

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ: ОБЗОР

### Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы

А. С. Гонченко<sup>1</sup>, С. В. Гонченко<sup>1</sup>, А. О. Казаков<sup>2,1,3</sup>, А. Д. Козлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 03950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12

<sup>3</sup>Удмуртский государственный университет  
Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
E-mail: agonchenko@mail.ru, sergey.gonchenko@mail.ru,  
kazakovdz@yandex.ru, kozzloff@list.ru

В работе рассматриваются актуальные вопросы современной математической теории динамического хаоса и ее приложений. В настоящее время принято считать, что в конечномерных гладких динамических системах могут наблюдаться три принципиально различных формы хаоса. Это *диссипативный хаос*, математическим образом которого является странный аттрактор; *консервативный хаос*, для которого все фазовое пространство является большим «хаотическим морем» с беспорядочно расположенными внутри него эллиптическими островами; и *смешанная динамика*, характеризующаяся принципиальной неотделимостью в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативного поведения траекторий.

В настоящей работе (открывающей цикл из трех статей) представлены элементы теории псевдогиперболических аттракторов многомерных отображений. Такие аттракторы, также как и гиперболические, являются настоящими странными аттракторами, однако, допускают существование гомоклинических касаний. Мы приводим математическое определение псевдогиперболического аттрактора для случая многомерных отображений, из которого выводим необходимые условия для его существования в трехмерном случае, формулируемые с помощью показателей Ляпунова. Мы также даем описание феноменологических сценариев возникновения псевдогиперболических аттракторов различных типов в однопараметрических семействах трехмерных диффеоморфизмов, предлагаем новые методы исследования таких аттракторов (в частности, метод карт седел и модифицированный метод диаграмм Ляпунова), а в качестве примеров рассматриваем ориентируемые и неориентируемые трехмерные обобщенные отображения Эно.

Во второй части будет дан обзор теории спиральных аттракторов как важного и часто встречающегося в приложениях типа диссипативного хаоса. Третья часть будет посвящена смешанной динамике – нового типа хаоса, который характерен, в частности, для обратимых (реверсивных) систем, то есть систем инвариантных относительно некоторых

замен координат и обращения времени. Хорошо известно, что такие системы встречаются во многих задачах механики, электродинамики и других областей естествознания.

*Ключевые слова:* Странный аттрактор, псевдогиперболичность, гомоклиническое касание, дискретный аттрактор Лоренца, трехмерное обобщенное отображение Эно.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Образец цитирования:* Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.

## MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL CHAOS AND ITS APPLICATIONS: REVIEW

### Part 1. Pseudohyperbolic attractors

*A. S. Gonchenko<sup>1</sup>, S. V. Gonchenko<sup>1</sup>, A. O. Kazakov<sup>2,1,3</sup>, A. D. Kozlov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University  
23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics  
25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup> Udmurt State University, Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russia

E-mail: agonchenko@mail.ru, sergey.gonchenko@mail.ru,

kazakovdz@yandex.ru, kozzloff@list.ru

We consider important problems of modern theory of dynamical chaos and its applications. At present, it is customary to assume that in the finite-dimensional smooth dynamical systems three fundamentally different forms of chaos can be observed. This is the dissipative chaos, whose mathematical image is a strange attractor; the conservative chaos, for which the whole phase space is a large «chaotic sea» with elliptical islands randomly disposed within it; and the mixed dynamics which is characterized by the principle inseparability, in the phase space, of attractors, repellers and orbits with conservative behavior.

In the first part of this series of our works, we present some elements of the theory of pseudohyperbolic attractors of multidimensional maps. Such attractors, the same as hyperbolic ones, are genuine strange attractors, however, they allow homoclinic tangencies. We also give a description of phenological scenarios of the appearance of pseudohyperbolic attractors of various types for one parameter families of three-dimensional diffeomorphisms, and, moreover, consider some examples of such attractors in three-dimensional orientable and nonorientable Hénon maps.

In the second part, we will give a review of the theory of spiral attractors. Such type of strange attractors are very important and are often observed type in dynamical systems. The third part will be dedicated to mixed dynamics – a new type of chaos which is typical, in particular, for (time) reversible systems i.e. systems which are invariant with respect to some changes of coordinates and time reversing. It is well known that such systems occur in many problems of mechanics, electrodynamics, and other areas of natural sciences.

*Keywords:* Strange attractor, pseudohyperbolicity, homoclinic tangency, discrete Lorenz attractor, three-dimensional generalized Hénon map.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Paper reference:* Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 4–36.

## Введение

В настоящее время можно выделить три сравнительно независимых и различных формы динамического хаоса гладких конечномерных систем – это «диссипативный хаос», «консервативный хаос» и «смешанная динамика». Первый из них характеризуется существованием у (диссипативной) системы *странного аттрактора* – нетривиального притягивающего замкнутого инвариантного множества, лежащего в фазовом пространстве системы внутри поглощающей области, в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области. В отличие от диссипативного, консервативный хаос как бы «размазан» по всему фазовому пространству – в этом случае все точки являются неблуждающими (по теореме Пуанкаре о возвращаемости). Если говорить в терминах аттракторов ( $\mathcal{A}$ ) и репеллеров – аттракторов при обращении времени ( $\mathcal{R}$ ), которые, по известной теореме Конли [1], существуют у любой системы с компактным фазовым пространством, то  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$  в случае диссипативного хаоса, и  $\mathcal{A} = \mathcal{R}$  в случае консервативного хаоса. Для сравнения, «смешанная динамика» – это тот новый тип хаоса, который характеризуется тем, что устойчивые элементы динамики (например, устойчивые периодические траектории) сосуществуют с вполне неустойчивыми, и они неотделимы друг от друга.

Само явление смешанной динамики было открыто в работе Гонченко–Шильникова–Тураева [2]. В этой работе, в частности, было доказано, что в случае двумерных диффеоморфизмов существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы со счетным множеством устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических траекторий; при этом замыкания множеств траекторий разных типов имеют непустое пересечение. Естественно, что при любом определении аттрактора, это должно быть, во всяком случае, замкнутое инвариантное множество, которое устойчиво и которое должно содержать устойчивые периодические траектории, если они есть. То же самое (относительно вполне неустойчивых периодических траекторий) должно выполняться и для репеллеров. Таким образом, в [2] было показано, что аттрактор может пересекаться с репеллером, что формально согласуется с теоремой Конли [1]. Математическое обоснование этого явления дано, например, в работах [3,4]. Тогда для «смешанной динамики» формально выполняются условия  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ , которые являются дополнительными к условиям для «консервативного хаоса» ( $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ ) и «диссипативного хаоса» ( $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ ).

Что касается странных аттракторов, которым посвящена настоящая статья, то их общепринятого определения, которое годилось бы на все случаи жизни, до сих пор не существует. Исключения составляют так называемые *настоящие странные аттракторы*, определение которых включают два основных момента: 1) существование поглощающей области в фазовом пространстве (в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области) и 2) неустойчивость траекторий на аттракторе, которая постулируется тем, что у каждой траектории на аттракторе существует положительный максимальный ляпуновский показатель. Предполагается также, что свойства «1» и «2» выполняются для всех близких систем. С другой стороны, к странным аттракторам, с должным на то основанием (см. дискуссию в [5–7]) относят также так называемые *квазиаттракторы* – нетривиальные притягивающие инвариантные множества, которые либо сами содержат устойчивые периодические

траектории весьма больших периодов (и с очень узкими областями притяжения), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых гладких возмущениях. Последнее обстоятельство связано с тем, что квазиаттракторы допускают существование седловых периодических траекторий, у которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально. В свою очередь, бифуркации таких гомоклинических касаний при выполнении определенных условий-критериев [8–12] приводят к рождению асимптотически устойчивых периодических траекторий, притягивающих инвариантных торов, маленьких странных аттракторов типа аттракторов Эно [13–17] и даже аттракторов лоренцевского типа [18–22] и т.п.

Заметим также, что в диссипативных системах со специальными структурами могут встречаться странные аттракторы других типов, формально не вписывающиеся в эту схему. Например, негладкие или разрывные системы могут обладать аттракторами с сингулярно гиперболическим поведением траекторий, в том смысле, что у некоторых траекторий не определены их ляпуновские показатели (в силу негладкости самой системы), хотя здесь существует и поглощающая область, и нужное разбегание траекторий на аттракторе. Примерами таких аттракторов являются аттрактор Лози [23] и аттрактор Белых [24]. Совершенно другой тип сложного непериодического поведения траекторий демонстрируют так называемые странные нехаотические аттракторы, которые возникают в специальных моделях, имеющих структуру прямого произведения неспецифической динамической системы и квазипериодической системы. Они характеризуются тем, что у любой траектории один из ляпуновских показателей равен нулю, а остальные – меньше нуля; допускается также существование небольшого числа (меры нуль) траекторий с положительным показателем. Более подробно о таких аттракторах см., например, в [25].

Можно сказать, что большинство известных странных аттракторов гладких динамических систем, в том числе встречающихся в приложениях, являются, по существу, квазиаттракторами. Примерами таких аттракторов являются: многочисленные аттракторы типа «тор-хаос», возникающие в результате разрушения двумерного тора, [26]; аттракторы в цепях Чуа [27]; аттрактор Эно [28, 29]; аттракторы в периодически возмущенных двумерных системах с гомоклиническими восьмерками седла [30] и многие другие. Особый класс квазиаттракторов составляют так называемые спиральные аттракторы, которые содержат седло-фокусы. Они часто возникают в приложениях, и примеры таких аттракторов хорошо известны. Это, например, спиральные аттракторы трехмерных потоков, такие как аттрактор Рёсслера [31, 32], аттракторы в моделях Арнеодо–Калле–Трессе [33–35] и т.п. Отметим, что в работе Л.П.Шильникова [36] был предложен достаточно простой и универсальный феноменологический сценарий возникновения спиральных аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных потоков, причем таких аттракторов, которые содержат седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием. С некоторыми модификациями этот сценарий легко переносится и на случай трехмерных отображений [37]. Поэтому для таких спиральных аттракторов нами в [38] был предложен обобщающий термин «аттрактор Шильникова» для потоков (к ним относятся, в частности, указанные выше аттракторы Рёсслера и АСТ-аттракторы), или «дискретный аттрактор Шильникова» для отображений. Различные примеры последних были найдены в трехмерных отображениях Эно [37–41], здесь нами были получены достаточно ин-

тересные результаты, которые мы предполагаем представить во второй части нашего цикла работ.

До сравнительно недавнего времени к настоящим странным аттракторам гладких динамических систем можно было с уверенностью относить только лишь гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Однако ситуация изменилась после работы Тураева и Шильникова [42], в которой был введен новый класс настоящих странных аттракторов, так называемых *диких гиперболических аттракторов*. Эти аттракторы, в отличие от гиперболических, допускают существование гомоклинических касаний, но не содержат устойчивых периодических траекторий и любых других собственных устойчивых инвариантных подмножеств, которые не возникают также при малых гладких возмущениях. Системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, то есть открытым ( $C^2$ -топологии) областям из пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями.<sup>1</sup> Однако эти касания, в отличие от гомоклинических касаний у систем с квазиаттракторами, являются такими, что их бифуркации не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [10–12] (см. также ниже раздел 1).

В работе [42] был также построен пример четырехмерного потока с диким спиральным аттрактором, содержащим состояние равновесия типа седло-фокус. Одной из главных особенностей спирального аттрактора Тураева–Шильникова является то, что он обладает *псевдогиперболической структурой*. В двух словах, эта его особенность проявляется в том, что в окрестности аттрактора, в некоторой его поглощающей области  $D$ , имеет место слабый вариант гиперболичности: существует разбиение окрестности на инвариантные относительно дифференциала и трансверсальные подпространства такие, что на одном из них имеет место экспоненциальное сжатие вдоль всех направлений, а на другом – экспоненциальное растяжение объема. Требуется также, что такое разбиение непрерывно зависит от точки на  $D$ ; соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения, а также углы между касательными векторами подпространств равномерно ограничены; в растягивающем объеме подпространстве если и есть какие-то сжатия, то все они равномерно слабее, чем любое сжатие в сильно сжимающем пространстве.

Заметим, что условия псевдогиперболичности проверяются для точек поглощающей области  $D$ . Если они выполняются, то тогда, как показано в [42]: аттрактор существует и он единственный; у каждой его траектории существует положительный максимальный ляпуновский показатель (это вытекает из свойства растяжения объемов), а сам аттрактор является аттрактором по Рюэллю [44], то есть замкнутым, инвариантным, асимптотически устойчивым и цепно транзитивным множеством (см. подробнее ниже в разделе 2).

Фактически, в работе [42] были заложены основы очень перспективной теории псевдогиперболических странных аттракторов. Новые примеры таких аттракторов были также вскоре найдены. Так, в работе [45] было показано, что у трехмерных

---

<sup>1</sup>Сам термин «дикий» восходит к статье Ньюхауса [43], в которой было введено понятие «дикого гиперболического множества», то есть такого равномерно гиперболического инвариантного множества, у которого среди его устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий всегда есть пересекающиеся нетрансверсально, и это свойство сохраняется при всех малых  $C^2$ -гладких возмущениях.

отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (1)$$

где  $M_1, M_2, B$  – параметры ( $B$  – якобиан отображения), в некоторой области параметров, примыкающих к точке  $A^* = (M_1 = 1/4, M_2 = 1, B = 1)$ , существуют дискретные аттракторы Лоренца.<sup>2</sup> На рис. 1 показаны примеры дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1). Заметим, что их фазовые портреты очень похожи на потоковые аттракторы Лоренца. Однако значения параметров, при которых эти аттракторы наблюдаются, совсем не близки к  $A^*$ : здесь  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$  (рис. 1, а) и  $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$  (рис. 1, б). Поэтому условия псевдогиперболичности таких аттракторов нужно проверять дополнительно.

Для авторов настоящей статьи такая задача представляется очень сложной. Фактически, мы можем только лишь проверить некоторые необходимые условия. Например, для псевдогиперболического аттрактора трехмерного отображения его ляпуновские показатели  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  должны удовлетворять условиям

$$\Lambda_1 > 0, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \quad (2)$$

Первое и третье условия говорят о том, что наблюдаемый аттрактор является странным, а второе – то, что на нем имеет место растяжение двумерных площадей.

Однако ляпуновские показатели являются усредненными характеристиками траекторий на аттракторе, поэтому, в принципе, не исключена ситуация, когда

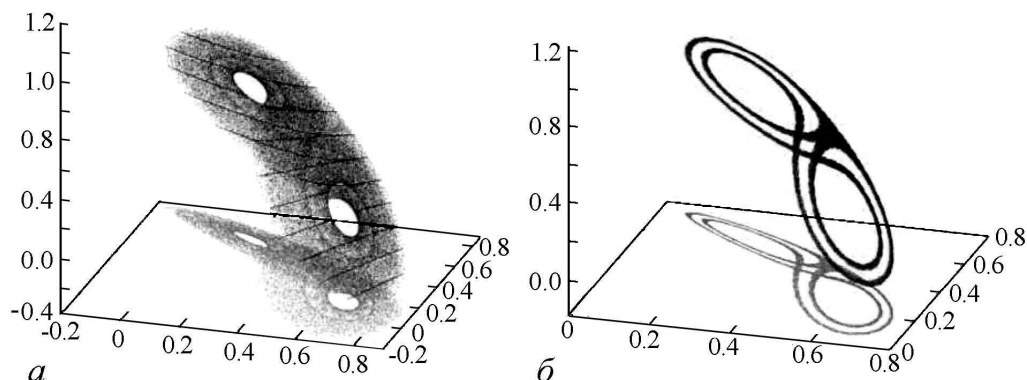


Рис. 1. Портреты дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1) при  $M_1 = 0, B = 0.7$  и различных значениях  $M_2$ : а – 0.85, б – 0.825. В обоих случаях показано порядка  $10^5$  итераций одной начальной точки на аттракторе. Показаны также проекции аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и некоторые срезы аттрактора плоскостью  $z = \text{const}$  (хотя эти срезы выглядят как линии, на самом деле они имеют сложную канторову структуру). Рисунок из работы [45]

<sup>2</sup>Псевдогиперболичность таких аттракторов проверялась в [45] аналитически на основе того, что при близких к  $A^*$  значениях параметров квадрат отображения в некоторой окрестности седловой неподвижной точки может быть представлен как отображение Пуанкаре периодически возмущенной системы Шимицу–Мориока, которая имеет аттрактор Лоренца [46, 47]. Если возмущение достаточно мало (что определяется близостью параметров к  $A^*$ ), то искомая псевдогиперболичность должна естественно наследоваться от аттрактора Лоренца (который сам является таковым [48, 49]). В частности, в работе [50] было показано, что свойство псевдогиперболичности потоков сохраняется также и для их отображений Пуанкаре при малых периодических возмущениях.

аттрактор имеет очень маленькие «дырки» (размеры которых могут быть меньше всякой разумной точности счета), где условия (2) для соответствующих траекторий нарушаются. По нашей просьбе, условия псевдогиперболичности аттракторов (см. рис. 1) были проверены с помощью методов интервальной арифметики математиками из университета Уппсалы (Швеция) Ж. Фигуеросом и В. Такером, которые получили весьма интересные и очень тонкие результаты. Так, в случае аттрактора (см. рис. 1, а) внутри него была найдена устойчивая периодическая траектория с областью притяжения размером порядка  $10^{-40}$ , тогда как дискретный аттрактор Лоренца (см. рис. 1, б) оказался настоящим псевдогиперболическим аттрактором. Также независимо и другими методами аналогичные результаты были получены саратовскими математиками С.П. Кузнецовым и П.В. Купцовым. При этом были проверены на псевдогиперболичность также и некоторые другие аттракторы из нашей работы [40]. Надеемся, что эти интересные результаты будут опубликованы в ближайшее время.

С другой стороны, сам факт существования гомоклинических касаний в аттракторе уже может подсказать, является ли рассматриваемый аттрактор настоящим (псевдогиперболическим) аттрактором или квазиаттрактором. Так, например, аттракторы (см. рис. 1) содержат седловую неподвижную точку с мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0, |\lambda_2| > |\lambda_3|$  и  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = B = 0.7 < 1$ , а кроме того, седловая величина  $\sigma = |\lambda_1\lambda_2|$  больше 1. Тогда неизбежно возникающие здесь гомоклинические касания в общем случае будут такими, как на рис. 3, и бифуркации таких касаний<sup>3</sup> не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [10–12].

*Замечание 1.* С другой стороны, устойчивые периодические траектории обязательно рождаются, если  $\sigma < 1$ , или если неподвижная (периодическая) точка на аттракторе является седло-фокусом (неважно, с одномерным или двумерным неустойчивым многообразием). В частности, спиральные аттракторы трехмерных гладких отображений или потоков всегда являются квазиаттракторами. В этой связи, кажется весьма интересной и такая проблема: *пусть трехмерный диффеоморфизм в  $R^3$  имеет странный аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку с двумерным неустойчивым инвариантным многообразием, тогда этот аттрактор является квазиаттрактором.*<sup>4</sup>

По этой причине в настоящей работе мы рассматриваем только такие странные аттракторы трехмерных отображений, которые содержат неподвижные точки типа

<sup>3</sup>В общем случае такие (квадратичные) гомоклинические касания называются «простыми» [12], и в случае  $\sigma > 1$  они не разрушают псевдогиперболичность, если сама неподвижная точка является псевдогиперболической, хотя и влекут «дикую гиперболичность» (более подробно об этом см. в [10, 12, 51]).

<sup>4</sup>Эта проблема кажется весьма трудной, и ее решение связано, например, с доказательством существования так называемых непростых гомоклинических касаний [21, 52, 53], примеры которых показаны на рис. 4, только здесь направление стрелок нужно поменять на противоположное, чтобы неустойчивое многообразие точки  $O$  стало двумерным. Заметим, что бифуркации таких касаний приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [52]. В свою очередь, появление непростых касаний в рассматриваемом случае следует ожидать из-за того, что само двумерное неустойчивое многообразие, чтобы оно принадлежало аттрактору, должно бесконечно много раз «складываться» в разных направлениях (это похоже на то, как если бы мы пытались «упаковать» двумерную плоскость в трехмерный куб, избегая при этом появления острых углов).

седло с одномерными неустойчивыми многообразиями и с седловой величиной  $\sigma$  большей 1. Более того, основное внимание мы уделяем так называемым гомоклиническим аттракторам, которые содержат *ровно одну* неподвижную точку. Как показано в работах [37, 38, 40, 41, 45], это направление является весьма перспективным.

*Содержание работы.* В разделе 1 рассматриваются основные свойства псевдогиперболических отображений (диффеоморфизмов) и обсуждаются типы гомоклинических касаний, которые поддерживают или разрушают псевдогиперболичность. В разделе 2 обсуждаются феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных диффеоморфизмов, как ориентируемых так и неориентируемых. В разделе 3 приводятся примеры таких аттракторов в случае трехмерных обобщенных отображений Эно. В Приложении дается определение псевдогиперболического диффеоморфизма.

## 1. Псевдогиперболичность и гомоклинические касания

В этом разделе рассмотрим основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов. В случае потоков определение псевдогиперболичности было дано в работе Тураева и Шильникова [42] (см. также [50, 54]), а в случае отображений определение дано в [55] (см. также Приложение к настоящей статье). Если говорить коротко, то псевдогиперболичность диффеоморфизма  $f$  на некоторой области  $\mathcal{D}$  означает, что в каждой точке этой области существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала  $Df$  отображения, такие, что  $Df$  является экспоненциально сильно сжимающим на  $N_1$  и растягивающим (экспоненциально) объемы на  $N_2$  (здесь слово «сильно» означает, что любое возможное сжатие в  $N_2$  равномерно слабее любого сжатия в  $N_1$ ). Таким образом, в отличие от гиперболичности, здесь не требуется, чтобы растяжение в  $N_2$  существовало по всем направлениям. Тем не менее, псевдогиперболичность также, как и гиперболичность, сохраняется при малых гладких возмущениях [42]. Поэтому если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, так как растяжение объемов в  $N_2$  гарантирует существование положительного максимального ляпуновского показателя у любой траектории. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Однако в отличие от гиперболических аттракторов и аттракторов Лоренца, у псевдогиперболических аттракторов могут существовать *гомоклинические касания*. Более того, если заранее не известно, что странный аттрактор является гиперболическим, то у него помимо грубых гомоклинических траекторий (в точках которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седловых периодических траекторий пересекаются трансверсально) должны существовать и негрубые. Само по себе возникновение определенного гомоклинического касания не является чем-то исключительным – это бифуркационный момент коразмерности один в общем случае (когда касание квадратичное). Однако, как показал еще Ньюхаус [43], эта бифуркация влечет чрезвычайно сложную структуру бифуркационного множества. В частности, здесь возникает бесконечно много вторичных гомоклинических касаний. Эти касания могут быть вырожденными [56], что, в свою очередь, означает воз-



возможность появления сколь угодно вырожденных периодических траекторий и т.п. Все это приводит к тому, что бифуркации гомоклинических касаний нельзя изучить полностью, например, с помощью конечно-параметрических семейств – традиционного аппарата классической теории бифуркаций. Здесь по необходимости возникают задачи другого рода, связанные с исследованием основных бифуркаций и основных характеристических свойств таких систем. При этом, что является весьма важным и интересным, вопрос о том, какие бифуркации и какие характеристические свойства являются основными, должен решать сам исследователь.

В теории странных аттракторов гладких динамических систем один из наиболее важных вопросов связан с определением того, является ли данный аттрактор квазиаттрактором или настоящим аттрактором (в частности, псевдогиперболическим). Иногда этот вопрос решается просто и параллельно с основными компьютерными вычислениями. В случае странных аттракторов двумерных диффеоморфизмов (если таковые не являются гиперболическими) бифуркации неизбежных в них гомоклинических касаний приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий весьма больших периодов [8], и соответственно любой такой аттрактор следует считать квазиаттрактором.<sup>5</sup>

В случае странных аттракторов трехмерных диффеоморфизмов, которые являются основным объектом настоящей статьи, вопрос об определении их типов (квазиаттрактор или настоящий аттрактор) является более сложным. Однако и здесь гомоклинические касания, обнаруживаемые в аттракторах, являются своеобразными индикаторами. Так, если аттрактор допускает гомоклинические касания к неподвижной или периодической точке такие, как на рис. 2, то он определенно является квазиаттрактором. В первом случае (рис. 2, а) неподвижная точка является седлом с седловой величиной  $\sigma$  меньше единицы, а во втором случае (рис. 2, б) – седло-фокусом. Здесь требуется только, чтобы якобиан  $J$  неподвижной точки был меньше единицы, и в случае седла его неустойчивое многообразие одномерно (в случае седло-фокуса оно может быть как одномерным, так и двумерным).

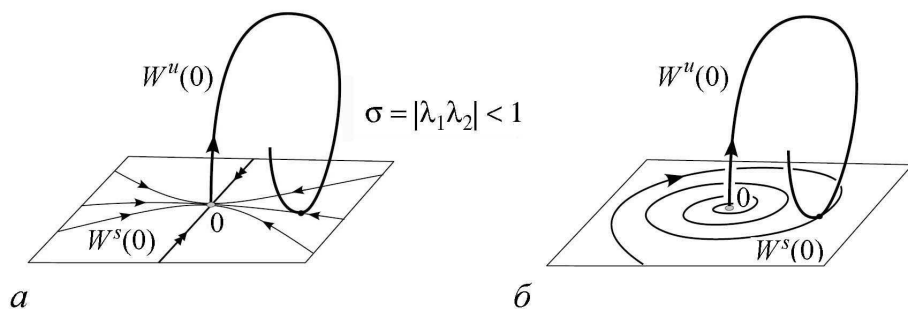


Рис. 2. Гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий

<sup>5</sup>Это справедливо, например, и для аттракторов Эно, у которых устойчивые периодические траектории могут отсутствовать для значений параметров, образующих нигде не плотное множество положительной меры, согласно теории Бенедикса–Карлесона [29]. Однако они сразу возникают при сколь угодно малых возмущениях.

С другой стороны, весьма важно, что существуют гомоклинические касания, которые не разрушают псевдогиперболичность. В случае трехмерных диффеоморфизмов таковыми являются *простые гомоклинические касания*, [10,51], при условии, что  $\sigma > 1$ . Пусть, например, диффеоморфизм  $f$  имеет седловую неподвижную (периодическую) точку  $O$  с действительными мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$  при условии, что  $\sigma = |\lambda_1||\lambda_2| > 1$ . У таких касаний сама точка является псевдогиперболической: у неё  $N_1(O)$  – это прямая, проходящая через  $O$  в направлении собственного вектора матрицы линеаризации  $A$ , отвечающего её сильно устойчивому собственному значению (мультипликатору)  $\lambda_3$ , а  $N_2(O)$  – это плоскость, натянутая на собственные вектора матрицы  $A$ , отвечающие мультипликаторам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Очевидно, у любой точки  $p$  из малой окрестности  $U(O)$  седла  $O$  будут такие же инвариантные разложения на пространства  $N_1(p)$  и  $N_2(p)$ . Аналогичные инвариантные разложения вблизи всей гомоклинической траектории также удастся получить, если гомоклиническое касание простое.

Последнее означает следующее. Возьмем две произвольные гомоклинические точки  $p$  и  $q$  в  $U(O)$  такие, что  $p \in W_{loc}^u(O)$  и  $q \in W_{loc}^s(O)$ , по которым<sup>6</sup> определим так называемое глобальное отображение  $T_1$ , строящееся по траекториям рассматриваемого диффеоморфизма и действующее из малой окрестности  $V(p)$  точки  $p$  в малую окрестность точки  $q$  так, что  $T_1(p) = q$  (заметим, что если  $f^s(p) = q$  для некоторого натурального  $s$ , то  $T_1 = f^s|_{V(p)}$ ). Тогда требуется, чтобы плоскость  $DT_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $N_1(q)$  и с  $W_{loc}^s(O)$ . Заметим, что при этом кривая  $T_1(W_{loc}^u(O))$  касается двумерной плоскости  $W_{loc}^s(O)$  вдоль вектора  $l_{tan}$ , который, в свою очередь, образует ненулевой угол с прямой  $N_1(q)$ , (рис. 3).

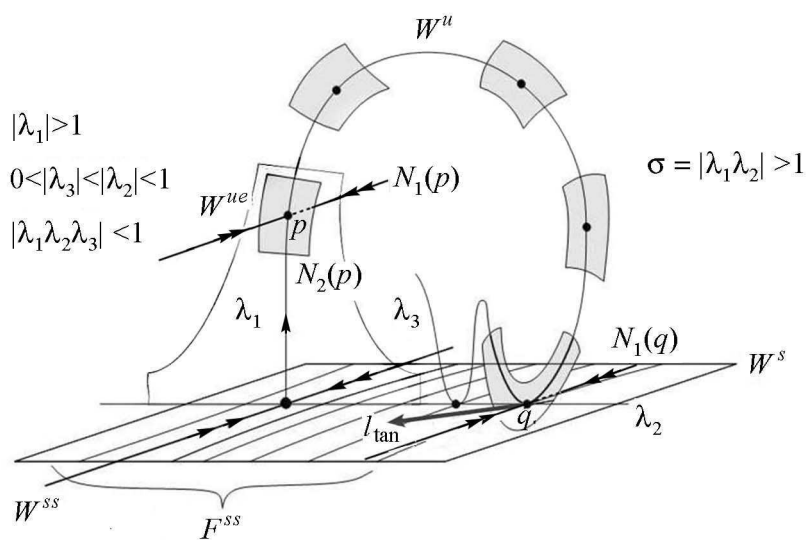


Рис. 3. К определению простого гомоклинического касания

<sup>6</sup>Заметим, что локальные инвариантные многообразия  $W_{loc}^u(O)$  и  $W_{loc}^s(O)$  всегда можно распрямить, введя в  $U(O)$  такие  $C^r$ -гладкие координаты  $(x, y, z)$ , в которых  $W_{loc}^u(O) = \{x = 0, y = 0\}$  и  $W_{loc}^s(O) = \{z = 0\}$ , [12].

Если аттрактор трехмерного гладкого отображения является псевдогиперболическим, то он может содержать только простые гомоклинические касания.<sup>7</sup> При любых малых гладких возмущениях псевдогиперболичность сохраняется, но если эти возмущения не слишком малы, она может разрушиться. При этом само разрушение может быть вызвано появлением таких гомоклинических касаний как на рис. 2 (например, сама неподвижная точка, первоначально с  $\sigma > 1$ , в процессе эволюции может стать точкой с  $\sigma < 1$ , или, вообще, седло-фокусом). Более тонкий механизм разрушения псевдогиперболичности связан с возникновением так называемых непростых гомоклинических касаний, примеры которых показаны на рис. 4. При этом, как было установлено в [52, 53, 58], при бифуркациях таких гомоклинических касаний уже могут рождаться устойчивые периодические траектории, замкнутые инвариантные кривые и даже нетривиальные притягивающие инвариантные множества, например, маленькие аттракторы лоренцевского типа [58].

Отсюда можно сделать важный вывод для теории странных аттракторов трехмерных гладких отображений: если такой аттрактор является настоящим, то он должен быть либо гиперболическим, либо псевдогиперболическим. Что касается гиперболических аттракторов, то их математическая теория достаточно хорошо развита (см., например, [59]). Более того, после замечательных работ С.П. Кузнецова [60–63] стало известно, что такие аттракторы встречаются также и в приложениях. Заметим, что для доказательства того, что странный аттрактор в некоторой модели является гиперболическим, разработаны достаточно тонкие качественные и компьютерные методы. Как мы знаем, аналогичные методы сейчас создаются и для детектирования псевдогиперболических аттракторов в научных школах из Нижнего Новгорода, Саратова и Уппсалы (Швеция). В частности, в наших недавних работах были предложены новые качественные методы исследования таких аттракторов, включая построение феноменологических сценариев их возникновения в однопараметрических семействах [37, 38, 40, 41], поисковые методы, основанные на эффективном использо-

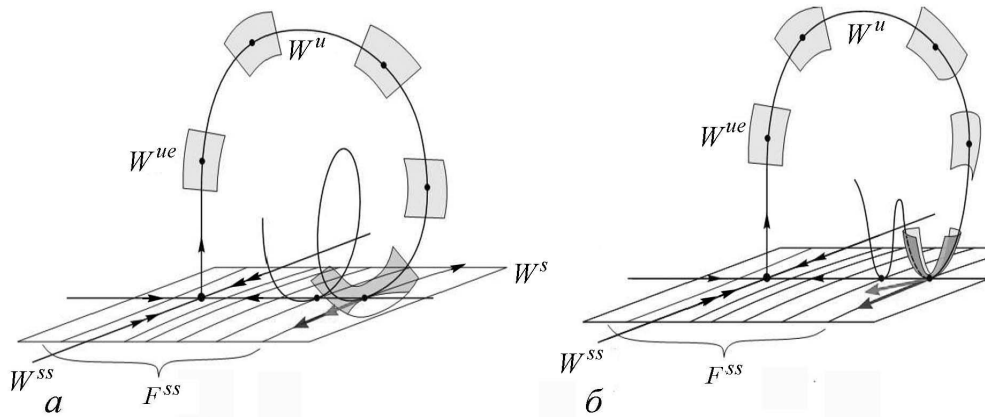


Рис. 4. Два типа непростых гомоклинических касаний: *а* – поверхность  $T_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $W_{loc}^s(O)$ , но вектор  $\ell_{tan}$  лежит в  $N_1(q)$ ; *б* – поверхность  $T_1(N_2(p))$  касается  $W_{loc}^s(O)$

<sup>7</sup>При этом кроме квадратичных касаний, здесь могут существовать гомоклинические касания произвольно больших порядков [56], однако все они тоже являются простыми в том смысле, что в любой гомоклинической точке  $p$  подпространства  $N_2(p)$  и  $N_1(p)$  пересекаются трансверсально (см. подробнее в [57]).

вании так называемых «карт седел» [40] и ляпуновских диаграмм и т.п. В следующих разделах мы дадим некоторый обзор этих методов и приведем примеры некоторых полученных с помощью этих методов аттракторов, которые при первом рассмотрении кажутся настоящими (псевдогиперболическими) аттракторами.

## 2. О феноменологических сценариях возникновения странных аттракторов трехмерных отображений

В этом разделе мы рассмотрим вопросы качественного изучения странных аттракторов трехмерных отображений. При этом основное внимание будем уделять тем аттракторам, которые могут быть псевдогиперболическими. Здесь имеется в виду то, что для рассматриваемых аттракторов мы проверяем только необходимое условие (2) (см. также *Замечание 1*). Кроме того, ограничимся исследованием так называемых *гомоклинических аттракторов*, то есть содержащих только одну неподвижную точку  $O$  и её неустойчивое многообразие.

При этом под аттрактором отображения  $f$ , следуя Рюэллю [44], будем понимать *замкнутое, инвариантное, устойчивое и цепно-транзитивное множество*  $A$ . В качестве устойчивости здесь будем рассматривать обычную асимптотическую устойчивость, означающую, что аттрактор лежит внутри некоторой поглощающей области  $D$ , все точки которой при положительных итерациях отображения  $f$  стремятся к  $A$ . Напомним, что цепная транзитивность (см., например, [42]) означает, что любые две точки на аттракторе могут быть соединены  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ . Это значит, что для любых точек  $a, b \in A$  и любого  $\varepsilon > 0$  в  $A$  существуют точки  $a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b$  (здесь  $N = N(\varepsilon)$ ) такие, что  $x_i \in A$  и  $\text{dist}(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon, i = 0, \dots, N - 1$ . Последовательность точек  $\{x_i\}$  называется  $\varepsilon$ -траекторией точки  $x_0$  длины  $N + 1$ , а точка  $b$  называется  $\varepsilon$ -достижимой от точки  $a$ . Тогда гомоклинический аттрактор с точкой  $O$  – это замкнутое, инвариантное множество, состоящее из точек,  $\varepsilon$ -достижимых от точки  $O$ , или, как говорят,  $A$  является пролонгацией точки  $O$ .

В этом случае геометрически аттрактор  $A$ , как множество в  $R^3$ , можно рассматривать как замыкание (пролонгацию) неустойчивого многообразия его неподвижной точки  $O$ . Из этого в общем-то очевидного наблюдения, можно сделать вывод, что геометрические, а также динамические свойства гомоклинического аттрактора во многом определяются его гомоклинической структурой, то есть характером пересечений устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий самой точки  $O$ . В связи с этим, в работе [37] нами были предложены достаточно простые феноменологические сценарии возникновения некоторых типов гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах отображений, начинающихся с простого аттрактора – устойчивой неподвижной точки. Два таких сценария схематически представлены на рис. 5.

Отметим в этих сценариях две главные, с нашей точки зрения, особенности. Первая – это то, что устойчивая неподвижная точка  $O$  теряет устойчивость при изменении параметра в результате бифуркации удвоения периода. Сразу после этой бифуркации точка  $O$  становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается устойчивый цикл  $(p_1, p_2)$  периода 2 (то есть  $f(p_1) = p_2$

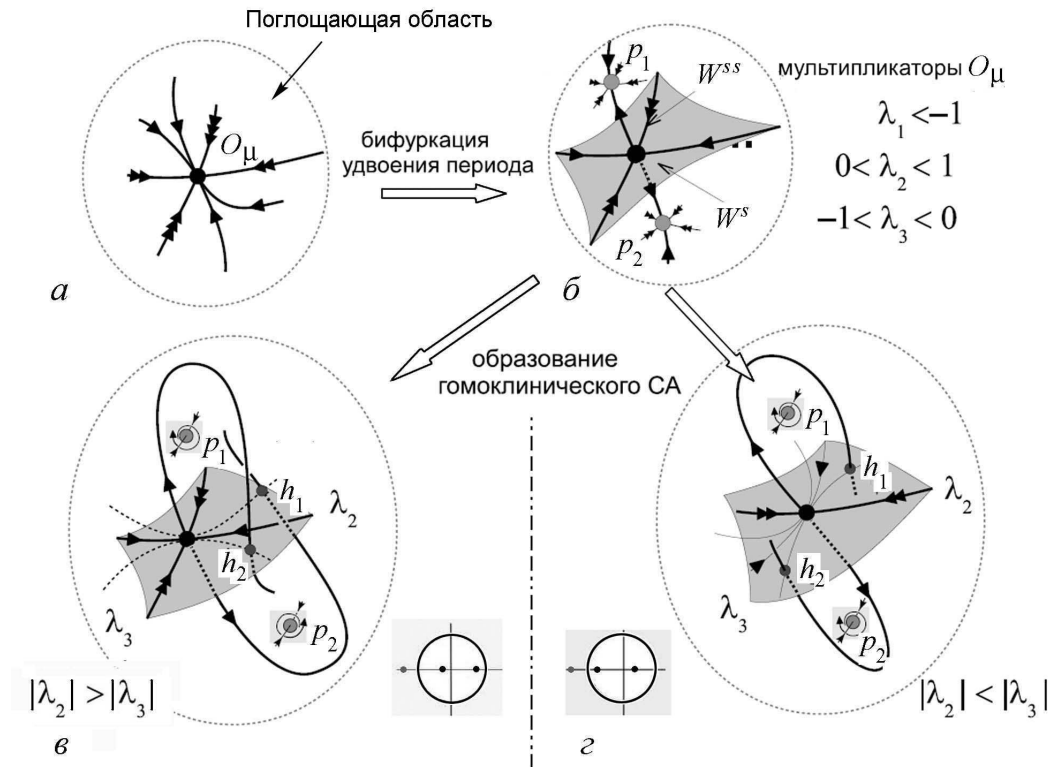


Рис. 5. Два феноменологических сценария возникновения гомоклинических аттракторов либо лоренцевского типа, путь (a) → (b) → (c); либо восьмерочного типа, путь (a) → (b) → (d)

и  $f(p_2) = p_1$ ), который становится аттрактором. При этом точка  $O$  должна иметь собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такие, что  $\lambda_1 < -1$ ,  $|\lambda_{2,3}| < 1$  и  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ . Пусть при дальнейшем изменении параметра точка  $O$  больше не претерпевает бифуркаций, а цикл  $(p_1, p_2)$  теряет свою устойчивость. Каким образом это происходит, пока не имеет значения, но вот что важно – и это является второй главной особенностью указанных сценариев – происходит глобальная бифуркация, связанная с образованием гомоклинических пересечений одномерного неустойчивого  $W^u$  и двумерного устойчивого  $W^s$  инвариантных многообразий точки  $O$ . При этом конфигурация этих многообразий будет похожа на то, что мы видим на рис. 5, *в* и *г*.

Чтобы объяснить, как образуются две такие разные конфигурации, предположим для определенности, что  $\lambda_2 > 0$  и  $\lambda_3 < 0$  (здесь также  $\lambda_1 < -1$ ). Тогда  $W^u$  разбивается точкой  $O$  на две связные компоненты-сепаратрисы  $W^{u+}$  и  $W^{u-}$ , инвариантные относительно  $f^2$  такие, что  $f(W^{u+}) = W^{u-}$  и  $f(W^{u-}) = W^{u+}$ . Пусть предположим,  $W^{u+}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_1$ , тогда автоматически  $W^{u-}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_2 = f(h_1)$ . Отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  устроено очень просто: оно имеет здесь устойчивую неподвижную точку  $O$  типа неориентируемый узел, так как  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ .

В случае, когда  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$  (см. рис. 5 *в*), на  $W_{loc}^s(O)$  существует сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}$  – инвариантная относительно  $f$  кривая, касающаяся в точке  $O$  собственного направления, отвечающего отрицательному мультипликатору  $\lambda_3$ . Кривая  $W^{ss}$  разбивает плоскость  $W_{loc}^s(O)$  на две компоненты  $W_1^s$  и  $W_2^s$ . Так как

$\lambda_2 > 0$  (и  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ ), то каждая из компонент инвариантна относительно  $f$ , то есть точки из  $W_1^s$  не могут попасть в  $W_2^s$  при итерациях  $f$  и наоборот. На  $W_{loc}^s$  существуют также непрерывное семейство гладких инвариантных кривых, которые все входят в точку  $O$ , касаясь ведущего собственного направления, отвечающего положительному мультипликатору  $\lambda_2$ . Пусть точка  $h_1$  принадлежит какой-то из этих кривых, скажем  $l_1$ . Тогда кривая  $l_2 = f(l_1)$  будет также инвариантной кривой из этого семейства, и  $h_2 \in l_2$ . Кривые  $l_1$  и  $l_2$  лежат ровно в одной компоненте, в  $W_1^s$  или  $W_2^s$ , и входят в  $O$ , образуя конфигурацию «клина с нулевым углом». Соответственно, конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$  (см. рис. 5, в) будет напоминать ту, которая характерна для неустойчивых сепаратрис аттрактора Лоренца. Поэтому возникающий здесь аттрактор был назван в [39] «дискретным аттрактором Лоренца».

Аналогичные простые геометрические рассуждения для случая  $|\lambda_2| < |\lambda_3|$  (см. рис. 5, г) показывают, что здесь конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$  будет совсем другой. Она скорее похожа на конфигурацию сепаратрис в аттракторе отображения Пуанкаре периодически возмущенной двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седла [30]. Поэтому возникающий в этом случае аттрактор был назван в [38] «дискретным восьмерочным аттрактором» (рис. 1 и приведенный ниже рис. 7 дают представление о типичной форме такого аттрактора).

Заметим, что для обоих таких аттракторов условие  $\sigma > 1$  (здесь  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_2|$  в лоренцевском и  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3|$  в восьмерочном случаях, соответственно) является очень важным, так как оно просто необходимо для псевдогиперболичности рассматриваемого аттрактора. В противном случае, это будут либо квазиаттракторы лоренцевском или восьмерочного типа; либо – другой вариант – из образовавшейся гомоклинической конфигурации в случае  $\sigma < 1$  может «отродиться» большая охватывающая её устойчивая замкнутая инвариантная кривая (тор), которая может, в свою очередь, разрушиться, и на её месте может возникнуть хаос уже совсем другой природы (например, «тор-хаос»). Обе эти возможности хорошо наблюдаются при компьютерных экспериментах (см., например, [37]).

Эти очевидные наблюдения подсказывают нам, что и в случаях седловых неподвижных точек других типов также можно ожидать существование гомоклинических аттракторов, конфигурация которых будет существенно зависеть от собственных значений этих точек и, в первую очередь, от их знаков. В случае, когда среди собственных значений есть комплексно-сопряженные, можно ожидать также существование дискретных аттракторов спирального типа.

**Замечание 2.** Однако наши «дискретные» лоренцевский и восьмерочный аттракторы существенно отличаются от их аналогов, получаемых в отображениях Пуанкаре периодически возмущенных трехмерных потоков. Так, при малом периодическом возмущении системы с аттрактором Лоренца получается псевдогиперболический аттрактор [50], который имеет седловую неподвижную точку со всеми положительными мультипликаторами, и в «дырках» аттрактора лежат неподвижные точки. В случае «дискретного аттрактора Лоренца» неподвижная точка имеет два отрицательных мультипликатора, и в «дырках» лежит траектория периода два. Возможно, «дискретные восьмерочные аттракторы» вообще не имеют потоковых аналогов. Это связано с тем, что если соответствующая система имеет гомоклиническую вось-

мерку седла, то либо эта «восьмерка» устойчива (аттрактор), но тогда получаемый аттрактор будет иметь  $\sigma < 1$ , либо неустойчива, тогда аттрактора вообще нет. Это позволяет говорить, что и «дискретный аттрактор Лоренца» и «дискретный восьмерочный аттрактор» являются новыми.

Сама задача изучения и классификации гомоклинических аттракторов трехмерных диффеоморфизмов была впервые поставлена в работе [37], хотя первые результаты на эту тему были получены ещё в работе [45], в которой у трехмерных отображений Эно были обнаружены дискретные аттракторы Лоренца. Заметим, что возможность появления таких аттракторов при локальных бифуркациях трехкратно вырожденных неподвижных точек, например, имеющих мультипликаторы  $+1; -1; -1$ , была исследована в работе [64]. Так как отображение Эно (1) содержит три параметра, то в нем такая точка существует, и более того, как показано в [45], для нее выполнены условия из [64]. Таким образом, основная идея нашей работы [45] состояла в применении знаний о свойствах вырожденных локальных бифуркаций к конкретной ситуации. Очевидно, что этот подход может быть также использован при изучении различных других моделей, содержащих не менее трех параметров.

В работе [37] была предложена другая идея, основанная на реализации феноменологических сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов, возможных в однопараметрических семействах трехмерных отображений. Такие сценарии, как, например, представленные на рис. 5, выглядят вполне реализуемыми в конкретных системах и очень удобными для компьютерных исследований – здесь, например, не нужно знать всех тонкостей глобальной бифуркации, приводящей к возникновению гомоклинических структур, а достаточно только вычислить/построить основные простые характеристики (фазовый портрет, мультипликаторы неподвижной точки, ляпуновские показатели и т.п.). Сама идея изучения странных аттракторов с помощью феноменологических сценариев, включающих два основных бифуркационных этапа – потеря устойчивости простого аттрактора (состояния равновесия, предельного цикла, неподвижной точки и т.п.) и возникновение гомоклинического аттрактора – впервые была предложена в работе Л.П. Шильникова [36], в которой такой сценарий был использован для объяснения явления возникновения спирального хаоса в случае многомерных потоков.

В настоящей работе мы проиллюстрируем, как эти идеи могут быть применены в исследовании странных гомоклинических аттракторов в конкретных моделях.

**2.1. Метод карт седел.** Тот факт, что конфигурация таких аттракторов существенно зависит от собственных значений их неподвижных точек, был использован в работе [40] для целей их классификации в случае ориентируемых трехмерных отображений. Если ограничиться только псевдогиперболическими гомоклиническими аттракторами, то такая задача оказывается вполне разрешимой, если различать аттракторы по типам их гомоклинических структур. В этом случае, как показано в [40], возможно 5 разных типов таких псевдогиперболических аттракторов. Все они относятся к случаю, когда неподвижная точка является седлом (все мультипликаторы действительны) с одномерным неустойчивым многообразием. Два из этих типов – дискретные лоренцевские и восьмерочные аттракторы – наблюдаются в случае, когда неустойчивый мультипликатор  $\lambda_1$  отрицателен,  $\lambda_1 < -1$ , а остальные («двойной

восьмерочный», «супервосьмерочный» и «суперлоренцевский») относятся к случаю, когда  $\lambda_1 > 1$  [40].

Для нахождения таких аттракторов в конкретных моделях в работе [40] был предложен так называемый «метод карт седел». Проиллюстрируем суть этого метода на примере *трехмерного обобщенного отображения Эно* вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Ay + Cz + f(y, z), \quad (3)$$

где функция  $f$  зависит только от координат  $y$  и  $z$ , а также  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = f'_z(0, 0) = 0$ . Отображение (3) зависит от трех параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , имеет постоянный якобиан, равный  $B$ . Очевидно, к виду (3) может быть приведено любое отображение вида  $\bar{x} = y$ ,  $\bar{y} = z$ ,  $\bar{z} = M_1 + Bx + g(y, z)$ , имеющее неподвижную точку (например, отображение (1) при  $(1 + B - M_2)^2 + 4M_1 > 0$ ), если эту точку сдвинуть в начало координат.

Точка  $O(0, 0, 0)$  является неподвижной для отображения (3), в которой оно имеет характеристическое уравнение вида

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \quad (4)$$

Здесь важно, что собственные значения точки  $O$  уже не зависят от нелинейностей  $f(y, z)$ , а являются функциями только параметров  $A, B$  и  $C$ . Поэтому для отображения (3) можно построить разбиение множества значений параметров на области, отвечающие разным типам расположения собственных значений точки  $O$ . Такое разбиение при фиксированном значении якобиана, то есть в данном случае при фиксированном  $B$ , называется «картой седел» [40]<sup>8</sup>. Отметим также, что на этой карте мы различаем также области, отвечающие  $\sigma > 1$  и  $\sigma < 1$  в случае, когда неустойчивое многообразие точки  $O$  одномерно. Примеры таких карт седел показаны на рис. 6.

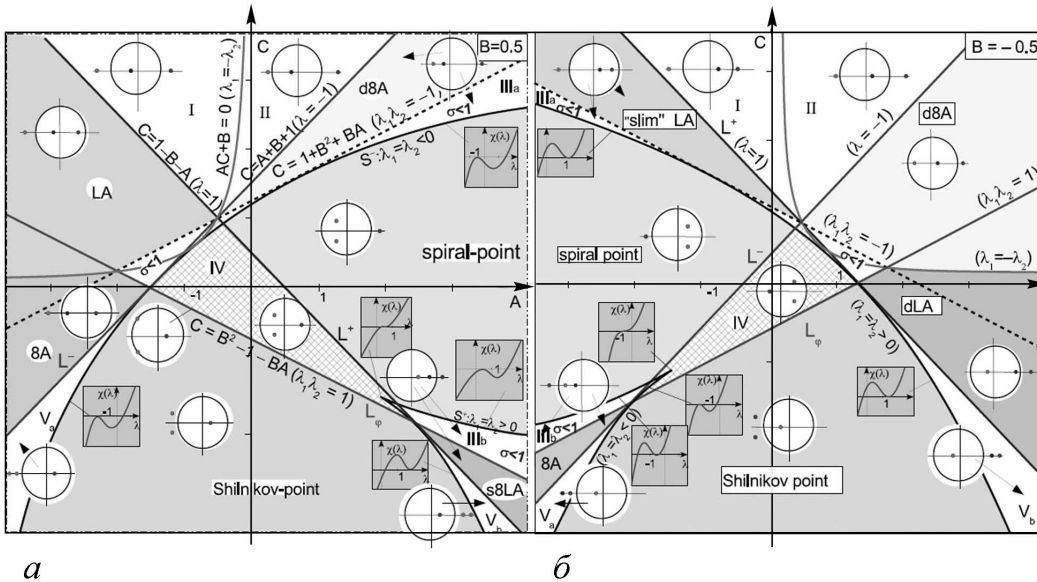


Рис. 6. Пример карты седел для отображения (3) для различных значений  $B$ :  $a - 0.5$ ,  $b - (-0.5)$

<sup>8</sup>В случае трехмерных потоков аналогичная «карта седел» для состояний равновесия была предложена в форме таблицы в [65, Приложение С.2.]



На этих картах выделена область IV, так называемый «треугольник устойчивости» (область  $\{C > B^2 - 1 - BA\} \cap \{C < A + B + 1\} \cap \{C < 1 - B - A\}$ ), когда неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  является асимптотически устойчивой. При всех других значениях параметров  $A$  и  $C$  (кроме бифуркационных кривых) точка  $O(0, 0, 0)$  является седловой – она имеет мультипликаторы как внутри, так и вне единичного круга (их расположение также показано на рис. 6). Границами областей на карте седел служат 7 основных кривых. Это, во-первых, три бифуркационные кривые, при значениях параметров на которых у точки  $O(0, 0, 0)$  появляются мультипликаторы на единичной окружности:

- кривая  $L_+$ :  $C = 1 - B - A$  (мультипликатор  $\lambda = +1$ );
- кривая  $L_-$ :  $C = 1 + B + A$  (мультипликатор  $\lambda = -1$ );
- кривая  $L_\varphi$ :  $C = B^2 - 1 - BA$  при  $-2 < A - B < 2$  (мультипликаторы  $e^{\pm i\varphi}$ ).

Заметим, что кривая  $C = B^2 - 1 - BA$  входит в границы областей на самом деле целиком, но при  $|A - B| \geq 2$  она не является бифуркационной: здесь при  $A - B \leq -2$  точка  $M$  имеет мультипликаторы вида  $(B, -|\lambda|, -|\lambda|^{-1})$ , а при  $A - B \geq 2$  – вида  $(B, |\lambda|, |\lambda|^{-1})$ . Во-вторых, на карте седел есть 4 дополнительные кривые:

- «резонансная кривая»  $AC + B = 0$ ,  $A < 0$  (когда  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ),
- кривая « $\sigma = 1$ »  $C = 1 + B^2 + AB$  (когда  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ )

и две кривые «равных корней»

- $S^-$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ),
- $S^+$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ),

которые разделяют области с точками типа «узел» и «фокус», а также «седло» и «седло-фокус». Последние кривые задаются формулой

$$S^\pm : (\lambda_\pm)^3 - A(\lambda_\pm)^2 - C\lambda_\pm - B = 0,$$

где

$$\lambda_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 3C}}{3}$$

при  $A^2 + 3C > 0$  (то есть  $\lambda_\pm$  – это корни уравнения  $3\lambda^2 - 2A\lambda - C = 0$ ).

Для целей нашей статьи (исследование псевдогиперболических аттракторов) наибольший интерес представляют 4 области, при значении параметров из которых неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  отображения (3) является седловой с одномерным неустойчивым многообразием и седловой величиной  $\sigma > 1$ . Это области LA, 8A, d8A и sL8A в ориентируемом случае – рис. 6, а; а также области «slim» LA, 8A, d8A и dLA в неориентируемом случае – рис. 6, б. В остальных областях, кроме «треугольника устойчивости», точка является либо седло-фокусом, либо седлом с двумерным неустойчивым многообразием, либо имеет  $\sigma < 1$ . Как мы предполагаем, если отображение имеет гомоклинический аттрактор (содержащий точку  $O$ ) при значениях параметров из этих последних областей, то он является, по нашему мнению, квазиаттрактором (см. *Замечание 1*).

Использование карт седел при численных исследованиях является очень удобным вспомогательным инструментом наряду с методом ляпуновских диаграмм. Однако здесь мы также несколько модифицируем этот последний метод. Стандартно

он состоит в построении карт ляпуновских показателей, в которых разным цветом (на черно-белых рисунках цифрой) обозначаются области параметров, отвечающих разным спектрам ляпуновских показателей  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ . Мы используем, в частности, зеленый цвет (цифра «1») для обозначения областей устойчивых периодических режимов ( $\Lambda_1 < 0$ ); голубой (цифра «2») – для квазипериодических ( $\Lambda_1 = 0$ ); желтый (цифра «3») – когда  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ; красный (цифра «4»), когда  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 \sim 0$ ; синий (цифра «5»), когда  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$  – для странных аттракторов.<sup>9</sup> К этим пяти цветам мы добавили еще один – темно-серый (цифра «6») для обозначения областей с гомоклиническими аттракторами, когда численно получаемые точки на аттракторе приближаются к точке  $O$  на расстояние не меньше, чем  $10^{-4}$ .

### 3. Примеры странных аттракторов в обобщенных отображениях Эно

В этом разделе мы проиллюстрируем возможность эффективного использования «карты седел» (такой как на рис. 6) для поиска гомоклинических аттракторов различных типов в обобщенных отображениях Эно вида (3).

Заметим, что существует много различных способов исследования хаотической динамики в конкретных моделях. Один из регулярных и разумных подходов к этой проблеме связан с построением карт динамических режимов и/или диаграмм показателей Ляпунова. Именно таким способом (с привлечением диаграмм ляпуновских показателей) в работе [45] были найдены дискретные аттракторы Лоренца в трехмерном отображении Эно вида (1) (см. также рис. 1). Теперь мы можем найти такой аттрактор, как говорится, «целенаправленно», используя наш подход. Для этого рассмотрим отображение (1) в «приведенном» виде

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Az + Cy - z^2 \quad (5)$$

и возьмем фактически готовую для него карту седел такую, как на рис. 6, *a*, но построенную при нужном фиксированном  $B$ , в данном случае при  $B = 0.7$ . Далее, на фоне этой карты строим численно диаграмму показателей Ляпунова. В результате получим такую картину, как на рис. 7, где, в частности, область хаоса «темно-серого» цвета (в черно-белом изображении цифра «6») пересекается с областью LA. Это говорит о том, что здесь при соответствующих значениях параметров  $A$  и  $C$  может наблюдаться дискретный аттрактор Лоренца. Результаты численного счета, показанные на рисунке, подтверждают это.

Очевидно, в случае отображения (3) вид карты седел не зависит от его нелинейных членов. В то же время ляпуновская диаграмма как раз и определяется этими членами. На современных компьютерах построение диаграмм ляпуновских показателей, в особенности в случае отображений, не занимает много времени (а карта

<sup>9</sup>Области с красным цветом (в нашем случае цифра «4»),  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 \sim 0$ , были специально выделены еще в работе [45] для обозначения тех областей, у которых значение  $\Lambda_2$  либо всегда колебалось в очень узких границах около нуля, либо отличалось от нуля на величину (порядка  $10^{-5}$  или  $10^{-6}$ ), сравнимую с точностью вычисления показателей. На удивление, такие области оказались весьма большими, и этот феномен (связанный, по-видимому, с тем, что отображение на аттракторе оказалось очень близким к дискретизации некоторого потока, например, с аттрактором Лоренца) обсуждался в [45].

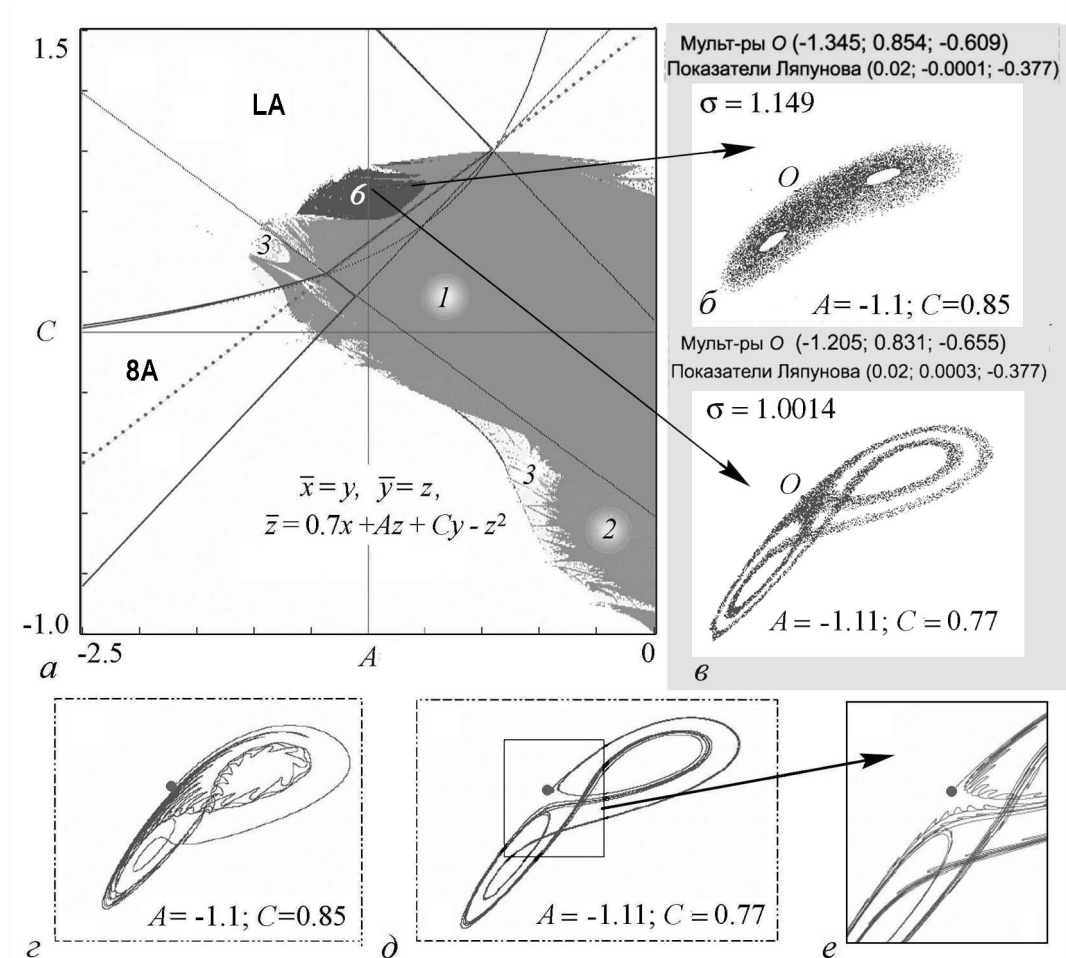


Рис. 7. *a* – диаграмма показателей Ляпунова на фоне «карты седел» на плоскости параметров  $A$  и  $C$  для отображения (5) при  $B = 0.7$ ; *b* и *v* – фазовые портреты (примерно  $10^4$  итераций одной точки) аттракторов; *z* и *d* – численно построенная одна из неустойчивых сепаратрис точки  $O$  (другая сепаратриса будет выглядеть симметрично, так как  $\lambda_1 < -1$ ), присутствие характерных «колябушек» на сепаратрисе свидетельствует о том, что аттрактор является диким гиперболическим, то есть содержит гомоклинические касания; *e* – увеличенный фрагмент рис. *d*. Рисунок из работы [40]

седел для отображения (3) строится мгновенно), в особенности, на «поисковом этапе». Кроме того, как показывает наш опыт, при изменении нелинейностей можно увидеть определенные тенденции, в частности, в изменении места расположения «темно-серого пятна» (когда аттрактор гомоклинический), и при желании его можно «загнать» внутрь любой из областей карты седел (кроме «треугольника устойчивости») и, соответственно, обнаружить интересующий нас аттрактор. На этом пути в работе [40] были найдены разнообразные гомоклинические аттракторы отображения (3), некоторые из них (для значений параметров  $A$  и  $C$  из областей LA, 8A, d8A и sL8A), когда выполняется необходимое условие (2), были предъявлены в качестве кандидатов в псевдогиперболические аттракторы. Примеры таких аттракторов показаны на рис. 8.

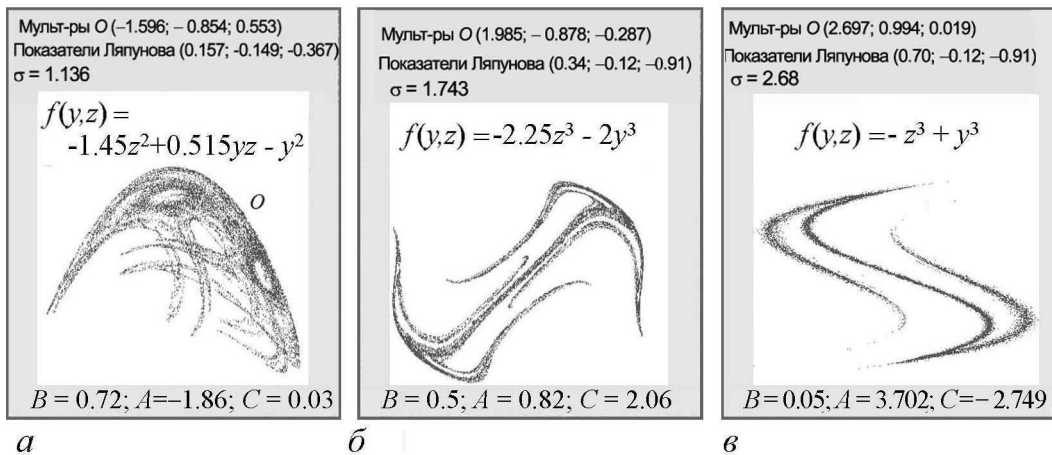


Рис. 8. Примеры дискретных гомоклинических аттракторов, соответствующих обобщенным отображениям Эно: *а* – восьмерочный аттрактор из области  $8A$ ; *б* – двойной восьмерочный аттрактор из области  $d8A$ ; *в* – супервосьмерочный аттрактор из области  $sL8A$

**3.1. Примеры псевдогиперболических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно.** Естественно ожидать, что и в случае *неориентируемых* трехмерных отображений (дiffeоморфизмов) могут реализовываться сценарии возникновения странных аттракторов аналогичные, например, приведенным на рис. 5. Однако, в силу неориентируемости отображений, как показано в работе [41], все они имеют свою специфику.

На рис. 9 схематически изображены 3 таких сценария, которые могут быть реализованы в однопараметрических семействах. Эти сценарии очень похожи на то, что происходит в ориентируемом случае: все они начинаются с устойчивой неподвижной точки  $O$ , с которой затем происходит бифуркация удвоения периода, и точка  $O$  становится седловой с одним неустойчивым мультипликатором  $\lambda_1 < -1$  и т.д. Отличие состоит в том, что отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  является ориентируемым, и здесь у  $f|_{W^s}$  точка  $O$  является либо узлом-плюс ( $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ), либо узлом-минус ( $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ), либо фокусом ( $\lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, 0 < \rho < 1$ ). Поэтому и конфигурация получаемых гомоклинических аттракторов становится другой. Мы назвали такие дискретные неориентируемые аттракторы соответственно как «тонкий лоренцевский», «восьмерочный» и «спиральный». Первые два могут быть, в принципе, псевдогиперболическими, последний – всегда квазиаттрактор.

**Замечание 3.** Неориентируемый восьмерочный аттрактор очень похож на ориентируемый (ср. рис. 9, *з* и рис. 5, *з*). «Тонкий лоренцевский» аттрактор не совсем похож на его ориентируемый аналог (ср. рис. 9, *в* и рис. 5, *в*). Это связано с тем, что в случае «тонкого» аттрактора гомоклиническая точка  $h_1$  на  $W_{loc}^s(O)$  и все её дальнейшие итерации лежат на одной и той же инвариантной кривой  $\ell$ , входящей в  $O$  (отсюда – термин «тонкий»), а у ориентируемого аттрактора итерации точки  $h_1$  лежат поочередно на двух разных кривых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , сходящихся в  $O$ , касаясь друг друга.

Эти аттракторы были найдены в [41] у неориентируемых трехмерных отображений Эно вида (3) при  $B < 0$ . Для таких отображений также может быть построена карта седел, такая как на рис. 6, *б*, и модифицированная диаграмма ляпуновских

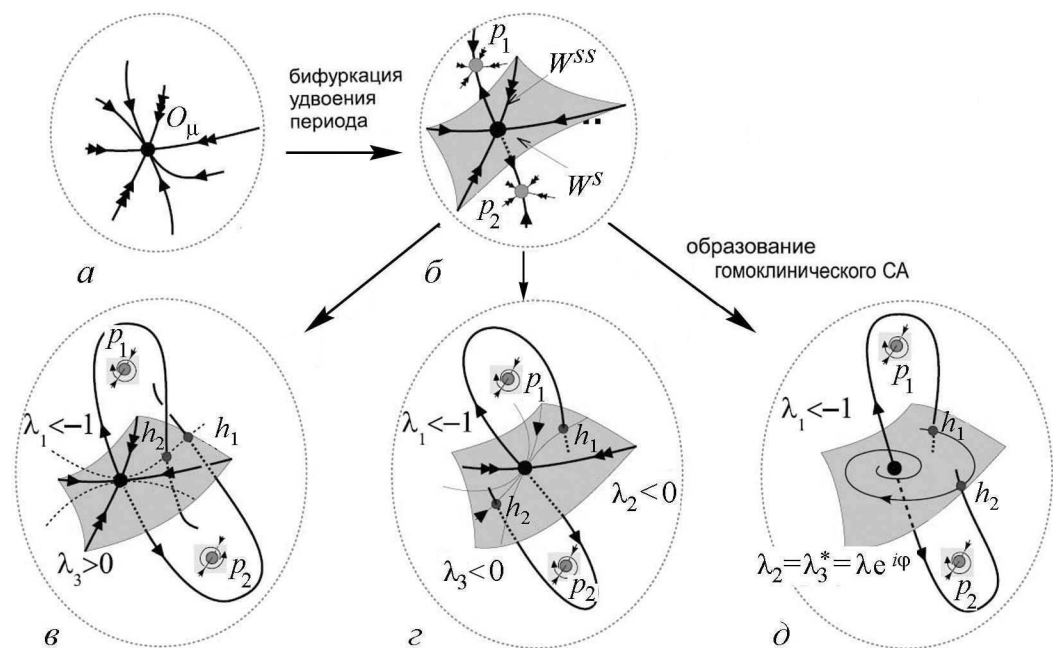


Рис. 9. Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: «тонкого» аттрактора Лоренца (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{в}$ ); восьмерочного аттрактора (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{з}$ ); спирального аттрактора (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{д}$ ). Здесь показаны точки  $h_1$  и  $h_2$ , принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории такие, что  $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$  и  $h_2 = f(h_1)$ . Эти точки расположены с одной стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в лоренцевском случае (в), по разные стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в случае восьмерочного аттрактора (з), а гомоклинические точки лежат в  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  на спирали, закручивающейся вокруг  $O_\mu$ , в случае спирального аттрактора (д)

показателей. Тогда, используя тот факт, что тонкий лоренцевский аттрактор может существовать при значениях параметров  $A$  и  $C$  из области «slim» LA, а неориентируемый восьмерочный – из области 8A, можно уже целенаправленно найти такие аттракторы. Примеры тонкого лоренцевского и восьмерочного аттракторов показаны на рис. 10.

Что весьма интересно, у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два. Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно  $f^2$ . Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца и восьмерочного в случае отображения (5) показаны на рис. 11, а и б, соответственно.

В принципе, эти аттракторы возникают «внутри» неориентируемого сценария (см. рис. 9), но по ориентируемому сценарию (см. рис. 5) для отображения  $f^2$ , у которого каждая точка цикла периода 2 является неподвижной. Понятно, что момент возникновения аттракторов периода 2, приведенных на рис. 11, – это некоторый промежуточный этап сценария образования гомоклинического аттрактора с неподвижной точкой  $O$ . Одна из таких финальных стадий этого сценария показана на рис. 11, в, на котором изображен «четыреглазый» аттрактор, возникающий при слиянии аттрактора Лоренца периода 2 с неподвижной точкой  $O$  типа седло-фокус. Представляется, что ориентируемость отображения не является необходимым условием для

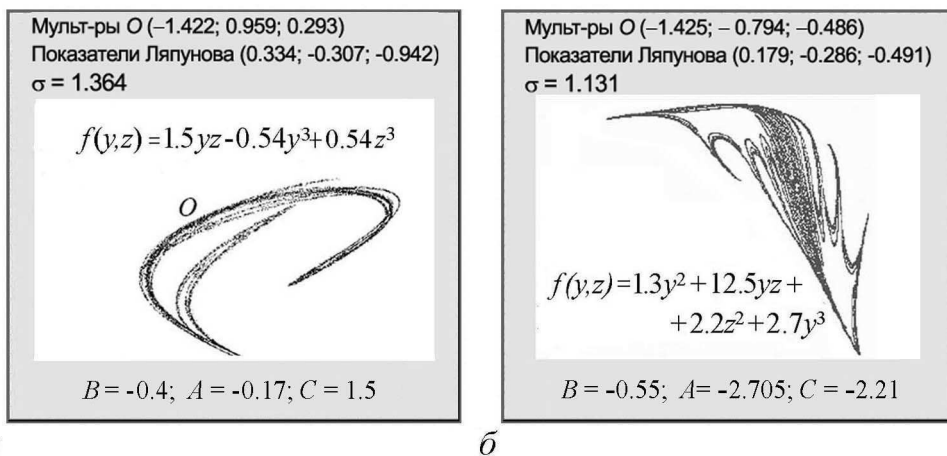


Рис. 10. Примеры неориентируемых гомоклинических аттракторов, соответствующих отображений Эно: *a* – тонкий лоренцевский аттрактор; *б* – восьмерочный аттрактор (у этого аттрактора  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -0.107 < 0$ , поэтому он – квазиаттрактор)

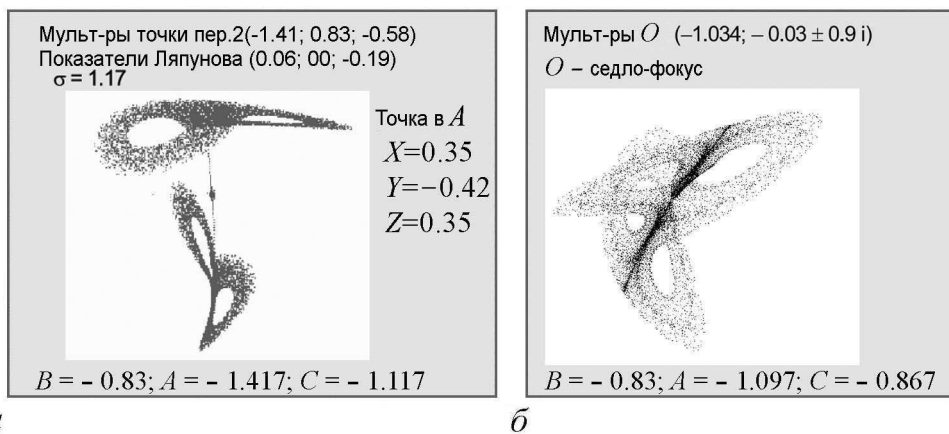


Рис. 11. Примеры странных аттракторов в неориентируемом отображении (5): *a* – дискретный аттрактор Лоренца периода 2; *б* – дискретный спирально-лоренцевский аттрактор

возникновения таких аттракторов. Кроме того, интересным является вопрос о существовании таких аттракторов с неподвижной точкой типа седло, которые могли бы дать примеры дискретных псевдогиперболических аттракторов новых типов.

## Приложение

### К определению псевдогиперболичности отображений

Рассмотрим диффеоморфизм  $f$ , определенный в  $\mathbb{R}^m$ , и пусть  $Df$  – это его дифференциал.<sup>10</sup> Открытая область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  называется *поглощающей областью* диффеоморфизма  $f$ , если  $f(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$ .

<sup>10</sup>Напомним, что дифференциал в точке  $x_0$  отображения  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – это линейный оператор  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ , переводящий вектор  $\ell_{x_0}$  в точке  $x_0$  в вектор  $\ell_{x_1} = A\ell_{x_0}$  в точке  $x_1 = f(x_0)$ .

**Определение 1.** Дiffeоморфизм  $f$  называется *псевдогиперболическим* на  $\mathcal{D}$ , если выполняются следующие условия.

- 1) У каждой точки из  $\mathcal{D}$  существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , которые имеют дополнительные размерности ( $\dim N_1 = k \geq 1, \dim N_2 = m - k \geq 2$ ), непрерывно зависят от точки, инвариантны относительно  $Df$ , то есть

$$Df(N_1(x)) = N_1(f(x)), \quad Df(N_2(x)) = N_2(f(x)),$$

и такие, что у каждой траектории  $L : \{x_i \mid x_{i+1} = f(x_i), i = 0, 1, \dots; x_0 \in \mathcal{D}\}$  максимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_1$ , строго меньше, чем минимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_2$ , то есть выполняется такое неравенство:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \sup_{\substack{u \in N_1(x_0) \\ \|u\| = 1}} \|Df^n(x_0)u\| \right) < \\ < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \inf_{\substack{v \in N_2(x_0) \\ \|v\| = 1}} \|Df^n(x_0)v\| \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Df^n$  – матрица размера  $m \times m$ , определяемая соотношением

$$Df^n = Df_{x_{n-1}} \cdot \dots \cdot Df_{x_1} \cdot Df_{x_0},$$

а  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  – соответственно верхний и нижний пределы.

- 2) Дiffeоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_1$  является равномерно сжимающим, то есть существуют такие константы  $\lambda > 0$  и  $C_1 > 0$ , что

$$\|Df^n(N_1)\| \leq C_1 e^{-\lambda n}. \quad (7)$$

- 3) Дiffeоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_2$  растягивает экспоненциально  $(m - k)$ -мерные объемы, то есть существуют такие константы  $\sigma > 0$  и  $C_2 > 0$ , что<sup>11</sup>

$$|\det Df^n(N_2)| \geq C_2 e^{\sigma n}. \quad (8)$$

Из *Определения 1* немедленно вытекает, что

- 1\* все траектории в  $\mathcal{D}$  неустойчивы: каждая траектория имеет положительный максимальный ляпуновский показатель

$$\Lambda_{max}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x)\| > 0.$$

<sup>11</sup>Если  $\dim N_2 = 1$ , то получается обычное определение равномерной гиперболичности, поэтому мы требуем в определении, что  $\dim N_2 \geq 2$ .

Заметим, что условия псевдогиперболичности означают, что на  $(m - k)$ -мерных подпространствах  $N_2$  растягиваются  $(m - k)$ -мерные объемы. Это не запрещает существования на  $N_2$  сжимающих направлений, но сжатие вдоль них должно быть равномерно не таким сильным, как любое сжатие в  $N_1$ . Поэтому условия псевдогиперболичности являются более слабыми, чем условия равномерной гиперболичности, которые означают, что  $\|Df^{-n}(N_2)\| < Ce^{-\sigma n}$ , то есть равномерное растяжение должно иметь место по всем направлениям в  $N_2$ . Тем не менее, также как и в случае гиперболических систем, здесь стандартно доказывается [66,42] следующий результат.

2\* Условия псевдогиперболичности сохраняются при всех достаточно малых  $C^r$ -возмущениях системы. Более того, пространства  $N_1$  и  $N_2$  меняются при этом непрерывно.

Из утверждения 1\* вытекает, что если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, и он не содержит устойчивых периодических траекторий, которые, как следует из условия 2\*, не появляются также при малых гладких возмущениях. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Авторы благодарят С.П. Кузнецова, В. Такера и Д. Тураева за полезные замечания.

*Работа поддержана грантом РНФ No. 14-41-00044. Численные эксперименты были выполнены в рамках гранта РНФ No. 15-12-20035. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ No. 16-01-00364 и No. 16-51-10005 КО. А. Гонченко и С. Гонченко были частично поддержаны Министерством науки и образования РФ по проекту 1.3287.2017/ПЧ. А. Казаков был также поддержан ЦФИ ВШЭ (проект 90) в 2017г., а также фондом «Династия».*

## Библиографический список

1. Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index // American Mathematical Soc. 1978. No. 38.
2. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76–125.
3. Gonchenko S. Reversible mixed dynamics: A concept and examples // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. Vol. 5, No. 4. Pp. 345–354.
4. Gonchenko S., Turaev D. On three types of dynamics, and the notion of attractor. – To appear.
5. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors. In book «Nonlinear Dynamics and Turbulence» / Eds G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston, Pitmen, 1983.
6. Shilnikov V.S. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. Bif. and Chaos. 1997. Vol. 9, No. 7. Pp. 1953–2001.



7. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Quasiattractors and homoclinic tangencies // *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, No. 2–4. Pp. 195–227.
8. *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Матем. сборник.* 1972. Т. 88(130), № 4. Ч. 1. С. 475–492; *Матем. сборник.* 1973. Т. 90(132), № 1. Ч. 2. С. 139–156.
9. *Гонченко С.В.* Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Мат. заметки.* 1983. Т. 33, вып. 5. С. 745–755.
10. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Росс. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
11. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. Pp. 15–31.
12. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21(5). Pp. 923–972.
13. *Mora L., Viana M.* Abundance of strange attractors // *Acta Math.* 1993. Vol. 171. Pp. 1–71.
14. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks // *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. Pp. 91–136.
15. *Gonchenko S.V., Sten'kin O.V., Turaev D.V.* Complexity of homoclinic bifurcations and  $\Omega$ -moduli // *Int. Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 6. Pp. 969–989.
16. *Colli E.* Infinitely many coexisting strange attractors // *Ann. IHP. Anal. Non Lineaire.* 1998. Vol. 15. Pp. 539–579.
17. *Homburg A.J.* Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria // *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15. Pp. 1029–1050.
18. *Gonchenko S.V., Meiss J.D. and Ovsyannikov I.I.* Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11. Pp. 191–212.
19. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. and Turaev D.V.* On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. Vol. 14. Pp. 137–147.
20. *Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I.* On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors // *Mat. Model. of Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8. Pp. 71–83.
21. *Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I. and Tatjer J.C.* Birth of Discrete Lorenz Attractors at the Bifurcations of 3D Maps with Homoclinic Tangencies to Saddle Points // *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. Vol. 19. Pp. 495–505.

22. *Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I.* Homoclinic tangencies to resonant saddles and discrete Lorenz attractors // *Discr. and Cont. Dyn. Sys. Series S.* 2017. Vol. 10, No. 2. Pp. 365–374.
23. *Lozi R.* Un attracteur de Henon // *J. Phys.* 1978. Vol. 39. Coll-C5. Pp. 9–10.
24. *Белых В.Н.* Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 3. С. 3–18.
25. *Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems // *Nonlinear Science.* Vol.56. World Scientific Series on Nonlinear Science: Monographs and Treatises, 2006.
26. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // *Межвуз. сб. Методы КТДУ. Горький*, 1983. С. 3–26.
27. *Shilnikov L.P.* Chua's Circuit: Rigorous result and future problems // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, No. 3. Pp. 489–519.
28. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. Pp. 69–77.
29. *Benedicks M., Carleson L.* The dynamics of the Henon map // *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. Pp. 73–169.
30. *Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A.* Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity.* 2013. Vol. 26, No.3. Pp. 621–678.
31. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Physics Letters A.* 1976. Vol. 57, No.5. Pp. 397–398.
32. *Rössler O.E.* Different types of chaos in two simple differential equations // *Zeitschrift für Naturforschung A.* 1976. Vol. 31, No. 12. Pp. 1664–1670.
33. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations // *Physics Letters A.* 1980. Vol. 79, No. 4. Pp. 259–263.
34. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. Pp. 573–579.
35. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov // *Journal of Statistical Physics.* 1982. Vol. 27, No. 1. Pp. 171–182.
36. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и турбулентность – I // *Межвузовский сб. Методы КТДУ. Горький*, 1986. С. 150–163.
37. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
38. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014. Vol. 24(8). 25 pages.
39. *Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Ovsyannikov I.I., Turaev D.V.* Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps // *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8(5). Pp. 48–70.
40. *Gonchenko A., Gonchenko S.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // *Physica D.* 2016. Vol. 337. Pp. 43–57.

41. Гонченко А.С., Козлов А.Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 17–29.
42. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
43. Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 1979. Vol. 50. Pp. 101–151.
44. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // Comm. Math. Phys. 1981. Vol. 82. Pp. 137–151.
45. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 2005. Vol. 15, No. 11. Pp. 3493–3508.
46. Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в системе Мориока–Шимицу // Межвузовский сб. Методы КТДУ. Горький, 1986. С. 180–183.
47. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62. Pp. 338–346.
48. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Vol. 328, No.12. Pp. 1197–1202.
49. Ovsyannikov I.I., Turaev D. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model // Nonlinearity 2017. Vol. 30. Pp. 115–137.
50. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 23–27.
51. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. Росс. Акад. Наук. 1993. Т. 329, № 4. С. 404–407.
52. Tatjer J.C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2001. Vol. 21. Pp. 249–302.
53. Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Tatjer J.C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
54. Сатаев Е.А. Стохастические свойства сингулярно гиперболических аттракторов // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 187–206.
55. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 15, No. 5. Pp. 521–538.
56. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Proc. of Int.Conf. Dedicated to 90th Anniversary of L.S.Pontryagin. Vol.6. Dynamical systems. В кн. «Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения»: Тематические обзоры. 1999. Т. 67. С. 69–128.
57. Gonchenko S., Gonchenko A. and Ming-Chia Li. On topological and hyperbolic

properties of systems with homoclinic tangencies. In book «Nonlinear Dynamics New Directions». Springer International Publishing Switzerland, 2015. 27 pages.

58. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, No. 4. Pp. 495–505.
59. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V. and Pochinka O. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28. Pp. 4081–4102.
60. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
61. Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P. Strange attractor of Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system // *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.* 2006 Vol. 129, No. 2. Pp. 400–412 [*J. Exp. Theor. Phys.* 2006. Vol. 102, No. 2. Pp. 355–364].
62. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D*. 2007. Vol. 232. Pp. 87–102.
63. Kuznetsov S.P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of the Smale–Williams attractor // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
64. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. Pp. 1123–1139.
65. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics // *World Scientific*. Part I, 1998; Part 2, 2002.
66. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // *Тр. МИАН СССР*. 1967. Т. 90. С. 3–210.

## References

1. Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index. *American Mathematical Soc.* 1978. No.38.
2. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On Newhouse regions of two-dimensional diffeomorphisms close to a diffeomorphism with a nontransversal heteroclinic cycle. *Proc. Steklov Inst. Math.* Vol. 216. P. 70–118.
3. Gonchenko S. Reversible mixed dynamics: A concept and examples. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. Vol. 5, No. 4. Pp.345–354.
4. Gonchenko S., Turaev D. On three types of dynamics, and the notion of attractor. To appear.
5. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Eds G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston, Pitmen, 1983.
6. Shilnikov V.S. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial. *Int. J. Bif. and Chaos*. 1997. Vol. 9, No. 7. Pp. 1953–2001.
7. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Quasiattractors and homoclinic tangencies. *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, No. 2-4. Pp. 195–227.
8. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to

- systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1. *Math. USSR Sb.* 1972. Vol. 17. Pp. 467–485; Part 2. *Math. USSR Sb.* 1973. Vol. 19. Pp. 139–156.
9. Gonchenko S.V. On stable periodic motions in systems close to a system with a nontransversal homoclinic curve. *Mat. Zametki.* 1983. Vol. 33, No. 5. Pp. 745–755.
  10. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with non-rough Poincaré homoclinic curve. *Doklady Mathematics.* 1993. Vol. 330, No. 2. Pp. 144–147.
  11. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits. *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. Pp. 15–31.
  12. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, No. 5. Pp. 923–972.
  13. Mora L., Viana M. Abundance of strange attractors. *Acta Math.* 1993. Vol. 171. Pp. 1–71.
  14. Palis J., Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. Pp. 91–136.
  15. Gonchenko S.V., Sten'kin O.V., Turaev D.V. Complexity of homoclinic bifurcations and  $\Omega$ -moduli. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 6. Pp. 969–989.
  16. Colli E. Infinitely many coexisting strange attractors. *Ann. IHP. Anal. Non Lineaire.* 1998. Vol. 15. Pp. 539–579.
  17. Homburg A.J. Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria. *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15. Pp. 1029–1050.
  18. Gonchenko S.V., Meiss J.D. and Ovsyannikov I.I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation. *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11. Pp. 191–212.
  19. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. and Turaev D.V. On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors. *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. Vol. 14. P. 137–147.
  20. Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I. On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors. *Mat. Model. of Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8. Pp. 71–83.
  21. Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I. and Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points. *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. Vol. 19. Pp. 495–505.
  22. Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I. Homoclinic tangencies to resonant saddles and discrete Lorenz attractors. *Discr. and Cont. Dyn. Sys. Series S.* 2017. Vol. 10, No. 2. Pp. 365–374.
  23. Lozi R. Un attracteur de Henon. *J. Phys.* 1978. Vol. 39. Coll-C5. Pp. 9–10.
  24. Belykh V.N. Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. *Sb. Mathematics.* 1995. Vol. 186, No. 3. Pp. 3–18.

25. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems. *Nonlinear Science*. Vol.56. World scientific series on nonlinear science: Monographs and treatises, 2006.
26. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1991. Vol. 149, No. 2. Pp. 201–212.
27. Shilnikov L.P. Chua's circuit: Rigorous result and future problems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4, No. 3. Pp. 489–519.
28. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. Pp. 69–77.
29. Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Henon map. *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. Pp. 73–169.
30. Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight. *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26, No. 3. Pp. 621–678.
31. Rössler O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*. 1976. Vol. 57, No. 5. Pp. 397–398.
32. Rössler O.E. Different types of chaos in two simple differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1976. Vol. 31, No. 12. Pp. 1664–1670.
33. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations. *Physics Letters A*. 1980. Vol. 79, No. 4. Pp. 259–263.
34. Arneodo A., Couillet P., C. Tresser. Possible new strange attractors with spiral structure. *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. Pp. 573–579.
35. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov. *Journal of Statistical Physics*. 1982. Vol. 27, No. 1. Pp. 171–182.
36. Shilnikov L.P. The theory of bifurcations and turbulence. *Selecta Math. Sovietica*. 1991. Vol. 10. Pp. 43–53.
37. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2012. Vol. 8, No. 1. Pp. 3–28.
38. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014. Vol. 24, No. 8. 25 pages.
39. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Ovsyannikov I.I., Turaev D.V. Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps. *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8, No. 5. Pp. 48–70.
40. Gonchenko A., Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps. *Physica D*. 2016. Vol. 337. Pp. 43–57.
41. Gonchenko A.S., Kozlov A.D. On scenaria of chaos appearance in three-dimension nonorientable maps. *J. SVO*. 2016. Vol. 18, No. 4. Pp. 17–29.
42. Turaev D.V., Shilnikov L.P. An example of a wild strange attractor. *Sb. Math.* 1998. Vol. 189. Pp. 291–314.

43. Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979. Vol. 50. Pp. 101–151.
44. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors. *Comm. Math. Phys.* 1981. Vol. 82. Pp. 137–151.
45. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15, No. 11. Pp. 3493–3508.
46. Shilnikov A.L. Bifurcation and chaos in the Morioka–Shimizu system. *Selecta Math. Soviet.* 1991. Vol. 10, No. 2. Pp. 105–117.
47. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model. *Physica D.* 1993. Vol. 62. Pp. 338–346.
48. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics.* 1999. Vol. 328, No. 12. Pp. 1197–1202.
49. Ovsyannikov I.I., Turaev D. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model. *Nonlinearity.* 2017. Vol. 30. Pp. 115–137.
50. Turaev D.V. and Shilnikov L.P. Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors. *Doklady Mathematics.* 2008. Vol. 77, No. 1. Pp. 17–21.
51. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. On an existence of Newhouse regions near systems with non-rough Poincaré homoclinic curve (multidimensional case). *Doklady Akademii Nauk.* 1993. Vol. 329, No. 4. Pp. 404–407.
52. Tatjer J.C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies. *Ergodic Theory Dynam. Systems.* 2001. Vol. 21. Pp. 249–302.
53. Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Tatjer J.C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2007. Vol. 12, No.3. Pp. 233–266.
54. Sataev E.A. Stochastic properties of the singular hyperbolic attractors. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2010. Vol. 6, No. 1. Pp. 187–206.
55. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013. Vol. 15, No. 5. Pp. 521–538.
56. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *Journal of Mathematical Sciences.* 2001. Vol. 105, No. 1. Pp. 1738–1778.
57. Gonchenko S., Gonchenko A. and Ming-Chia Li. On topological and hyperbolic properties of systems with homoclinic tangencies. In book «Nonlinear Dynamics New Directions». Springer International Publishing Switzerland, 2015. 27 pages.
58. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. Vol. 19, No. 4. Pp. 495–505.

59. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V. and Pochinka O. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets. *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28. Pp. 4081–4102.
60. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
61. Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P. Strange attractor of Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.* 2006. Vol. 129, No.2. Pp. 400–412 [*J. Exp. Theor. Phys.* 2006. Vol. 102, No. 2. Pp. 355–364].
62. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D*. 2007. Vol. 232. Pp. 87–102.
63. Kuznetsov S.P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of the Smale–Williams attractor. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
64. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. Pp. 1123–1139.
65. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. *World Scientific*. Part I, 1998; Part 2, 2002 .
66. Anosov D.V. (ed.). Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. *American Mathematical Society*. 1969. No. 90.

*Поступила в редакцию 22.02.2017*



*Гонченко Александр Сергеевич* – родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2010). С 2010 по 2012 обучался в очной аспирантуре в ННГУ им Н.И. Лобачевского. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, ННГУ) по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Работает в ННГУ научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем. Опубликовал около 20 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
 E-mail: agonchenko@mail.ru



*Гонченко Сергей Владимирович* – родился в 1953 году в Горьком. Окончил Горьковский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1983, ГГУ) и доктора физико-математических наук (2004, ГГУ) по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Автор монографии «Гомоклинические касания» (в соавторстве с Л.П. Шильниковым). Опубликовал 150 научных статей по направлениям, указанным выше. Федеральный профессор в области математики. Работает в ННГУ, заведующий отделом дифференциальных уравнений НИИ ПМК ННГУ (с 2011).

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
 E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru



*Казаков Алексей Олегович* – родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2010). С 2010 по 2012 обучался в очной аспирантуре в ННГУ им Н.И. Лобачевского. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, НИУ МИФИ) по направлению 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работал младшим научным сотрудником (2011–2013) в лаборатории «Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения» в УдГУ (Ижевск). С 2013 года работает на кафедре «Теории управления и динамики систем» в ННГУ им. Н.И.Лобачевского и с 2015 года – научным сотрудником в лаборатории ТАПРА-ДЕСС в НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Опубликовал около 20 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.



Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
Удмуртский государственный университет  
E-mail: kazakovdz@yandex.ru

*Козлов Александр Дмитриевич* – родился в 1988 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2011). После окончания ННГУ работает в исследовательской лаборатории компании Интел, параллельно занимается научной деятельностью в ННГУ. Область научных интересов – странные аттракторы в трехмерных диффеоморфизмах и четырехмерных потоках.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
E-mail: kozzloff@list.ru