



ОТОБРАЖЕНИЯ С КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬЮ РАЗНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ БИФУРКАЦИЯМИ

А. П. Кузнецов^{1,2}, Ю. В. Седова¹

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Поступила в редакцию 7.06.2017, после доработки 7.07.2017

В работе обсуждается построение удобных и информационно емких трехмерных отображений, демонстрирующих существование 2-торов и 3-торов. Первое отображение получено путем дискретизации потоковой системы – генератора квазипериодических колебаний. Второе – путем дискретизации климатической модели Лоренц-84. Третье отображение предложено в теории квазипериодических бифуркаций Симо, Броером, Витоло. Необходимость обсуждения таких отображений связана с возможностью для них квазипериодичности разной размерности, а также квазипериодических бифуркаций, то есть бифуркаций инвариантных торов. Данный вопрос пока еще недостаточно освещен как в научной, так и в учебной литературе. Основным методом исследования является построение карт ляпуновских показателей. Карты получены численными методами. На таких картах разными оттенками показаны области периодических режимов, двухчастотной квазипериодичности, трехчастотной квазипериодичности и хаоса. Представлены также иллюстрации динамики в виде фазовых портретов. Обсуждаются особенности и классификационные признаки квазипериодических бифуркаций – бифуркаций инвариантных торов. Квазипериодические бифуркации анализируются с помощью графиков ляпуновских показателей и бифуркационных деревьев. Обсуждается различие квазипериодической бифуркации Хопфа и седло-узловой бифуркации инвариантных торов. Обсуждается зависимость картины от параметра – шага дискретизации. При малых значениях этого параметра картина близка к традиционной системе языков Арнольда, которые, однако, теперь наблюдаются на базе двухчастотных режимов и погружены в трехчастотную область. Новым моментом является появление встроенных в эти языки областей периодических резонансов высокого порядка. С ростом параметра дискретизации картина меняется. Языки с характерными острями-основаниями сменяются полосами двухчастотных режимов со встроенными поперечными полосами периодических резонансов, от которых, в свою очередь, отходит новая система всеобразных языков двухчастотных режимов. Фазовые портреты внутри языков переходят от многооборотных кривых к системе изолированных овалов. Таким образом, показано, что картина, ассоциирующаяся с квазипериодической бифуркацией Хопфа, достаточно сложна и требует для своего анализа трех параметров. Сопоставляются случаи разных отображений. Показано, что

«тор-отображение» наиболее полно описывает круг существенных феноменов в системах с квазипериодичностью разной размерности.

Keywords: Отображения, квазипериодическая динамика, инвариантные торы, квазипериодические бифуркации.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

Образец цитирования: Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Отображения с квазипериодичностью разной размерности и квазипериодическими бифуркациями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 4. С. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

MAPS WITH QUASI-PERIODICITY OF DIFFERENT DIMENSION AND QUASI-PERIODIC BIFURCATIONS

A. P. Kuznetsov^{1,2}, Y. V. Sedova¹

¹Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS (Saratov Branch)
38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

²National Research Saratov State University
83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia
E-mail: apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Received 7.06.2017, revised 7.07 2017

The paper discusses the construction of convenient and informative three-dimensional mappings demonstrating the existence of 2-tori and 3-tori. The first mapping is obtained by discretizing the continuous time system – a generator of quasi-periodic oscillations. The second is obtained via discretization of the Lorentz-84 climate model. The third mapping was proposed in the theory of quasi-periodic bifurcations by Simo, Broer, Vitolo. The necessity of discussing such mappings is connected with the possibility for them of a quasi-periodicity of different dimensions, as well as quasi-periodic bifurcations, i.e. bifurcations of invariant tori. This issue has not yet been adequately covered both in scientific and educational literature. The main method of investigation is the construction of Lyapunov exponents charts. Charts are obtained by numerical methods. On such charts regions of periodic modes, two-frequency quasi-periodicity, three-frequency quasi-periodicity, and chaos are marked by different colors. Illustrations of dynamics in the form of phase portraits are also presented. Specific features and classification features of quasi-periodic bifurcations – bifurcations of invariant tori – are discussed. Quasi-periodic bifurcations are analyzed using graphs of Lyapunov exponents and bifurcation trees. The difference between the quasi-periodic Hopf bifurcation and the saddle-node bifurcation of invariant tori is discussed. The dependence of the picture on the parameter – the discretization step – is discussed. At small values of this parameter, the picture is close to the traditional system of Arnold's tongues, which, however, are now observed on the basis of two-frequency regimes and are immersed in a three-frequency region. The new moment is the appearance of regions of periodic high-order resonances built into these languages. As the sampling parameter increases, the picture changes. Tongues with characteristic cuspid-bases are replaced by bands of two-frequency modes with built-in transverse bands of periodic resonances, from which, in turn, a new system of fan-like tongues of two-frequency modes departs. The phase portraits inside languages change from multi-turn curves to a system of isolated ovals. Thus, it is shown that the picture associated with the quasi-periodic Hopf bifurcation is quite complex and requires three parameters for its analysis. The cases of different mappings are compared. It is shown that the «torus-mapping» most fully describes the range of essential phenomena in systems with quasi-periodicity of different dimensions.

Ключевые слова: Maps, quasi-periodic dynamics, invariant tori, quasi-periodic bifurcations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

Paper reference: Kuznetsov A.P., Sedova Y.V. Maps with quasi-periodicity of different dimension and quasi-periodic bifurcations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 4. P. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

Введение

Одним из популярных объектов в нелинейной динамике, теории хаоса и теории бифуркаций являются отображения. Они, с одной стороны, очень просты для исследования и численного анализа, а с другой – демонстрируют многие фундаментальные нелинейные эффекты [1–6]. Весьма продвинутой является теория бифуркаций отображений [7–9]. Отображения естественным образом классифицируются по размерности – числу существенных переменных. Примеры одномерных отображений – это логистическое отображение, демонстрирующее переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода; отображение Бернулли, объясняющее природу появления хаоса; отображение окружности, демонстрирующее картину языков синхронизации и иллюстрирующее квазипериодическую динамику [1–6]. К двумерным отображениям относится популярное отображение Эно, которое уточняет ряд моментов по сравнению с логистическим отображением, в частности, переход от диссипативного к консервативному случаю. Отображение Эно, однако, не дает все основные бифуркационные сценарии и не описывает ассоциирующуюся с рождением квазипериодических колебаний бифуркацию Неймарка–Сакера. Эти недостатки восполняют предложенное в [10] отображение (*minimal 2-D quadratic map*), а также предложенное в [11] универсальное отображение. Интерес представляют также отображение Богданова (*Bogdanov map*) [12] и аналогичные ему другие формы отображений, ассоциирующиеся с бифуркацией Богданова–Тakensа [13].

При переходе к трехмерным системам количество возможных эффектов и сложность динамики увеличиваются. Так уже трехмерное отображение типа Эно является предметом современных исследований, в частности, нацеленных на классификацию хаотических аттракторов [14, 15]. Известны различные примеры трехмерных отображений: отображения Рихтера [16, 17], дискретный осциллятор Ресслера [18], множество вариантов отображений Спротта [19] и другие модели. Однако введение третьего измерения дает еще одну возможность, состоящую в увеличении размерности квазипериодических колебаний. Поясним это подробнее.

В потоковых системах (то есть в системах, описываемых дифференциальными уравнениями) двухчастотной квазипериодичности отвечают инвариантные торы. В сечении Пуанкаре такого тора наблюдается замкнутая инвариантная кривая, которая выглядит как овал. Для резонансного предельного цикла в сечении Пуанкаре возникает набор точек. Трехчастотной квазипериодичности отвечают инвариантный тор более высокой размерности. В сечении Пуанкаре теперь наблюдается «размазанный овал». Фазовое пространство отображений аналогично сечению Пуанкаре потока. Поэтому будем, как часто делают, и для дискретных отображений говорить о «торах». Таким образом, в трехмерных отображениях возможна как двухчастотная квазипериодичность, представленная 2-тором, так и трехчастотная, представленная 3-тором.

В силу этого возникает проблема *квазипериодических бифуркаций* – бифуркаций инвариантных торов разной размерности [20]. В настоящем сообщении мы обсудим некоторые примеры отображений, пригодных для изучения этих эффектов. Они могут быть полезными при изложении учебных курсов по теории динамических систем и теории бифуркаций. Также они представляют собой хорошие задачи для соответствующих компьютерных практикумов.

1. Тор-отображение

Один из простейших способов построения отображений состоит в замене конечными разностями производных по времени в дифференциальных уравнениях, описывающих динамическую систему. Этот прием восходит к первым исследованиям в области нелинейной динамики и продолжает использоваться и теперь [21, 22, 12, 13, 16]. Такая процедура замечательна тем, что дискретизация обогащает динамику. Например, вместо одномерного потока с простейшей бифуркацией седло-узел получается логистическое отображение с каскадом бифуркаций удвоения периода и универсальностью Фейгенбаума. Дискретный осциллятор ван дер Поля демонстрирует простейшую инвариантную кривую (тор). Для системы Ресслера вместо предельных циклов и бифуркаций удвоения периода в дискретной версии становятся возможны инвариантные торы и удвоения торов [16] и т.д.

Таким образом, прежде всего, необходимо выбрать подходящую потоковую систему. Для наших целей это должна быть система с двухчастотной квазипериодической динамикой. При процедуре дискретизации размерность повысится, и станет возможной трехчастотная квазипериодичность.

Сейчас известно несколько удобных примеров автономных систем с двухчастотной квазипериодичностью, в первую очередь, радиофизических генераторов [23–28]. Обратимся к модели генератора квазипериодических колебаний [28]:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, z – динамические переменные. Одно из преимуществ системы (1) состоит в минимально необходимой размерности фазового пространства (равной трем) для возможности автономной квазипериодичности. Преимущество по сравнению с другой трехмерной системой [28] состоит в наличии у системы (1) устойчивого состояния равновесия и бифуркации Андронова–Хопфа рождения устойчивого предельного цикла. Этот предельный цикл, в свою очередь, может испытывать бифуркацию Неймарка–Сакера, которая при дискретизации будет инициировать более сложную, квазипериодическую бифуркацию.

Перепишем уравнения (1) в стандартном для динамических систем виде в форме системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Дискретизированная модель, в которой производные заменены конечными разностями (будем называть ее *тор-отображение*) [29], имеет вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hy_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h((\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4)y_n - \omega_0^2 x_n), \\ z_{n+1} &= z_n + h(b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь h – шаг дискретного времени, новый дополнительный параметр. Отметим, что для первого уравнения дискретизация выполнена по полуявной схеме Эйлера, то есть используется значение переменной y в $(n + 1)$ -й момент. Такая дискретизация обычно приводит к более физически обоснованным моделям [22].

Фиксируем набор параметров $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, для которого в системе (1) возможна бифуркация Неймарка–Сакера и автономная двухчастотная квазипериодичность [28]. В дальнейшем эти параметры будем поддерживать неизменными. Будем увеличивать параметр дискретизации h , начиная с небольших его значений.

На рис. 1 в центре приведена полученная численно ляпуновская карта системы (3) для шага дискретизации $h = 0.05$. Система (3) характеризуется тремя показателями Ляпунова Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 . На карте различными оттенками обозначены области различных типов режимов, определенные в соответствии со спектром показателей Ляпунова:

- а) P – периодический режим (цикл) $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- б) T₂ – режим двухчастотной квазипериодичности $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- в) T₃ – режим трехчастотной квазипериодичности $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- г) C – хаотический режим $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- д) HC – гиперхаос $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- е) D – разбегание траекторий.

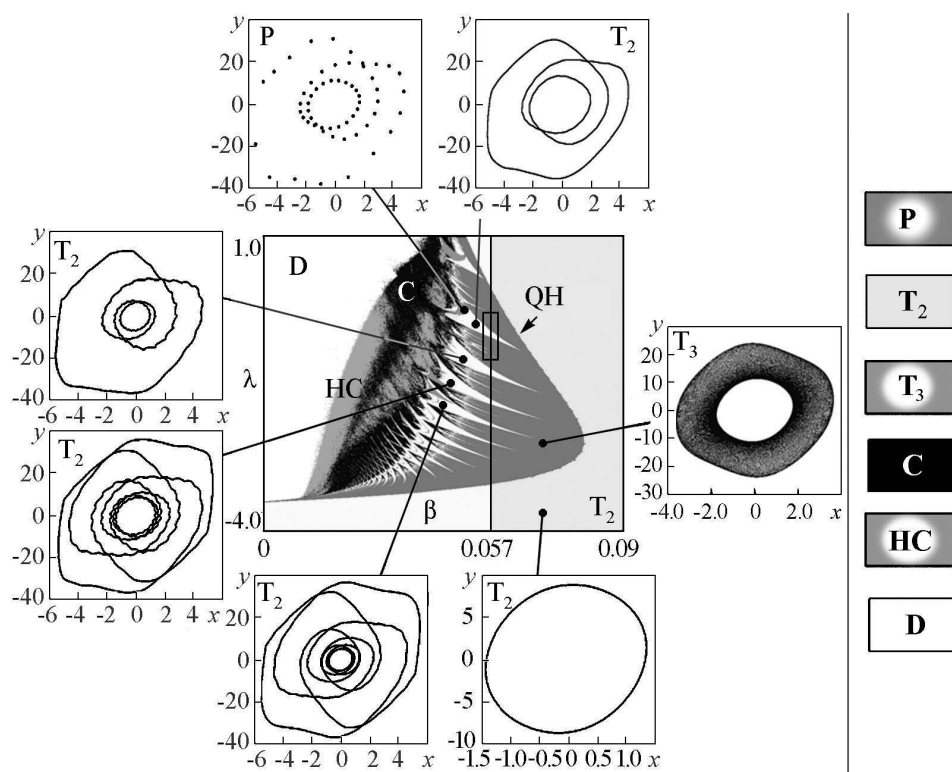


Рис. 1. Ляпуновская карта и фазовые портреты тор-отображения (3), $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$. Параметр дискретизации $h = 0.05$. QH – линия квазипериодической бифуркации Хопфа

Fig.1. Lyapunov chart and phase portraits of torus map (3), $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$. Discretization parameter $h = 0.05$. QH is a line of quasi-periodic Hopf bifurcation

В силу малости параметра дискретизации h устройство карты в качественном плане отчасти аналогично исходной потоковой системе (1) (см. рис. 8 в [28]). В то же время дискретизация приводит к тому, что периодические режимы в (1) сменяются двухчастотными, а двухчастотные – трехчастотными.

На рис. 1 можно видеть характерную картину языков 2-торов, аналогичную по конфигурации традиционным языкам Арнольда. Теперь, однако, эта система языков погружена в область 3-торов. Таким образом, языки отвечают резонансным двухчастотным торами, лежащим на поверхности трехчастотного тора, подобно тому, как традиционные языки Арнольда отвечают резонансным периодическим режимам на поверхности двухчастотного тора.

По периферии рис. 1 показаны некоторые типичные фазовые портреты. Можно видеть простейший 2-тор в виде овала. В трехчастотной области этот овал «размазывается». Внутри языков резонансных двухчастотных режимов аттракторы имеют вид замкнутых инвариантных кривых. В разных языках инвариантные кривые на плоскости (x, y) различаются числом оборотов вокруг начала координат.

В свою очередь, внутри языков резонансных 2-торов возникают резонансные области периодических режимов. В этом случае на инвариантной кривой сложной формы возникает множество точек соответствующего долгопериодического цикла.

Обсудим теперь бифуркации квазипериодических режимов. Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей на рис. 2, построенным вдоль линии $\beta = 0.057$, пересекающей область трехчастотной квазипериодичности на рис. 1 снизу вверх.

При малых λ устойчива неподвижная точка и все показатели отрицательны. При увеличении параметра λ эта точка теряет устойчивость в результате бифуркации Неймарка–Сакера (на рисунке не показана), и возникает 2-тор с нулевым ляпуновским показателем $\Lambda_1 = 0$. Далее этот показатель все время остается нулевым.

В точке QH бифуркацию претерпевает уже этот 2-тор. Как можно видеть из рис. 2, особенность этой бифуркации состоит в том, что до порога бифуркации равны показатели $\Lambda_2 = \Lambda_3$. В точке бифуркации оба эти показателя обращаются в нуль. За точкой бифуркации показатели уже не совпадают – второй равен нулю $\Lambda_2 = 0$, а третий становится отрицательным $\Lambda_3 < 0$. Таким образом, теперь $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, и возникает 3-тор. Это *квазипериодическая бифуркация Хопфа*. Ее отличительный признак – условие совпадения двух показателей до точки бифуркации [20].

С ростом управляющего параметра λ маршрут $\beta = \text{const}$ на карте рис. 1 пересекает множество языков 2-торов. На графике рис. 2, *a* они выглядят как множество «провалов» второго показателя. Границы этих областей образованы линиями *седло-узловых бифуркаций торов* SNT. Одна из таких областей в увеличенном виде показана на рис. 2, *b*. Отличительный признак бифуркации SNT состоит в том, что в нуль обращается второй показатель $\Lambda_2 = 0$, но величины Λ_2, Λ_3 не равны друг другу [20]. При этом Λ_3 остается все время отрицательным. На другой стороне языка такая бифуркация проходит в обратном порядке. Эти особенности хорошо видны на увеличенном фрагменте (см.рис. 2, *b*).

Таким образом, области трехчастотной и двухчастотной квазипериодичности на рис. 1 разделяет квазипериодическая бифуркация Хопфа QH. В дискретной модели (3) она приходит на смену бифуркации Неймарка–Сакера в потоке-прототипе (1).

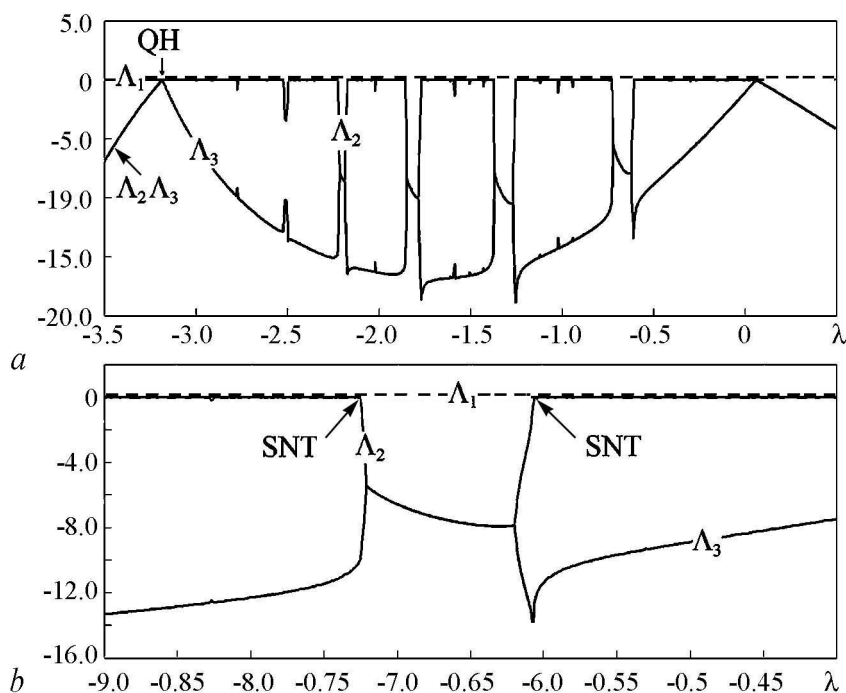


Рис. 2. Зависимость трех ляпуновских показателей от параметра λ отображения (3) и ее увеличенный фрагмент. Отмечены точки квазипериодической бифуркации Хопфа QH и седло-узловых бифуркаций торов SNT. Параметры $h = 0.05$, $\beta = 0.057$

Fig. 2. The dependence of the three Lyapunov exponents on the parameter λ of the map (3) and its enlarged fragment. Points of quasi-periodic Hopf bifurcation QH and saddle-node torus bifurcations SNT are marked. Parameters $h = 0.05$, $\beta = 0.057$

Описанная картина во многом сохраняет качественные черты традиционной для бифуркации Неймарка–Сакера и системы языков Арнольда, что связано с малым значением параметра дискретизации h . Однако картина квазипериодической бифуркации Хопфа трехпараметрическая. Действительно, теперь появляется дополнительный параметр, который ассоциируется с третьей дополнительной частотой. Оказывается, при увеличении параметра h картина может существенно модифицироваться. Поэтому будем увеличивать третий параметр h и проследим за возникающими изменениями на исследуемой плоскости.

На рис. 3 показана карта для $h = 0.085$. Структура резонансных языков все еще сохраняется, однако появляется и новая «поперечная» полоса. Интересно, что на ее пересечении с языками лежит множество новых мелких островов периодических режимов.

Еще более увеличим параметр дискретизации до значения $h = 0.1$ (рис. 4). Теперь происходят существенные качественные изменения картины. Характерная картина языков по типу языков Арнольда исчезла. От линии квазипериодической бифуркации Хопфа QH отходят полосы двухчастотных режимов. В них, в свою очередь, встроены поперечные полосы периодических режимов – точных резонансов. Эти резонансы порождают новые системы веерообразных языков двухчастотных режимов, погруженных в трехчастотную область. Таким образом, устройство плоскости параметров заметно изменилось.

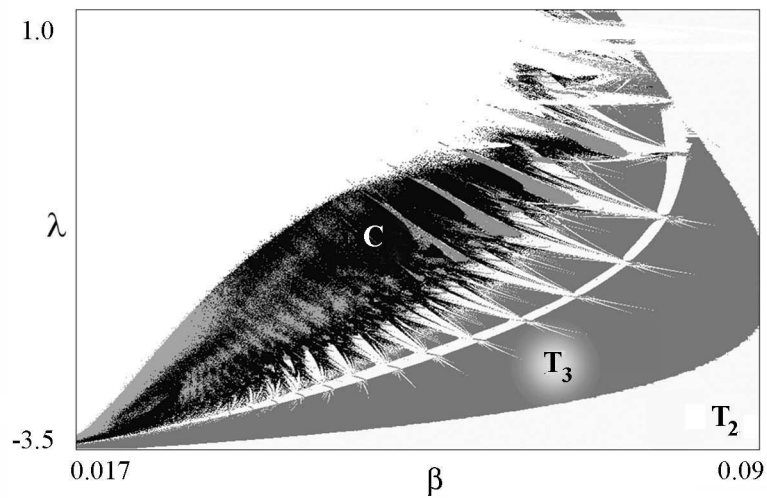


Рис. 3. Карта показателей Ляпунова тор-отображения (3). Параметр дискретизации $h = 0.085$

Fig.3. Lyapunov chart of torus map (3). Discretization parameter $h = 0.085$

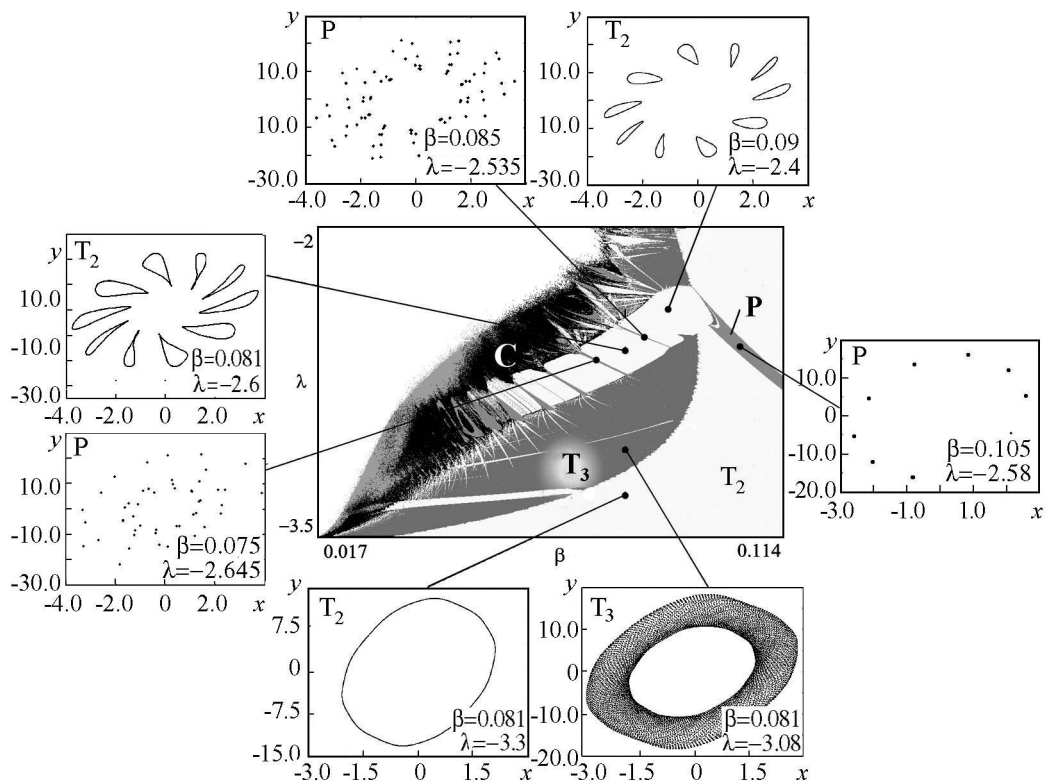


Рис. 4. Ляпуновская карта и фазовые портреты тор-отображения (3). Параметр дискретизации $h = 0.1$

Fig.4. Lyapunov chart and phase portraits of torus map (3). Discretization parameter $h = 0.1$

На рис. 4 по периферии приведены примеры фазовых портретов. Внизу можно видеть превращение 2-тора в 3-тор при переходе линии квазипериодической бифуркации Хопфа. Остальные рисунки демонстрируют «базовый» цикл периода 10 и его трансформации внутри соответствующей резонансной двухчастотной области. Далее можно видеть возникновение небольших изолированных овалов вокруг элементов 10-цикла, и язык «сопрягается» с полосой двухчастотных режимов. В [36] об аналогичной структуре говорят, как о «resonance bubble» – «резонансный пузырь», имея в виду переходную область от периодического к двухчастотному режиму. В деталях она устроена достаточно сложно, см. [30, 31].

Характерными являются примеры циклов очень высоких периодов внутри узких областей периодических режимов. Чтобы лучше визуализировать и различить периодические режимы, обратимся к традиционной карте динамических режимов, рис. 5. На такой карте [2] разным цветом обозначены циклы разных периодов. Остальные режимы показаны белым цветом. Можно видеть, что встроенные области периодических режимов имеют разные периоды, причем их величина достаточно большая. Периоды некоторых циклов указаны цифрами на рис. 5.

На рис.6 показана ляпуновская карта для значения параметра дискретизации $h = 0.11$. Несмотря на очень небольшое изменение параметра, устройство плоскости параметров существенно изменилось. Области в виде характерных двухчастотных полос исчезли. Языки двухчастотных режимов, возникшие из «веерообразных» систем, стали пересекаться, формируя характерную картину резонансной паутины Арнольда [32].

В методических целях мы рекомендуем самостоятельно построить карты и для других значений параметра дискретизации h и пронаблюдать их характерное устройство и их метаморфозы. В частности, в системе возможны и бифуркации удвоения торов [29].

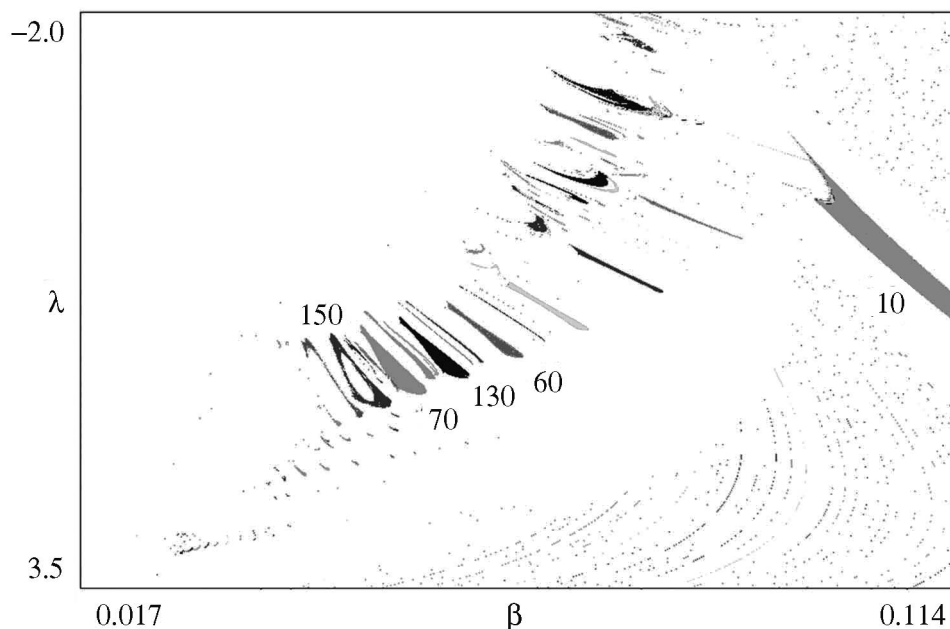


Рис. 5. Карта динамических режимов тор-отображения (3). Параметр дискретизации $h = 0.1$

Fig.5. Chart of dynamical regimes for torus map (3). Discretization parameter $h = 0.1$

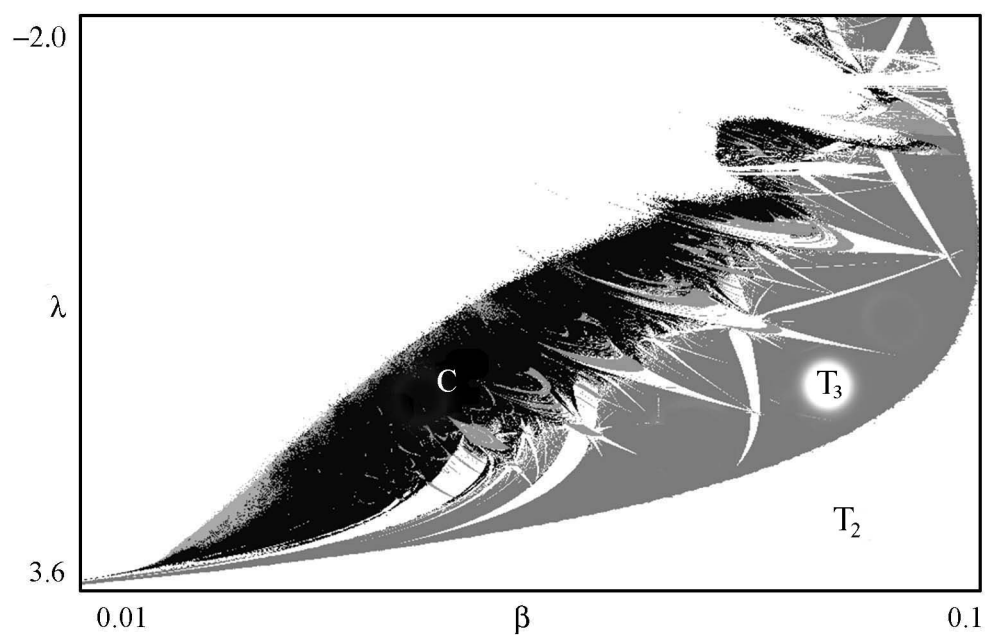


Рис. 6. Карта показателей Ляпунова тор-отображения (3). Параметр дискретизации $h = 0.11$
 Fig.6. Lyapunov chart of torus map (3). Discretization parameter $h = 0.11$

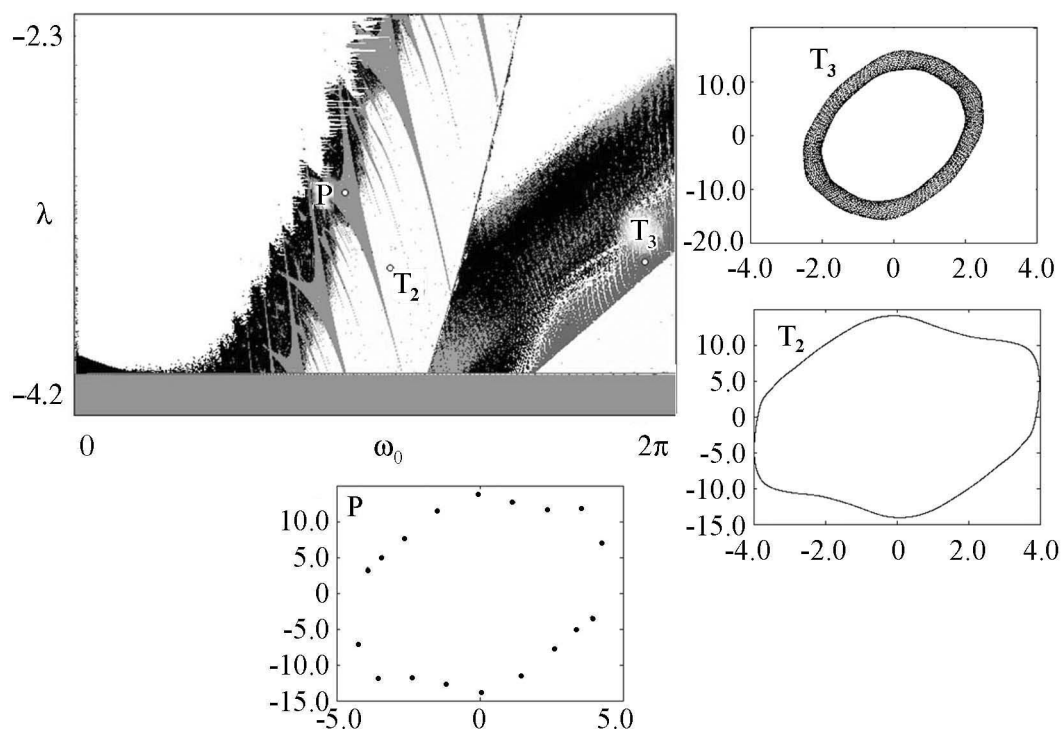


Рис. 7. Ляпуновская карта тор-отображения (3) на плоскости (ω_0, λ) . Значения параметров: $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\beta = 0.05$. Шаг дискретизации $h = 0.1$. Рисунок дополнен фазовыми портретами в характерных точках плоскости параметров

Fig.7. Lyapunov chart of torus map (3) on the plane (ω_0, λ) . Parameter values are $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\beta = 0.05$. Discretization parameter $h = 0.1$. The Figure includes phase portraits in characteristic points of the parameter plane

Отметим, что система (3) принадлежит к категории моделей, имеющих большой набор параметров. Обсудим устройство плоскости (ω_0, λ) . В работе [28] параметр ω_0 определяется как рабочая частота автоколебательного элемента, а параметр λ характеризует глубину положительной обратной связи в автогенераторе. Зафиксируем значение $\beta = 0.05$ (рис. 7). На плоскости параметров имеют место два «листа». Первый отвечает двухчастотной квазипериодичности со встроенной системой традиционных языков Арнольда. Второй лист содержит двухчастотную область, выше которой располагается трехчастотная со встроенной системой резонансных двухчастотных. Их основания выстроены вдоль линии квазипериодической бифуркации Хопфа.

2. Отображение модели Лоренц-84

Обратимся теперь к автономной системе с квазипериодической динамикой Лоренц-84, которая имеет определенную климатологическую мотивацию [33, 34],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax - y^2 - z^2 + aF, \\ \dot{y} &= -y + xy - bxz + G, \\ \dot{z} &= -z + bxy + xz.\end{aligned}\tag{4}$$

Дискретизируем ее по схеме Эйлера

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h[-ax_n - y_n^2 - z_n^2 + aF], \\ y_{n+1} &= y_n + h[-y_n + x_n y_n - bx_n z_n + G], \\ z_{n+1} &= z_n + h[-z_n + bx_n y_n + x_n z_n].\end{aligned}\tag{5}$$

Эта система имеет четыре управляющих параметра, из которых два обычно фиксируют, выбирая значения $a = 0.25$, $b = 4$ [33, 34]. Карта ляпуновских параметров на используемой традиционно плоскости двух оставшихся параметров (G, F) показана на рис. 8 для шага дискретизации $h = 0.1$.

Отметим симметрию картины относительно вертикальной оси. Однако область трехчастотной квазипериодичности занимает очень небольшую часть плоскости параметров. В увеличенном виде она показана на рис. 8 внизу. Можно видеть систему резонансных двухчастотных языков традиционного вида, аналогичную рис. 1, но при этом периодические резонансы внутри этих языков отсутствуют. Таким образом, наблюдается несколько иная картина.

При изменении параметра b можно прийти к новым особенностям (рис. 9). Можно видеть «остров» трехчастотной квазипериодичности, ограниченный двумя линиями квазипериодической бифуркации Хопфа. Языки двухчастотных режимов выстраиваются вдоль этих линий. Периодические резонансы внутри языков также отсутствуют, однако в данном случае языки имеют сложное внутреннее устройство. Интересно, что оно «развивается» при движении вдоль рисунка слева направо – в направлении увеличения параметра G . При этом хаотические острова внутри языков расширяются, и постепенно заполняют всю их область.

Устройство языков в «дохаотической» области характеризуется линиями удвоений тора, которые могут образовывать как один «остров», так и два внутренних «острова». На картах можно видеть «пробивающиеся» при численном счете линии

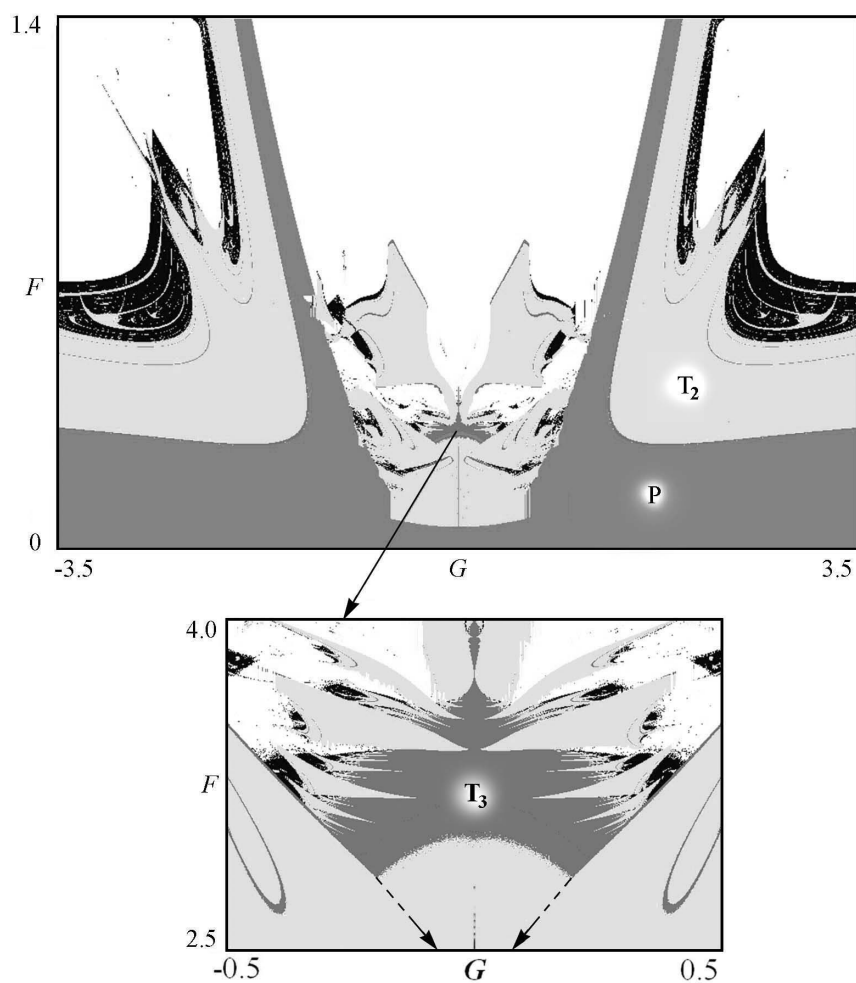


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей дискретной системы Лоренц-84 (5), $a = 0.25$, $b = 4$. Шаг дискретизации $h = 0.1$

Fig.8. Lyapunov chart of discrete Lorentz-84 model (5), $a = 0.25$, $b = 4$. Discretization parameter $h = 0.1$

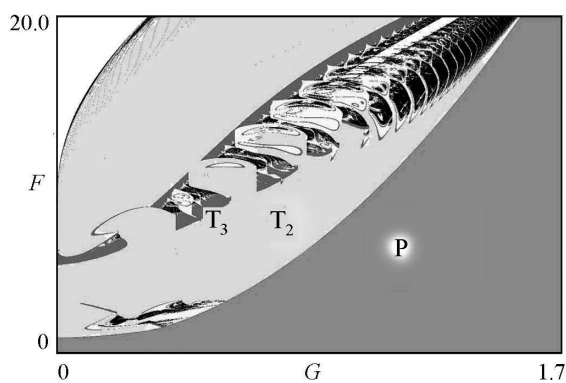


Рис. 9. Карта ляпуновских показателей дискретной системы Лоренц-84, $a = 0.25$, $b = 1$. Шаг дискретизации $h = 0.1$

Fig.9. Lyapunov chart of discrete Lorentz-84 model, $a = 0.25$, $b = 1$. Discretization parameter $h = 0.1$

квазипериодических бифуркаций внутри языков – обращение в нуль соответствующего показателя в данном случае сигнализирует о наличии бифуркации удвоения тора.

3. Отображение Броера–Симо–Витоло

Наконец, обратимся к отображению, предложенному Броером, Симо и Витоло (Broer H., Simó C., Vitolo R.) [20, 30–32]:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= e^{i\omega} w_n [1 - \gamma(\gamma\mu + az_n + \gamma z_n^2)] + \gamma^3 [\varepsilon_1 (w_n^*)^4 + \varepsilon_2 z_n^4], \\ z_{n+1} &= z_n + \gamma(1 - |w_n^2| - z_n^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь w – комплексная переменная, а z – действительная, $a, \mu, \omega, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры. Авторы позиционируют ее как базовую модель для анализа квазипериодических бифуркаций. Однако это достаточно сложная математическая конструкция, которая представляется достаточно формальной моделью.

Для этой модели карта на плоскости $(\mu, \delta/2\pi)$ представлена на рис. 10. Использовано представление $\omega = \omega_0 + \gamma\delta$. Вслед за [31, 32] рассмотрен случай $\omega_0 = 2\pi/5$, что отвечает резонансу 1 : 5. Значения остальных параметров указаны в подписи к рисунку.

Можно видеть как определенные аналогии с представленными выше иллюстрациями, так и существенные отличия. Так, для представленных выше примеров картина режимов гораздо более сложная, чем для данной формальной модели. Причина, вероятно, состоит в том, что отображение (6) содержит явным образом параметр ω_0 и в данном случае описывает только соответствующий резонанс 1 : 5.

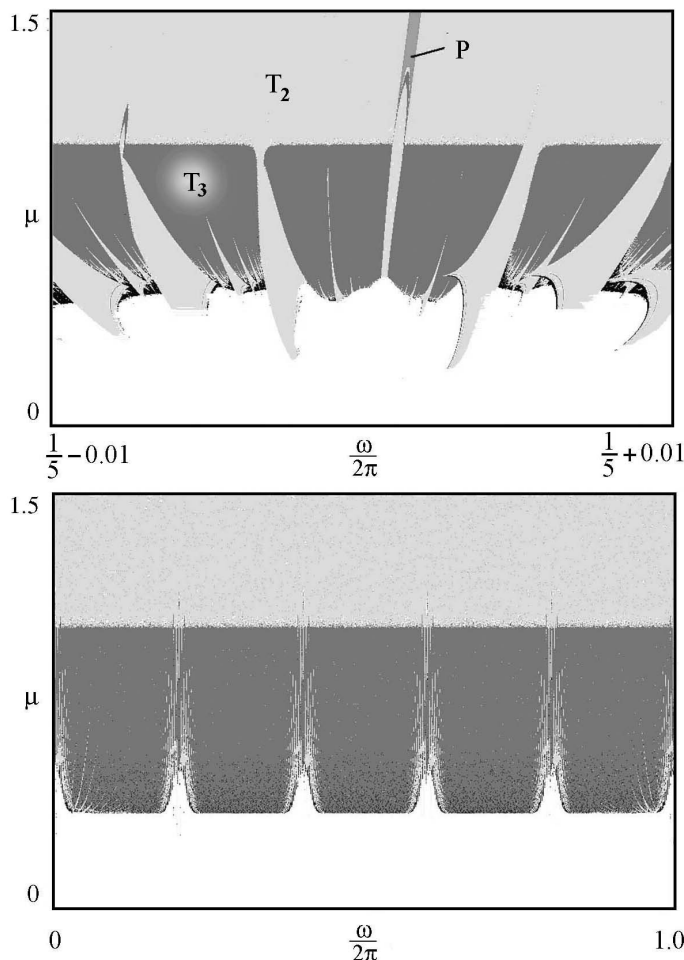


Рис. 10. Ляпуновская карта отображения Симо–Броера–Витоло в разных масштабах. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1/\sqrt{2}, \gamma = 0.1$

Fig.10. Lyapunov chart of Simo–Broer–Vitolo map in different scales. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1/\sqrt{2}, \gamma = 0.1$

Заключение

Трехмерные отображения могут описывать основные свойства систем с двух- и трехчастотной квазипериодичностью. Удобным примером могут служить отображения, полученные дискретизацией по схеме Эйлера из динамических уравнений, описывающих потоки (дифференциальные уравнения) с двухчастотной квазипериодичностью и бифуркацией Неймарка–Сакера. В этом плане наиболее удобным является автогенератор квазипериодических колебаний с возможным состоянием равновесия.

Одним из основных феноменов в таком отображении является квазипериодическая бифуркация Хопфа. Она приходит на смену бифуркации Неймарка–Сакера в системе-прототипе. Наблюдаемая картина существенным образом зависит от трех параметров и может быть исследована как эволюция ляпуновской карты на плоскости параметров при вариации шага дискретизации. При малых значениях этого параметра картина близка к традиционной системе языков Арнольда, которые, однако, теперь наблюдаются на базе двухчастотных режимов и погружены в трехчастотную область. Новым моментом является появление встроенных в эти языки областей периодических резонансов высокого порядка.

С ростом параметра дискретизации картина меняется. Языки с характерными остриями-основаниями сменяются полосами двухчастотных режимов со встроенными поперечными полосами периодических резонансов, от которых, в свою очередь, отходит новая система веерообразных языков двухчастотных режимов. Фазовые портреты внутри языков сменяются от многооборотных инвариантных кривых к системе изолированных овалов.

Могут быть предложены и другие варианты трехмерных отображений с квазипериодической бифуркацией Хопфа. Для дискретной системы Лоренц-84 могут быть подобраны значения параметров и сечения пространства параметров, приводящие к достаточно полной для квазипериодической бифуркации Хопфа картине. Отображение Симо–Броера–Витоло в предложенной авторами области параметров выявляет только часть существенной картины режимов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 15-02-02893.

Библиографический список

1. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002. 560 с.
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос. 2-е издание. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 320 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
5. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists. Chichester: Wiley, 1986. 376 p.
6. Постнов Д.Э. Введение в динамику итерированных отображений. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2007. 160 с.
7. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1998, 591 p.

8. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps. Doctoral Thesis. Utrecht University, 2006.
9. *Wiggins S.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 2003. 843 p.
10. *Elhadj Z., Sprott J.C.* A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, № 5. P. 1567.
11. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Поздняков М.В., Седова Ю.В.* Универсальное двумерное отображение и его радиофизическая реализация // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 3. С. 461.
12. *Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M.* The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol.3, № 4. P. 803.
13. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова–Такенса: от непрерывной к дискретной модели // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т.17, № 6. С. 139.
14. *Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D.V.* Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493.
15. *Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I.* Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11, №. 2. P. 191.
16. *Адилова А.Б., Кузнецов А.П., Савин А.В.* Динамика связанных дискретных осцилляторов Ресслера // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21, № 5. С. 108.
17. *Richter H.* The generalized Henon maps: Examples for higher-dimensional chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, № 6. P. 1371.
18. *Richter H.* On a family of maps with multiple chaotic attractors // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, № 3. P. 559.
19. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian // *Frontiers of Physics in China*. 2009. Vol. 4, № 1. P. 111.
20. *Broer H, Simó C., Vitolo R.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. Vol. 16, № 1-2. P. 154.
21. *Кузнецов А.П., Сатаев И.В., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 424 с.
22. *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2004. 288 с.
23. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.; Ижевск: ИКИ, 2005. 424 с.
24. *Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1987. Vol. 34, №. 3. P. 240.
25. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 76. P. 046216.
26. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма ЖТФ*. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.

27. *Анищенко В.С, Николаев С.М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2006. Т. 2, № 3. С. 267.
28. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. P. 1676.
29. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Автономные системы с квазипериодической динамикой: Примеры и свойства (обзор) // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2015. Т. 23, № 3. С. 71.
30. *Kuznetsov A.P., Sedova Yu.V.* The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 8. P. 1630019.
31. *Broer H, Simó C., Vitolo R.* Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance «bubble» // *Physica D*. 2008. Vol. 237, № 13. P. 1773.
32. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23. P. 1919.
33. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web. Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769.
34. *Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C.* Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
35. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, №. 4. P. 1205.

References

1. Guckenheimer J., Holmes P. J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Vol. 42. 3rd ed. New York: Springer, 1990.
2. Kuznetsov S.P. *Dynamic Chaos*. 2nd ed. Fizmatlit: Moscow, 2006. 356 p. (in Russian).
3. Anishchenko V.S. *Dynamical Chaos: Models and Experiments: Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems*. World Scientific: Singapore. 1995.
4. Schuster H.G., Just W. *Deterministic Chaos: An Introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
5. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists*. Chichester: Wiley, 1986. 376 p.
6. Postnov D.E. *Introduction to the Dynamics of Iterable Maps*. Saratov: Saratov University Press, 2007. 160 p. (in Russian).
7. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1998. 591 p.
8. Meijer H.G.E. *Codimension 2 Bifurcations of Iterated Maps*. Doctoral Thesis. Utrecht University, 2006.
9. Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 2003. 843 p.

10. Elhadj Z., Sprott J.C. A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, No. 5. P. 1567.
11. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Pozdnyakov M.V., Sedova Y.V. Universal two-dimensional map and its radiophysical realization. *Nelineinaya dinamika*. 2012. Vol. 8, №3. P. 461 (in Russian).
12. Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol.3, № 4. P. 803.
13. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Y.V. Bogdanov-Takens bifurcation: From flows to discrete systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2009. Vol. 17, № 6. P. 139 (in Russian).
14. Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simó C., Turaev D.V. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493.
15. Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation. *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11, №. 2. P. 191.
16. Adilova A.B., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Complex dynamics in the system of two coupled discrete Rössler oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics* 2013. Vol. 21, № 5. P. 108. (in Russian).
17. Richter H. The generalized Henon maps: Examples for higher-dimensional chaos. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, № 6. P. 1371.
18. Richter H. On a family of maps with multiple chaotic attractors. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, № 3. P. 559.
19. Elhadj Z., Sprott J.C. Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian. *Frontiers of Physics in China*. 2009. Vol. 4, № 1. P. 111.
20. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154.
21. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V. Tyuryukina L.V. Physics of Quasi-periodic Oscillations. Saratov: Publishing Center «Nauka», 2013. 252 p. (in Russian).
22. Zaslavsky G.M. The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. World Scientific, 2007.
23. Morozov A.D. Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-conservative Systems. Moscow; Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2005. 424 p. (in Russian).
24. Matsumoto T., Chua L., Tokunaga R. Chaos via torus breakdown. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1987. Vol. 34, №. 3. P. 240.
25. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 76. P. 046216.
26. Anishchenko V., Nikolaev S. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*. 2005. Vol. 31, № 10. P. 853.
27. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Stability, synchronization and destruction of quasi-periodic motions. *Nelineinaya dinamika*. 2006. Vol. 2, № 3. P. 267 (in Russian).
28. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V. A simple autonomous quasi-

- periodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. P. 1676.
29. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Autonomous systems with quasi-periodic dynamics. Examples and their properties: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 23, № 3. P. 71 (in Russian).
 30. Kuznetsov A.P., Sedova Yu.V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 8. P. 1630019.
 31. Broer H., Simó C., Vitolo R. Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance «bubble». *Physica D*. 2008. Vol. 237, № 13. P. 1773.
 32. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms. *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23. P. 1919.
 33. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web. Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769.
 34. Shil'nikov A., Nicolis G., Nicolis C. Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1701.
 35. Broer H., Simó C., Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, №. 4. P. 1205.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета. Имеет звание профессора. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 100 статей в российских и международных научных журналах. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний» «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач) и др.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 www.sgtnd.narod.ru
 E-mail: apkuz@rambler.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в Саратове (1979), окончила Саратовский государственный университет (2001). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2004) по специальности радиопизика. Работает в СФирЭ им. В.А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Опубликовала 40 научных статей по направлению нелинейная динамика.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 E-mail: sedovayv@rambler.ru