



Серия «Синергетика: От прошлого к будущему»

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

*Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.*

© ЛЕНАНД, 2016

117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11

ISBN 978-5-9710-3927-3

Теория нелинейных волн – все еще молодая наука, хотя исследования в этом направлении велись даже в XIX веке, главным образом в связи с задачами газо- и гидродинамики. Однако как единая наука теория нелинейных волн сложилась в конце 1960-х – начале 1970-х гг., которые стали годами ее бурного развития.

Основная причина этого – развитие вычислительной техники, позволившее подступиться к непосредственному численному решению уравнений в частных производных, которые описывают распространение волн в различных средах.

Вторым толчком послужило создание мощного математического аппарата, позволяющего в принципе осуществить точное аналитическое решение ряда нелинейных уравнений в частных производных. Появление этих методов, в первую очередь – метода обратной задачи рассеяния, вызвало большой интерес у физиков и математиков. Во многом благодаря этому методу в настоящее время теория солитонов превратилась в самостоятельное научное направление в математической физике.

Третья причина состояла в расширении интереса к нелинейным явлениям в различных областях физики. Сформировались такие науки, как нелинейная акустика, нелинейная оптика; богатый материал для исследования нелинейных волновых процессов дали физика плазмы, радиофизика, электроника. С установлением глубокой общности между явлениями, наблюдаемыми в системах самой различной природы, пришло осознание того, что практически все многообразие нелинейных волновых процессов может быть сведено к небольшому числу типичных, канонических ситуаций, которые допускают описание при помощи одних и тех же уравнений (получивших название эталонных). Все это привело к становлению новой науки – теории нелинейных волн.

Предлагаемая книга содержит систематическое изложение основ теории нелинейных волн. Хотя освоение материала книги предполагает знакомство читателя с основами некоторых смежных дисциплин и базовую математическую подготовку, авторы стремились добиться того, чтобы изложение носило по возможности независимый, «замкнутый» характер. Работа отражает содержание цикла лекционных курсов, в разном объеме читавшихся и читающихся авторами ныне во многих университетах России, а также США и Южной Кореи. Помимо теоретического материала в текст книги включены важнейшие типовые задачи с решениями.

Книга адресована студентам и аспирантам физических и физико-технических специальностей вузов, а также специалистам-исследователям.

*Рекомендовано в 2000 г. Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физическим специальностям.*

## Оглавление

### Предисловие

### Введение

#### 1. Основные модели эволюции нелинейных волн

1.1. Об эвристическом подходе к нелинейным волновым уравнениям. 1.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации. 1.3. Волны в нелинейной среде с диссипацией. 1.4. Волны в нелинейных средах с дисперсией. 1.4.1. Среда с дисперсией в области высоких частот. 1.4.2. Среда с дисперсией в области низких частот. 1.4.3. Среда с дисперсией и диссипацией. 1.5. Распространение волновых пакетов. 1.6. Нелинейные волны в средах с неустойчивостью. 1.7. Обобщение на неоднородный случай. 1.8. Неполиномиальные дисперсионные соотношения.

#### 2. Простая волна

2.1. Уравнение простой волны и его решение методом характеристик. 2.2. Задача о распространении гармонического сигнала. О группировке электронов в пролетном клистроне. 2.3. Спектр опрокидывающейся волны.

#### 3. Образование разрывов в простой волне

3.1. Обобщенные решения и граничные условия на разрыве. 3.2. Распространение гармонического сигнала. пилообразная волна и ее спектр. 3.3. Распространение треугольного и биполярного импульсов. 3.4. Возмущение от движущегося источника. 3.5. Слияние разрывов.

#### 4. Простые волны в примерах

4.1. Квазилинейные системы гиперболических уравнений. Критерий гиперболичности. 4.2. Простые волны в газовой динамике. 4.3. Гравитационные волны на «мелкой воде». 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме. 4.5. Волны в автомобильном потоке. 4.6. Граничные условия на разрыве и их связь с законами сохранения.

#### 5. Нелинейные волны в средах с диссипацией (уравнение Бюргерса)

5.1. Точные решения уравнения Бюргерса. Преобразование Коула–Хопфа. 5.2. Поведение решений уравнения Бюргерса в пределе  $v \ll 1$ . 5.3. Стационарная ударная волна. 5.4. Распространение гармонического сигнала в нелинейной среде с диссипацией. 5.5. Взаимодействие ударных волн. 5.6. Распространение одиночного импульса в нелинейной среде с диссипацией. 5.7. Автомодельные решения уравнения Бюргерса.

#### 6. Примеры ударных волн

6.1. Сильный точечный взрыв. Качественная картина и анализ размерностей. 6.2. Ударные волны естественного происхождения на Земле. Гром, землетрясения, извержения вулканов, падение метеоритов. 6.3. Ударные волны, искусственно создаваемые на Земле. 6.4. Об ударных волнах в космосе.

#### 7. История открытия солитона

7.1. Дж. Скотт Расселл и открытие солитона. 7.2. Уравнения Буссинеска и Кортевега–де Вриза. 7.3. Проблема Ферми–Паста–Улама. 7.4. Взаимодействие солитонов и работа Забуски и Крускала.

#### 8. Стационарные нелинейные волны

8.1. Стационарные решения уравнения КДВ: кноидальные волны и солитоны. 8.2. Модифицированное уравнение КДВ. 8.3. Уравнение Буссинеска. 8.4. Стационарные ударные волны в среде с дисперсией и диссипацией. 8.5. Уравнение Син–Гордона. 8.5.1. Стационарные волны. 8.5.2. Физические примеры. 8.6. Стационарные ленгмюровские волны в холодной плазме. 8.7. Уединенные волны пространственного заряда в электронном пучке. 8.8. Стационарные ионно-звуковые волны.

- 9. Уравнение Кортевега–де Вриза в конкретных физических задачах**  
 9.1. Ионно-звуковые волны в плазме. 9.2. Ленгмюровские волны в поперечно ограниченной плазме. 9.3. Гравитационные волны на мелкой воде. 9.4. Волны в нелинейной линии передачи. 9.5. Газовая динамика и уравнение Бюргерса.
- 10. Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений**  
 10.1. Законы сохранения уравнения КдВ и преобразование Миуры. 10.2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ. 10.3. Многосолитонные решения. 10.4. Обратная задача рассеяния в формулировке Лакса. 10.5. Дальнейшее обобщение метода обратной задачи. 10.6. Метод Хироты и многосолитонные решения. 10.6.1. Уравнение КдВ. 10.6.2. Модифицированное уравнение КдВ. 10.7. Преобразования Бэклунда.
- 11. Модулированные волны в нелинейных средах**  
 11.1. Теория Уизема. 11.2. Критерий Лайтхилла и модуляционная неустойчивость. 11.3. Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод многих масштабов. 11.4. Неустойчивость пространственно-однородного решения. 11.5. Стационарные решения НУШ. «Светлые» и «темные» солитоны. 11.6. Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике. Солитоны в волоконных световодах. 11.7. Самофокусировка света. 11.8. Трехволновое взаимодействие в квадратично-нелинейной среде. 11.8.1. Параметрическая (распадная) неустойчивость. 11.8.2. Вырожденное параметрическое взаимодействие. 11.8.3. Взрывная неустойчивость.
- 12. Нелинейные волны в средах с неустойчивостями**  
 12.1. Уравнение Гинзбурга–Ландау. 12.1.1. Анализ на абсолютную и конвективную неустойчивости. 12.1.2. Модуляционная неустойчивость. 12.2. Конвекция Рэлея–Бенара. 12.3. Об автоколебаниях в распределенных системах. Динамическая модель пространственного развития турбулентности. 12.4. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой из двухуровневых частиц. 12.4.1. Двухуровневая среда. Уравнения Блоха. 12.4.2. Самоиндуцированная прозрачность. 12.4.3. Распространение импульсов в усиливающей среде. Автомодельные решения. 12.5. Волны в нелинейных активных линиях передачи.

## Список литературы

### Предисловие

ВОЛНА ж. водяной гребень, гряда, долгий бугор, поднявшийся при всколыхании воды ветром или иною силою. Самые мелкие волны, *рябь*; крупная, отдельная, *волна*, *вал*; самая большая *кольшень*, *взводень*; средняя, *плескун*; пенистая, *завитки*, *кудрявка*, *барашек*, *зайчик*; крупная, *белоголовец*; прибрежная, в погоду, *прибой*, *бурун*; мелкая, крутая, на отмели, над камнями, *бурун*, *толкун*, *толчея*, *сутолока*; волна или волнение, противное течению или изменившемуся ветру, *спорная волна*, *чистоплеск*; набегающая на берег, *накатная волна*, *заплески*. Меж двух гряд волн образуется *хлябь*; вершина волны, *гребень*; с наветру *откос*; сподветру *круча волны*. *Девятым валом* или *волной* зов. по поверью, чередную, большую противу прочих, роковую волну. *Вождь бурь* *полночного народа*, *девятый вал в морских волнах*, Суворов. || В переносном значении *волною* зовут движущуюся в одну сторону громаду, толпу. *Народ волна волной валит*.

*В.И.Даль*. Толковый словарь живого великорусского языка (М.: Русский язык, 1998. Том первый. С. 233, 234)

Предлагаемая читателю книга содержит систематическое изложение основ теории нелинейных волн и адресована студентам и аспирантам физических и физико-технических специальностей вузов, а также специалистам-исследователям. Книга

выходит в серии «Современная теория колебаний и волн» и является логическим продолжением книг «Линейные колебания и волны» [1] и «Нелинейные колебания» [2]. Предполагается знакомство читателя с основами этих дисциплин и наличие у него базовой математической подготовки в объеме университетского курса для студентов-физиков. Однако авторы старались, чтобы изложение носило по возможности независимый, «замкнутый» характер.

Серия «Современная теория колебаний и волн» отражает содержание цикла лекционных курсов, читающихся на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета, в основу учебного плана которого положена нелинейная динамика. Первоначально раздел «Нелинейные волны» входил в курс лекций «Теория волновых процессов» для студентов четвертого курса радиофизического отделения университета, который на протяжении многих лет читал чл.-корр. РАН Д.И. Трубецков. В основном его содержание соответствовало идеологии книги М.И. Рабиновича и Д.И. Трубецкова «Введение в теорию колебаний и волн»<sup>1</sup>. Отдельные лекции по нелинейным волнам читались Д.И. Трубецковым также в Самарском педагогическом институте, Ростовском государственном университете, Санкт-Петербургском политехническом университете, Вайомингском университете (США), Сеульском национальном университете (Ю. Корея). Начиная с 1997 г. курс лекций «Нелинейные волны» читается авторами для третьекурсников факультета нелинейных процессов. Параллельно с лекциями проводятся семинары по решению задач, которые частично включены в основной текст книги, частично выделены самостоятельно.

Для одного из авторов (Д.И. Трубецкова) овладение теорией нелинейных волн связано, в первую очередь, с участием в уникальных горьковских (теперь нижегородских) школах «Нелинейные волны». Не было бы этих школ, возможно, не было бы этой книги.

*Авторы*

---

<sup>1</sup>Книга была дважды опубликована в издательстве «Наука» (Москва) в 1984 и 1992 гг., третье издание вышло в 2000 г. в НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» (Москва–Ижевск). Кроме того, в 1989 г. книга была издана на английском языке (M.I. Rabinovich and D.I. Trubetskov. Oscillations and waves in linear and nonlinear systems. – Kluwer Academic Publishers, 1989, 577 p.).