - 4a_2a_3 = 0, \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Последовательно выражая из первого уравнения системы (4) коэффициент a_2, из второго уравнения – a_3 и так далее, для ряда (3) имеем

$$
u = a_0 + a_1 z - \frac{\alpha a_0^4 - 4a_1^2}{8a_0}z^2 - \frac{a_1\left(5\alpha a_0^4 - 4a_1^2\right)}{24a_0^2}z^3 + \frac{5\alpha^2 a_0^8 - 72\alpha a_0^4 a_1^2 + 16a_1^4}{384a_0^3}z^4 + \\
+ \frac{a_1\left(61\alpha^2 a_0^8 - 232\alpha a_0^4 a_1^2 + 16a_1^4\right)}{1920a_0^4}z^5 + \ldots
\tag{5}
$$

Известно, что ряд является геометрическим при совпадении его последовательных диагональных аппроксимант Паде $[Q/Q]$, $[Q+1/Q+1], \ldots$, начиная с некоторого порядка Q [7]. При этом любая аппроксиманта из этой последовательности дает точную сумму ряда. Выявить геометричность ряда и найти его сумму можно также при помощи аппарата непрерывных дробей [8].

Решение уравнения (2) имеет полюс 1-го порядка. Начиная с $Q = 1$, выпишем числители разностей последовательных аппроксимант Паде $[Q+1/Q+1] - [Q/Q]$

$$
\begin{aligned}
&[2/2]-[1/1]:\quad -2a_0z^3\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)\left(3\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^2,\\
&[3/3]-[2/2]:\quad -8a_0z^5a_1^2\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^2\left(27\alpha a_0^4 - 4a_1^2\right)^2,\\
&[4/4]-[3/3]:\quad 2a_0z^7\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)^3\left(945\alpha^2 a_0^8 + 1320\alpha a_0^4a_1^2 + 16a_1^4\right)^2, \ldots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Каждая из разностей (6) содержит общий множитель $\left(\alpha a_0^4 + 4a_1^2\right)$. Приравнивая его нулю, найдем

$$
\alpha = -\frac{4a_1^2}{a_0^4}.
\tag{7}
$$

При выполнении условия (7) ряд (5) становится геометрическим

$$
u = a_0 + a_1 z + \frac{a_1^2}{a_0}z^2 + \frac{a_1^3}{a_0^2}z^3 + \frac{a_1^4}{a_0^3}z^4 + \ldots
$$

и имеет сумму

$$
u = \frac{a_0^2}{a_0 - a_1 z}.
\tag{8}
$$

Проверка показывает, что выражение (8), содержащее две произвольные постоянные a_0 и a_1, есть точное решение уравнения (1) при условии (7).

Разложение зависимой переменной в степенной ряд (3) в совокупности с требованием геометричности приводит к решению (8) в форме рациональной дроби по независимой переменной z. Другое решение в форме рациональной дроби по $\exp(z)$ можно получить с помощью метода возмущений.

Согласно методу возмущений, будем искать решение уравнения (2) в форме функционального ряда

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}u_{n}(z), \tag{9}$$

где ε – формальный параметр, $u_n(z)$ – неизвестные функции. Группируя по степеням ε, для определения $u_n\left(z\right)$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad C_{\text{int}}=0,\\
&\varepsilon^1: \quad 0=0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_1u_1''-\left(u_1'\right)^2=0,\\
&\varepsilon^3: \quad u_1u_2''+u_2u_1''-2u_1'u_2'=0,\\
&\varepsilon^4: \quad u_1u_3''+u_2u_2''+u_3u_1''-\left(u_2'\right)^2-2u_1'u_3'+\frac{1}{4}\alpha u_1^4=0,\ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

Третье уравнение системы (10) имеет частное решение $u_1=\exp(z)$. Если в качестве решения четвертого уравнения (10) выбрать $u_2=0$, то каждое следующее уравнение (10) в порядке ε^{n+1} будет иметь решение в форме $u_n=K_nu_1^n$. Последовательно определяя постоянные K_n, $n=3,4,5,...$, для ряда (9) имеем

$$u=y-\frac{\alpha}{16}y^3+\frac{\alpha^2}{256}y^5-\frac{\alpha^3}{4096}y^7+\frac{\alpha^4}{65536}y^9-...,\tag{11}$$

где введено обозначение $y=\varepsilon u_1$.

Ряд (11) является геометрическим и имеет сумму

$$u=\frac{16y}{16+\alpha y^2}=\frac{16\varepsilon\exp\left(z\right)}{16+\alpha\varepsilon^2\left[\exp\left(z\right)\right]^2}.\tag{12}$$

Выражение (12) является точным решением уравнения (1) при произвольном α.

В классическом методе возмущений ε есть малая величина и разложение (9) служит для поиска решения в окрестности нуля. Произвольная постоянная C является частным решением уравнения (1). Чтобы отыскать нетривиальное решение в окрестности этой постоянной, подставим в уравнение (2) сумму

$$u=C+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}u_{n}\left(z\right).\tag{13}$$

Группировка по степеням ε приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad (1/4)\alpha C^4 + C_{\text{int}} = 0,\\
&\varepsilon^1: \quad \alpha C^3 u_1 + C u_1'' = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad \alpha C^2 \left(C u_2 + \frac{3}{2}u_1^2\right) + C u_2'' + u_1 u_1'' - (u_1')^2 = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad \alpha C \left(C^2 u_3 + 3C u_1 u_2 + u_1^3\right) + C u_3'' + u_1 u_2'' + u_2 u_1'' - 2u_1' u_2' = 0, \ldots
\end{aligned} \tag{14}$$

первое из которых определяет постоянную интегрирования, а второе имеет частное решение $u_1 = \exp(z)$ при условии

$$\alpha = -\frac{1}{C^2}. \tag{15}$$

Определяя u_2 из третьего уравнения системы (14), u_3 – из четвертого и так далее, ряду из суммы (13) можно придать вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z) = y + \frac{y^2}{2C} + \frac{y^3}{4C^2} + \frac{y^4}{8C^3} + \ldots, \tag{16}$$

где $y = \varepsilon u_1$. Ряд (16) является геометрическим и имеет сумму

$$\frac{2Cy}{2C - y}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (13) и возвращаясь к переменной z, придем к выражению

$$u = C + \frac{2C\varepsilon \exp(z)}{2C - \varepsilon \exp(z)}, \tag{18}$$

являющемся точным решением уравнения (1) при условии (15).

1.2. Точное решение обобщенного уравнения. Анализ доминантных членов уравнения (1) показывает, что его решения имеют полюс первого порядка. Это справедливо для всех найденных решений (8), (12) и (18). Добавление дополнительного нелинейного слагаемого приводит к обобщенному уравнению

$$u_{zzz} - \frac{u_z u_{zz}}{u} + \alpha u_z u^2 + \beta u_z u^4 = 0, \tag{19}$$

решения которого имеют полюс дробного порядка, равного 1/2.

Покажем, что требование геометричности для степенного ряда позволяет отыскать точное решение и в этом случае.

После умножения (19) на u и однократного интегрирования имеем

$$u_{zz} u - u_z^2 + \frac{\alpha}{4} u^4 + \frac{\beta}{6} u^6 + C_{\text{int}} = 0. \tag{20}$$

Считая $C_{\rm int} = 0$, будем искать решение (20) в форме (3). Группируя по z, получаем

$$\begin{aligned}
z^0: &\quad \frac{1}{4}\alpha a_0^4 + 2a_0a_2 - a_1^2 + \frac{1}{6}\beta a_0^6 = 0,\\
z^1: &\quad \alpha a_0^3 a_1 + 6a_0a_3 - 2a_1a_2 + \beta a_0^5 a_1 = 0,\\
z^2: &\quad \alpha a_0^2\big(a_0a_2 + \frac{3}{2}a_1^2\big) + 12a_0a_4 - 2a_2^2 + \beta a_0^4\big(a_0a_2 + \frac{5}{2}a_1^2\big) = 0,\\
z^3: &\quad \alpha a_0\big(a_0^2a_3 + 3a_0a_1a_2 + a_1^3\big) + 20a_0a_5 + 4a_1a_4 - 4a_2a_3 +\\
&\qquad\qquad + \beta a_0^3\big(a_0^2a_3 + 5a_0a_1a_2 + \frac{10}{3}a_1^3\big) = 0, \ldots
\end{aligned} \tag{21}$$

Находя из первого уравнения (21) коэффициент a_2, из второго уравнения – a_3 и так далее, для ряда (3) имеем

$$\begin{aligned}
u = a_0 + a_1 z - \frac{3\alpha a_0^4 - 12a_1^2 + 2\beta a_0^6}{24a_0}z^2 - \frac{a_1\left(15\alpha a_0^4 - 12a_1^2 + 14\beta a_0^6\right)}{72a_0^2}z^3 +\\
+ \frac{45\alpha^2 a_0^8 - 648\alpha a_0^4 a_1^2 + 144a_1^4 + 28\beta^2 a_0^{12} + 72\alpha\beta a_0^{10} - 912\beta a_0^6 a_1^2}{3456a_0^3}z^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{22}$$

Если выражение (22) характеризует решение с полюсом порядка 1/2, то квадрат этого выражения соответствует функции с полюсом 1-го порядка. Возведя ряд (22) в квадрат, определим числители разностей последовательных аппроксимант Паде $[Q+1/Q+1] - [Q/Q]$. Эти разности, не приведенные здесь в силу громоздкости, начиная с $Q = 2$ содержат общий множитель $(3\alpha a_0^4 + \beta a_0^6 + 12a_1^2)$. Приравнивая его нулю, найдем

$$\alpha = -\frac{12a_1^2 + \beta a_0^6}{3a_0^4}. \tag{23}$$

При выполнении условия (23) квадрат ряда (22)

$$\begin{aligned}
u^2 = a_0^2 + 2a_0a_1z + \big(3a_1^2 - \frac{\beta}{12}a_0^6\big)z^2 + \frac{a_1\left(12a_1^2 - \beta a_0^6\right)}{3a_0}z^3\\
+ \frac{720a_1^4 + \beta^2 a_0^{12} - 120\beta a_0^6 a_1^2}{144a_0^2}z^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{24}$$

становится геометрическим рядом с суммой

$$u^2 = \frac{12a_0^4}{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2}, \tag{25}$$

определяющейся любой из аппроксимант Паде $[Q/Q]$, $Q \geq 2$.

Заметим, что ряд (24) внешне не выглядит геометрическим, однако формальное разложение (25) как суммы геометрического ряда

$$\frac{12a_0^4}{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2} = \frac{a_0^2}{1 - \Big[(2a_1)/(a_0z - \Big(\dfrac{\beta}{12}a_0^4 + \dfrac{a_1^2}{a_0^2}\Big)z^2\big)\Big]} = \frac{a}{1-q} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{26}$$

после группировки результата по z дает выражение (24).

Для получения точного решения уравнения (1) достаточно извлечь из (25) квадратный корень

$$u = \frac{\sqrt{12}a_0^2}{\sqrt{12a_0^2 - 24a_0a_1z + \left(12a_1^2 + \beta a_0^6\right)z^2}}. \tag{27}$$

1.3. Линеаризация уравнения (1). Структура точных решений (8) и (18) уравнения (1) подсказывает вид замены зависимой переменной

$$u = A + B\frac{w'}{w}, \tag{28}$$

где $w = w(z)$ – новая неизвестная функция. В самом деле, если принять $A = 0$, $B = -a_0^2/a_1$, $w = a_1z - a_0$, то (28) совпадает с (8); в случае $A = C$, $B = -2C$, $w = 2C - \varepsilon\exp(z)$ получаем выражение (18).

Оставляя функцию $w(z)$ в (28) неопределенной, выясним, какому дифференциальному уравнению она должна удовлетворять. Для этого подставим (28) в (2), сгруппируем результат по степеням w и получим переопределенную систему уравнений для $w(z)$

$$\begin{aligned}
&w^0: \ \frac{1}{4}\alpha A^4 + C_{\text{int}} = 0,\\
&w^{-1}: \ AB\left(\alpha A^2w' + w'''\right) = 0,\\
&w^{-2}: \ B\left[3\alpha A^2B\left(w'\right)^2 - 6Aw'w'' + 2Bw'w''' - 2B\left(w''\right)^2\right] = 0,\\
&w^{-3}: \ B\left(w'\right)^2\left[A\left(\alpha B^2 + 2\right)w' - Bw''\right] = 0,\\
&w^{-4}: \ B^2\left(\alpha B^2 + 4\right)\left(w'\right)^4 = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Из первого уравнения (29) определяем постоянную интегрирования C_{int}. Считая $B \neq 0$, $w \neq \text{const}$, из последнего уравнения (29) получаем

$$\alpha = -\frac{4}{B^2}. \tag{30}$$

Пусть $A = 0$. Система (29) редуцируется до двух уравнений

$$w'w''' - \left(w''\right)^2 = 0,$$

$$\left(w'\right)^2w'' = 0,$$

обращающихся в тождества при

$$w'' = 0. \tag{31}$$

Подстановка общего решения $w = C_1z + C_2$ уравнения (31) в (28) приводит к выражению

$$u = \frac{BC_1}{C_1z + C_2},$$

совпадающему с (8) после переобозначения постоянных.

Пусть $A \neq 0$. В системе (29) остается 3 уравнения

$$\begin{aligned} &4A^2 w' - B^2 w''' = 0, \\ &B^2 w' w''' - 6A^2 (w')^2 - B^2 (w'')^2 - 3ABw'w'' = 0, \\ &2Aw' + Bw'' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Находя из последнего уравнения производные

$$w'' = -\frac{2A}{B} w', \quad w''' = \frac{4A^2}{B^2} w'$$

и подставляя в остальные уравнения (32) , убеждаемся, что последние удовлетворяются тождественно. Общее решение $w = C_1 + C_2 \exp(-2Az/B)$ последнего уравнения (32)

$$2Aw' + Bw'' = 0 \tag{33}$$

придает выражению (28) вид

$$u = A - \frac{2AC_2 \exp(-2Az/B)}{C_1 + C_2 \exp(-2Az/B)},$$

соответствующий решению (18).

Таким образом, при условии (30) замена зависимой переменной (28), представляющая собой преобразование Коула–Хопфа [9], преобразует исходное нелинейное уравнение (1) в эквивалентные линейные уравнения (31) или (33).

2. Неинтегрируемые эволюционные уравнения

Итак, согласно методу Ньютона, для решения дифференциального уравнения следует построить степенной ряд для зависимой переменной и, в случае его геометричности, записать решение уравнения, равное сумме ряда. Установление геометричности степенного ряда $S(z)$ по нескольким первым его членам является тривиальной задачей только в простейшем случае, когда знаменатель суммы ряда есть линейная по z функция. Если же знаменатель представляется многочленом 2-го или более высокого порядка, восстановить сумму ряда по его первым слагаемым значительно сложнее. Более того, коэффициенты степенного ряда, построенного для дифференциального уравнения, не являются постоянными, а зависят от коэффициентов уравнения. Для неинтегрируемых уравнений такой ряд может стать геометрическим только при выполнении некоторых условий, связывающих коэффициенты уравнения с параметрами искомого решения. Например, ряд (22) становится геометрическим только при условии (23).

Установить геометричность ряда и найти его сумму можно при помощи аппроксимант Паде или соответствующей непрерывной дроби. В первом случае критерием геометричности является совпадение последовательных диагональных аппроксимант, во втором – обрывание непрерывной дроби с преобразованием в конечную подходящую дробь. Однако при рассмотрении уравнений с нелинейностями высоких степеней и порядком полюса решения выше первого эти приемы оказываются достаточно громоздкими даже при условии использования современных программ символьной математики.

Ниже предлагается вычислительно эффективный прямой метод построения точных уединенно-волновых решений нелинейных эволюционных уравнений, состоящий из двух этапов. На первом этапе строится степенной ряд метода возмущений на основе экспоненциального решения линеаризованной задачи. На втором этапе постулируется геометричность этого ряда, после чего производится соответствующая проверка с использованием заранее найденных соотношений, которым должны удовлетворять коэффициенты геометрического ряда. Структура этих соотношений, которые будем называть соотношениями геометричности, определяется порядком полюса решения исходного уравнения. Применение метода демонстрируется на решении уравнения Курамото–Сивашинского и его обобщений.

2.1. Соотношения геометричности Получим соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты геометрического ряда. Пусть первый член ряда равен z, а знаменатель q представляется многочленом по z степени M

$$q = \sum_{k=1}^{M} q_k z^k.$$

Коэффициенты A_n сгруппированного по степеням z геометрического ряда

$$z \sum_{k=0}^{\infty} q^k = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n,$$

зависят от M величин q_k. В частности, при $M = 1$ имеем

$$A_1 = 1,$$
$$A_n = q_1^n, \quad n = 2, 3, ...$$

при $M = 2$

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = q_1,$$
$$A_3 = q_1^2 + q_2,$$
$$A_4 = q_1^3 + 2q_1 q_2,$$
$$A_5 = q_1^4 + 3q_1^2 q_2 + q_2^2,$$
$$A_6 = q_1^5 + 4q_1^3 q_2 + 3q_1 q_2^2, ...$$

при $M = 3$

$$
\begin{aligned}
&A_1 = 1,\\
&A_2 = q_1,\\
&A_3 = q_1^2 + q_2,\\
&A_4 = q_1^3 + 2q_1q_2 + q_3,\\
&A_5 = q_1^4 + 3q_1^2q_2 + q_2^2 + 2q_1q_3,\\
&A_6 = q_1^5 + 4q_1^3q_2 + 3q_1q_2^2 + 3q_1^2q_3 + 2q_2q_3, \ldots
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Выражая старшие коэффициенты A_n через M первых коэффициентов, получим:
при $M = 1$

$$A_{n+1} = A_2^n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{35}$$

при $M = 2$

$$
\begin{aligned}
&A_4 = -A_2^3 + 2A_2A_3,\\
&A_5 = -A_2^4 + A_2^2A_3 + A_3^2,\\
&A_6 = -2A_2^3A_3 + 3A_2A_3^2,\\
&A_7 = A_2^6 - 4A_2^4A_3 + 3A_2^2A_3^2 + A_3^3, \ldots
\end{aligned}
\tag{36}
$$

при $M = 3$

$$
\begin{aligned}
&A_5 = A_2^4 - 3A_2^2A_3 + 2A_2A_4 + A_3^2,\\
&A_6 = A_2^5 - 2A_2^3A_3 + A_2^2A_4 - A_2A_3^2 + 2A_3A_4,\\
&A_7 = 2A_2^4A_3 - 5A_2^2A_3^2 + 2A_2A_3A_4 + A_3^3 + A_4^2,\\
&A_8 = 2A_2^4A_4 + A_2^3A_3^2 - 6A_2^2A_3A_4 - 2A_2A_3^3 + 3A_2A_4^2 + 3A_3^2A_4, \ldots
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Условия (35)-(37) будут использоваться ниже как критерии геометричности ряда $z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n z^n$. Аналогично получаются условия для других значений M.

Исходя из аналитической структуры искомых решений дифференциальных уравнений, величина M должна выбираться не меньшей порядка полюса решения.

2.2. Уравнение Курамото–Сивашинского (КС). Согласно методу возмущений, будем искать решение классического уравнения КС

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \tag{38}$$

в форме функционального ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38) и группируя по степеням формального параметра ε, получим бесконечную систему уравнений для определения функций $u_n(x,t)$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \quad u_{1t}+u_{1xx}+\alpha u_{1xxx}+\beta u_{1xxxx}=0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_{2t}+u_{2xx}+\alpha u_{2xxx}+\beta u_{2xxxx}=-u_1u_{1x},\\
&\varepsilon^3: \quad u_{3t}+u_{3xx}+\alpha u_{3xxx}+\beta u_{3xxxx}=-u_1u_{2x}-u_2u_{1x},\\
&\varepsilon^4: \quad u_{4t}+u_{4xx}+\alpha u_{4xxx}+\beta u_{4xxxx}=-u_1u_{3x}-u_2u_{2x}-u_3u_{1x},\ldots
\end{aligned} \tag{40}$$

Первое уравнение системы (40) имеет частное решение $u_1 = \exp(kx-\omega t)$ при условии

$$\omega = \beta k^4+\alpha k^3+k^2, \tag{41}$$

представляющем собой дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения. Второе и последующие уравнения (40) имеют частные решения в виде $u_n = K_n u_1^n$, где n – номер уравнения. Последовательно определяя постоянные K_n и вводя обозначение

$$z = \varepsilon u_1 = \varepsilon \exp(kx-\omega t), \tag{42}$$

разложению (39) можно придать форму степенного ряда

$$u = z-\frac{z^2}{2k(7\beta k^2+3\alpha k+1)}+\frac{z^3}{4k^2(13\beta k^2+4\alpha k+1)(7\beta k^2+3\alpha k+1)}-$$
$$-\frac{\left(27\beta k^2+10\alpha k+3\right)z^4}{24k^3(21\beta k^2+5\alpha k+1)(13\beta k^2+4\alpha k+1)(7\beta k^2+3\alpha k+1)^2}+\ldots \tag{43}$$

Решение уравнения (38) имеет полюс 3-го порядка. Выбирая $M = 3$, потребуем, чтобы коэффициенты ряда (43) удовлетворяли условиям (37). Первые два из этих условий дают систему нелинейных алгебраических уравнений для параметров α и β

$$-10836\,\beta^4k^7-1953\,\alpha\beta^3k^6+428\,\alpha^2\beta^2k^5+25\,\alpha^3\beta k^4+3084\,\beta^3k^5+1457\,\alpha\beta^2k^4+$$
$$+88\,\alpha^2\beta k^3+\alpha^3k^2+84\,\beta^2k^3-47\,\alpha\beta k^2-4\,\alpha^2k-12\,\beta k-\alpha=0,$$

$$-5840478\beta^5k^9-2437257\alpha\beta^4k^8+15613\alpha^2\beta^3k^7+68737\alpha^3\beta^2k^6+1246752\beta^4k^7+$$
$$+2985\,\alpha^4\beta k^5+1099104\,\alpha\beta^3k^6+229575\,\alpha^2\beta^2k^5+10964\,\alpha^3\beta k^4+146988\,\beta^3k^5+$$
$$+105\,\alpha^4k^3+26478\,\alpha\beta^2k^4-4821\,\alpha^2\beta k^3-389\,\alpha^3k^2-4320\,\beta^2k^3-2928\,\alpha\beta k^2-$$
$$-191\,\alpha^2k-270\,\beta k-21\,\alpha=0.$$

Данная система имеет решение

$$\alpha=\frac{4}{k}, \quad \beta=\frac{1}{k^2}, \tag{44}$$

которое легко найти с помощью любой из современных систем компьютерной математики. Нетрудно проверить, что при условиях (44) следующие уравнения системы (37), то есть третье, четвертое и т.д., тождественно удовлетворяются.

Вообще говоря, можно утверждать, что выполнение условий (44) превращает ряд (43) в геометрический, только если доказать, что вся бесконечная система (37) для коэффициентов этого ряда тождественно удовлетворяется. А доказать это вряд ли возможно, не имея общего выражения для n-го члена ряда. Но в подобном доказательстве нет необходимости. Наши исследования показали, что если N условий типа (44) обращают в тождество первые $N+1$ уравнений системы (37), то ряд практически достоверно является геометрическим и его сумма дает точное решение уравнения.

Подставляя коэффициенты A_2, A_3, A_4 ряда (43), вычисленные с учетом (44), в уравнения (34), найдем значения q_n

$$q_1 = -\frac{1}{40k}, \quad q_2 = -\frac{1}{4800k^2}, \quad q_3 = -\frac{1}{1728000k^3}$$

и сумму ряда (43), предполагая его геометричность

$$S = \frac{z}{1-q} = \frac{z}{1-(q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3)} = \frac{1728000\, k^3 z}{(120k+z)^3}. \tag{45}$$

Заменяя z в (45) на произведение (42), где ω определяется равенством (41), имеем

$$u = \frac{1728000\, k^3 \varepsilon \exp\left(kx - 6k^2 t\right)}{\left(120k + \varepsilon \exp\left(kx - 6k^2 t\right)\right)^3}. \tag{46}$$

Подстановка (46) в (38) показывает, что выражение (46) есть точное решение уравнения (38).

2.3. Уравнение КС с кубической нелинейностью. Замена зависимой переменной $u = w_x$ преобразует уравнение КС с кубической нелинейностью

$$u_t + u^2 u_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \tag{47}$$

к потенциальной форме

$$w_{xt} + w_x^2 w_{xx} + w_{xxx} + \alpha w_{xxxx} + \beta w_{xxxxx} = 0. \tag{48}$$

Анализ ведущих членов показывает [10], что порядок полюса решения уменьшается при этом с 3/2 до 1/2. Подставляя в уравнение (48) разложение

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t), \tag{49}$$

после группировки по степеням ε получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 &: \quad u_{1xt} + u_{1xxx} + \alpha u_{1xxxx} + \beta u_{1xxxxx} = 0,\\
\varepsilon^2 &: \quad u_{2xt} + u_{2xxx} + \alpha u_{2xxxx} + \beta u_{2xxxxx} = 0,\\
\varepsilon^3 &: \quad u_{3xt} + u_{3xxx} + \alpha u_{3xxxx} + \beta u_{3xxxxx} = -u_{1x}^2 u_{1xx},\\
\varepsilon^4 &: \quad u_{4xt} + u_{4xxx} + \alpha u_{4xxxx} + \beta u_{4xxxxx} = -u_{1x}^2 u_{2xx} - 2u_{1x}u_{2x}u_{1xx}, \ldots
\end{aligned} \tag{50}$$

Первое уравнение (50) имеет частное решение $u_1 = \exp(kx - \omega t)$ при условии (41), как и в предыдущем случае. Второе уравнение совпадает по структуре с первым и, чтобы решение n-го уравнения (50) сохранило вид $u_n = K_n u_1^n$, необходимо положить $K_2 = 0$. Вследствие этого в разложении (49) все функции $u_n(x,t)$ с четными номерами обратятся в ноль и после замены (42) данное разложение примет вид

$$w = z - \frac{kz^3}{18\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)} + \frac{k^2 z^5}{120\,(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1)\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)} - \\ - \frac{k^3\left(101\beta k^2 + 24\alpha k + 5\right) z^7}{3024\,(57\beta k^2 + 8\alpha k + 1)\,(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1)\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)^2} + \ldots \tag{51}$$

Ряду (51) соответствует функция с полюсом порядка 1/2. Сумма геометрического ряда есть рациональная дробь, которая не может иметь дробного порядка полюса. Но квадрату ряда (51)

$$w^2 = y - \frac{ky^2}{9\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)} + \frac{k^2\left(253\beta k^2 + 69\alpha k + 16\right) y^3}{810\,(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1)\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)^2} - \\ - \frac{k^3\left(113\beta k^2 + 22\alpha k + 4\right) y^4}{945\,(57\beta k^2 + 8\alpha k + 1)\,(31\beta k^2 + 6\alpha k + 1)\,(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)^2} + \ldots, \tag{52}$$

в котором обозначено $y = z^2$, уже соответствует функция с полюсом целого, 1-го, порядка. Выбирая $M = 1$, потребуем, чтобы коэффициенты ряда (52) удовлетворяли условиям (35). Простая форма уравнений (35) позволяет решать их последовательно: первое уравнение дает

$$\alpha = \frac{19\beta k^2 - 2}{3k}, \tag{53}$$

второе –

$$\beta = \frac{1}{2k^2}, \tag{54}$$

а третье – при выполнении (53) и (54) удовлетворяется тождественно. Как отмечалось выше, последний факт свидетельствует, что двух условий (53) и (54), скорее всего, достаточно, чтобы ряд (52) стал геометрическим. Предполагая геометричность (52), запишем его сумму

$$S = \frac{y}{1-q} = \frac{y}{1-q_1 y} = \frac{y}{1-A_2 y} = \frac{315y}{2ky + 315}. \tag{55}$$

Последовательно производя над (55) обратные преобразования, то есть, заменяя y на z^2, извлекая квадратный корень и подставляя вместо z выражение (42), с учетом дисперсионного соотношения (41) получим

$$w = \frac{3\sqrt{35}\varepsilon \exp\left(kx - 4k^2 t\right)}{\sqrt{2k\varepsilon^2\left[\exp\left(kx - 4k^2 t\right)\right]^2 + 315}}. \tag{56}$$

Прямая подстановка (56) в уравнение (48) показывает, что (56) является его точным решением. Продифференцировав (56) по x, получим точное решение исходного уравнения (47)

$$u = \frac{945\sqrt{35}\,k\varepsilon \exp\left(kx - 4k^2 t\right)}{\left[2k\varepsilon^2\left[\exp\left(kx - 4k^2 t\right)\right]^2 + 315\right]^{3/2}}.$$

2.4. Уравнение КС с двумя нелинейностями. Рассмотрим модификацию уравнения (47), содержащую дополнительное нелинейное слагаемое,

$$u_t + u^2 u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + u_{xxxx} \mp \left(u^2 u_x\right)_x = 0. \tag{57}$$

Расположение параметров α и β в (57) по сравнению с (38) и (47) изменено для упрощения конечных выражений.

В случае знака «минус» перед последним слагаемым будем отыскивать решение в окрестности произвольной постоянной C, являющейся частным решением уравнения (57). Подставляя в (57) разложение

$$u = C + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, t\right), \tag{58}$$

после группировки по степеням ε имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \; u_{1t} + C^2 u_{1x} + \left(\alpha - C^2\right) u_{1xx} + \beta u_{1xxx} + u_{1xxxx} = 0,\\
&\varepsilon^2: \; u_{2t} + C^2 u_{2x} + \left(\alpha - C^2\right) u_{2xx} + \beta u_{2xxx} + u_{2xxxx} = 2C\left(u_1 u_{1xx} - u_1 u_{1x} + u_{1x}^2\right),\\
&\varepsilon^3: \; u_{3t} + C^2 u_{3x} + \left(\alpha - C^2\right) u_{3xx} + \beta u_{3xxx} + u_{3xxxx} = \left(2Cu_2 + u_1^2\right)\left(u_{1xx} - u_{1x}\right) +\\
&\qquad + 2Cu_1\left(u_{2xx} - u_{2x}\right) + 4Cu_{1x}u_{2x} + 2u_1 u_{1x}^2, \ldots
\end{aligned} \tag{59}$$

Первое уравнение (59) имеет экспоненциальное решение при условии

$$\omega = C^2 k\left(1 - k\right) + k^4 + \beta k^3 + \alpha k^2. \tag{60}$$

Разрешая остальные уравнения и вводя стандартное обозначение (42), имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n\left(x, t\right) = z - \frac{\left(2k - 1\right) C z^2}{k\left(C^2 - 3\beta k - 7k^2 - \alpha\right)} + \\
+ \frac{\left(3k - 1\right)\left(11C^2 k + 3\beta k^2 + 7k^3 - 6C^2 + \alpha k\right) z^3}{6k^2\left(C^2 - 3\beta k - 7k^2 - \alpha\right)\left(C^2 - 4\beta k - 13k^2 - \alpha\right)} - \ldots
\end{aligned} \tag{61}$$

Уравнение (57) имеет решение с полюсом 1-го порядка. Выбирая $M = 1$, используем условия геометричности (35), первые два из которых, не приводимые здесь ввиду громоздкости, обращаются в тождества при

$$C = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\beta + 3k + 1\right), \quad \alpha = \frac{1}{6}\left[\beta\left(\beta - 4\right) + 3k^2 - 5\right]. \tag{62}$$

Остальные уравнения (35) при этом также тождественно удовлетворяются. Сумма ряда (61) в предположении о его геометричности

$$S = \frac{z}{1 - q} = \frac{z}{1 - q_1 z} = \frac{z}{1 - A_2 z} = \frac{6kz}{6k \mp \sqrt{6}z},$$

после замены переменной (42), с учетом (60) и (62), подставляется в (58) и дает точное решение уравнения (57)

$$u = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\beta + 3k + 1\right) + \frac{1}{(1/\varepsilon)\exp\left[-kx + (k/6)\left(\beta^2 + 2\beta + 3k^2 + 1\right)\right] \mp \sqrt{6}/(6k)}. \tag{63}$$

Решение содержит две ветви, соответствующие нижним и верхним знакам в (63), каждая из которых имеет форму кинка при выборе соответствующего знака ε.

В случае знака «плюс» перед последним слагаемым в (57) будем искать решение в окрестности нуля в форме (39). В системе уравнений для определения функций $u_n(x,t)$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \ u_{1t} + \alpha u_{1xx} + \beta u_{1xxx} + u_{1xxxx} = 0,\\
&\varepsilon^2: \ u_{2t} + \alpha u_{2xx} + \beta u_{2xxx} + u_{2xxxx} = 0,\\
&\varepsilon^3: \ u_{3t} + \alpha u_{3xx} + \beta u_{3xxx} + u_{3xxxx} = -u_1^2\left(u_{1x} + u_{1xx}\right) - 2u_1u_{1x}^2,\\
&\varepsilon^4: \ u_{4t} + \alpha u_{4xx} + \beta u_{4xxx} + u_{4xxxx} = -u_1^2\left(u_{2x} + u_{2xx}\right) - 2u_1u_2\left(u_{1x} + u_{1xx}\right) -\\
&\qquad\qquad - 4u_1u_{1x}u_{2x} - 2u_2u_{1x}^2, \ldots
\end{aligned}$$

первые два уравнения являются однородными. Поэтому, как и в п. 2.3., ряд метода возмущений содержит только нечетные степени z. После почленного умножения на z и замены $y = z^2$, преобразованный таким образом ряд содержит все натуральные степени переменной y

$$\begin{aligned}
u = y - \frac{(3k+1)\,y^2}{6k\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} + \frac{(3k+1)(5k+1)\,y^3}{24k^2\left(6\beta k + 31k^2 + \alpha\right)\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} -\\
- \frac{(3k+1)(7k+1)\left(96\beta k^2 + 381k^3 + 21\alpha k + 24\beta k + 101k^2 + 5\alpha\right)y^4}{432k^3\left(8\beta k + 57k^2 + \alpha\right)\left(6\beta k + 31k^2 + \alpha\right)\left(4\beta k + 13k^2 + \alpha\right)} + \ldots
\end{aligned} \tag{64}$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = k^4 + \beta k^3 + \alpha k^2. \tag{65}$$

Разрешаемые последовательно первое из условий геометричности (35) дает

$$\alpha = -\frac{k^2\left(24\beta + 9k - 23\right)}{9k+1}, \tag{66}$$

второе приводит к требованию

$$\beta = 1. \tag{67}$$

Третье условие (35) при выполнении (66) и (67) удовлетворяется тождественно. В предположении геометричности ряда (64) его сумма равна

$$S = \frac{y}{1-q} = \frac{y}{1-q_1y} = \frac{y}{1-A_2y} = \frac{24k^2y}{24k^2 + y}. \tag{68}$$

После возвращения в (68) к переменной z, делим на z и подставляем (42) с учетом (65)

$$u = \frac{24k^2\varepsilon \exp\left(kx - k^3t\right)}{24k^2 + \varepsilon^2 \left[\exp\left(kx - k^3t\right)\right]^2} = \sqrt{6}k\mathrm{sech}\left[kx - k^3t + \ln\left(\frac{\varepsilon\sqrt{6}}{12k}\right)\right]. \quad (69)$$

Подстановка в уравнение (57) показывает, что (69) есть его точное солитоноподобное решение.

2.5. Список точных решений уравнений семейства КС. С использованием предложенной методики построены точные решения уравнений семейства КС, сведенные в таблицу.

Таблица

Точные решения уравнений семейства КС

Уравнение и условия на коэффициенты	Точное решение
$u_t+uu_x + u_{xx}+\alpha u_{xxx}+\beta u_{xxxx} = u-\lambda u^2 - \mu u^3$ $\beta = -\dfrac{k^2-1}{k^4}$, $\lambda = -\dfrac{4k^2-5}{2\alpha k^2}$, $\mu = \dfrac{5\left(k^2-1\right)}{6\alpha^2 k^4}$	$u = \dfrac{144\alpha^2 k^3\varepsilon \exp\left(kx-\alpha k^3t\right)}{\left[12\alpha k+\varepsilon \exp\left(kx-\alpha k^3t\right)\right]^2}$
$u_t + u^3u_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0$ $\alpha = \dfrac{2}{k}$, $\beta = \dfrac{1}{3k^2}$	$u = \dfrac{216k\varepsilon \exp\left(kx - \frac{10}{3}k^2t\right)}{216k + \left[\varepsilon \exp\left(kx - \frac{10}{3}k^2t\right)\right]^3}$
$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} + \alpha u_{xxxx} + \beta\left(uu_x\right)_x = 0$ $\alpha = \beta$	$u = -k^2 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{144k^3\varepsilon \exp\left(kx + \frac{k}{\alpha}t\right)}{\left[12k + \varepsilon \exp\left(kx + \frac{k}{\alpha}t\right)\right]^2}$
$u_t+uu_x+u_{xx}+u_{xxx}+\alpha u_{xxxx}+\beta\left(u^2u_x\right)_x = 0$ $\alpha = -\dfrac{1}{3k}$, $\beta = \dfrac{9}{2k\left(2k+3\right)^2}$	$u = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2k\left(2k+3\right)} + \dfrac{1}{\varepsilon}\exp\left[-kx + \frac{1}{3}k^2\left(2k+3\right)t\right]}$
$u_t+u^3u_x+u_{xx}+u_{xxx}+\alpha u_{xxxx}+\beta\left(uu_x\right)_x = 0$ $\alpha = \dfrac{k+1}{5k^2}$, $\beta = \dfrac{11k+6}{15}\left(\dfrac{45}{k^2+k}\right)^{\frac{1}{3}}$	$u = \dfrac{1}{\frac{1}{6}\left(\frac{45}{k^2+k}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\varepsilon}\exp\left[-kx + \frac{6}{5}k^2\left(k+1\right)t\right]}$

3. Достоинства и недостатки метода

Проведенный анализ показал, что предложенный метод может быть эффективно использован для нелинейных эволюционных уравнений, не содержащих произвольных функций независимых переменных и/или специальных функций зависимой переменной в качестве коэффициентов.

Метод несложно алгоритмизируется. Процесс вычисления коэффициентов ряда и последующая проверка условий геометричности могут быть легко запрограммированы в любой из современной систем компьютерной математики типа Maple или Mathematica.

Как известно, точное решение типа (69) в виде гиперболического секанса принципиально не может быть получено методами усеченных разложений [11]. Предложенный метод, наряду с методом Хироты, прямым методом с использованием рекуррентных соотношений [12] и методом проективных уравнений Риккати [13], лишен этого недостатка.

Одной из известных претензий к стандартному методу возмущений является неучёт структуры особых точек решения [10]. В предложенной модификации метода Ньютона порядок полюса искомого решения определяет выбор постоянной M – порядка знаменателя геометрической прогрессии, задающей структуру соотношений геометричности из п. 2.1.

Ограничением метода является невозможность нахождения всех уединенно-волновых решений исследуемого уравнения. Метод, по-видимому, не предназначен для уравнений с переменной сепарантой, приводимых к уравнениям с постоянной сепарантой при помощи дифференциальных подстановок и преобразований эквивалентности [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

Библиографический список

1. *Ньютон И.* Математические работы. Пер. с лат. Д.Д. Мордухай-Болтовского. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1937. 478 с.
2. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Серия «Современная математика для студентов». Москва: Наука, 1989. 96 с.
3. *Демина М.В., Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И.* Метод многоугольников для построения точных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2151–2162.
4. *Khovanskii A.G.* The Geometry of Formulas. Singularities of Functions, Wave Fronts, Caustics and Multidimensional Integrals // V.I. Arnold at al. *Math. Phys. Rev.* Vol. 4. New York: Harwood, 1984. P. 67–92.
5. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 464 с.

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. 544 с.
7. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191.
8. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Непрерывные дроби, метод возмущений и точные решения нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. с. 71–85.
9. *Ibragimov N.H.* Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1999.
10. *Конт Р., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. Москва: Ин-т компьютер. исслед.; Ижевск: Регуляр. и хаотич. динамика, 2011. 315 с.
11. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010. 368 с.
12. *Hereman W., Banerjee P.P., Korpel A., Assanto G., Immerzeele A. van, Meerpoel A.* Exact solitary wave solutions of non-linear evolution and wave equations using a direct algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. Vol. 19. P. 607–628.
13. *Conte R., Musette M.* Link between solitary waves and projective Riccati equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. P. 5609–5623.

References

1. Isaaci Newtoni. Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica. t. I, Lausannae et Geuevae, 1744.
2. Arnold V.I. Gyuygens i Barrou, Nyuton i Guk. Moscow: Nauka, 1989. 96 p. (In Russian)
3. Demina M.V., Kudryashov N.A. & Sinel'shchikov D.I. *Comput. Math. and Math. Phys.* 2008. Vol. 48. P. 2182.
4. Khovanskii A.G. The Geometry of Formulas. Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals. V.I. Arnold at al. *Math. Phys. Rev.* Vol. 4. New York: Harwood, 1984. P. 67–92.
5. Berkovich L.M. Factorization and Transformations of Differential Equations. Methods and Applications. Moscow: NPC «Regular and chaotic dynamics», 2002. 464 p. (In Russian)
6. Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. Moscow: Nauka. Gl. Red. Phys.-Math. Lit. 1992. 544 p. (In Russian)
7. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9, N. 2. P. 182–191 (in Russian).
8. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, N. 4. P. 71–85 (in Russian).

9. Ibragimov N.H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1999.
10. Conte R., Musette M. The Painleve Handbook. Dordrecht: Springer, 2008. 256 p.
11. Kudryashov N.A. / Dolgoprudnyi: Izd. Dom. «Intellect», 2010. 368 p. (In Russian)
12. Hereman W., Banerjee P.P., Korpel A., Assanto G., Immerzeele A. van, Meerpoel A. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1986. Vol. 19. P. 607–628.
13. Conte R., Musette M. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992. Vol. 25. P. 5609–5623.

Поступила в редакцию 7.11.2016

Землянухин Александр Исаевич родился в 1967 году в Саратове, окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета (1989). Заведующий кафедрой «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1995) и доктора физико-математических наук в Институте проблем машиноведения РАН (1999) в области динамических задач механики деформируемого твердого тела. Автор монографии «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны симметрии, эволюция» (1999, в соавторстве с Л.И.Могилевичем). Области научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

410008 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Бочкарёв Андрей Владимирович родился в 1973 году в Саратове, окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук в СГТУ (1999). Научные интересы: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, точные решения нелинейных уравнений в частных производных.

410008 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
E-mail: ab2009sar@list.ru