



Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры

В. В. Учайкин¹, В. А. Литвинов²

¹Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

²Барнаульский юридический институт МВД России
Россия, 656038 Барнаул, ул. Чкалова, 49

E-mail: vuchaikin@gmail.com, lva201011@yandex.ru

Автор для переписки Учайкин Владимир Васильевич, vuchaikin@gmail.com

Поступила в редакцию 6.07.2018, принята к публикации 12.09.2018

Тема. Известно, что двойственное представление задач (через основную и сопряженную в смысле Лагранжа функции) позволяет сформулировать эффективную версию теории малых возмущений, однако расширение её области применения путём включения следующих членов ряда теории возмущений резко усложняют процедуру решения. В связи с этим, в ряде работ были предприняты поиски альтернативных подходов. К их числу относится и предложенный В.В.Учайкиным метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), использующий не одну, как это имеет место в теории возмущений, а несколько опорных задач с известными решениями. **Цель** – демонстрация особенностей применения ВИ-метода на конкретных примерах и исследование его погрешностей. **Исследуемые модели.** Исследования проводятся на примерах решения нескольких модельных задач теории переноса, в упрощённых постановках представляющих задачи диффузии, переноса нейтронов, заряженных частиц и волн. **Результаты.** Решение параболического уравнения для амплитуды волны рассматривалось в области, где первое приближение теории возмущений неприменимо, тогда как ВИ-метод дал результаты, практически совпадающие с результатами прямого применения разностного метода, хотя для выбранных глубин опорные решения отличались от искомого более чем на порядок, а сложность вычислений ВИ-методом не превысила сложности первого приближения теории возмущений. Аналогичная ситуация обнаружилась и в случае прямого применения ВИ-метода к задаче о прохождении излучения в нерассеивающей среде и в стационарной задаче о диффузии в однородном слое с заданными коэффициентами поглощения σ и диффузии λ . **Обсуждение.** Последняя задача наиболее интересна и наглядна в плане обсуждения, поскольку ведёт к построению топограммы погрешности на плоскости (σ, λ) . При данной постановке задачи искомым функционалом есть просто функция двух указанных переменных, однако в более общем (и интересном) случае он может оказаться функционалом от функций, характеризующих зависимость свойств среды от координат.

Ключевые слова: теория возмущений, сопряжённые функции, стационарный функционал.

Образец цитирования: Учайкин В.В., Литвинов В.А. Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 82–98.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00556.

Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples

V. V. Uchaikin¹, V. A. Litvinov²

¹Ulyanovsk State University,

42, L. Tolstoy str., 432017 Ulyanovsk, Russia

²Barnaul Law Institute of the Ministry of the Interior of Russia

49, Chkalova str., 656038 Barnaul, Russia

E-mail: vuchaikin@gmail.com, lva201011@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Uchaikin Vladimir V., vuchaikin@gmail.com

Received 6.07.2018, accepted for publication 12.09.2018

Topic and aim. It is known that the dual representation of problems (via the basic and conjugate functions in the Lagrange sense) allows us to formulate an effective version of the theory of small perturbations, but expanding its scope by including the next terms in the perturbation theory series sharply complicates the solution procedure. In this regard, a number of works have been undertaken to find alternative approaches. Among them is the method of variational interpolation (VI-method), proposed by V.V. Uchaikin, which uses not one, as it is in the perturbation theory, but several reference problems with known solutions. The purpose of the article is to demonstrate some peculiarities of the method in applications to specific model problems. **Models investigated.** The investigations are carried out on the examples of solving several model problems in the transport theory, in simplified formulations representing diffusion problems, neutron transport, charged particles, and waves. **Results.** The solution of the parabolic equation for the wave amplitude was considered in the region where the first-order approximation of perturbation theory is inapplicable, whereas the VI-method showed results that practically coincide with the results given by the finite-difference method, although for the chosen depths the reference («unperturbed») the desired solution differs by an order of magnitude from the reference ones, and the computation didn't exceed in complexity of the first-order approximation of perturbation theory. A similar situation is observed in the case of the application of the VI-method to the problem of the passage of radiation in a non-scattering medium and in the stationary problem of diffusion in a homogeneous layer with given absorption coefficients σ and diffusion λ . **Discussion.** The latter case is more most interesting and visible for discussion, since it leads to the error topogram on the plane (σ, λ) . In this formulation of the problem, the desired functional is simply a function of the two material variables, but in a more general (and interesting) case it can turn out to be a functional of functions characterizing the space-time dependence of local material properties of the medium.

Key words: perturbation theory, adjoint function, stationary functional.

Reference: Uchaikin V.V., Litvinov V.A. Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 82–98.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>

Acknowledgements. The investigation is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research № 16-01-00556.

Введение

Важнейшей особенностью применения теории переноса излучений в геофизических задачах является неопределенность (многовариантность) состояния исследуемой области среды (атмосферы, океана, земной коры), в которой распространяется излучение [1]. Особенно это важно в задачах зондирования, решение которых сопровождается проведением большого количества расчетов поля излучения для различных возможных состояний среды. Поскольку каждый из таких расчетов требует обычно больших затрат машинного времени, актуальной является задача извлечения максимума информации при минимальном количестве расчетов. Одним из методов, позволяющих сократить объем проводимых расчетов, является широко известный в теории переноса метод возмущений, пригодный для аппроксимации решения близких задач по результатам решения одной невозмущённой задачи. Иными словами, метод возмущений позволяет получить

информацию о решении задач, «лежащих» в окрестности *одной* точки, представляющей собой невозмущённую задачу в пространстве некоторого класса одноподобных задач. В отличие от него, метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), предложенный одним из авторов данной статьи (В.В.У.), использует несколько таких точек, называемых *опорными задачами*. Задание уровня приемлемой точности (ПТ) решения поставленной («возмущённой») задачи определяет размеры областей ПТ вокруг каждой из них. По мере сближения этих опорных точек их области ПТ сближаются и с какого-то момента сливаются в одну, обладающую значительно большими размерами, чем в случае отдельных опорных точек. Важно отметить, что алгоритм вычислений при этом не превосходит по сложности соответствующий алгоритм теории малых возмущений.

Цель настоящей работы – разъяснить на конкретных примерах смысл основных понятий и положений ВИ-метода, изложить методику его применения и продемонстрировать достигаемую им точность путём сопоставления с известными аналитическими решениями и данными классических численных методов.

1. Принцип двойственности в линейной теории измерений

Поясним терминологию, используемую в данной работе. Она тесно связана с проблемой измерений, сформулированной в [2], встроенной позднее в аппарат вычислительной математики [3] и ставшей эффективным средством анализа сложных систем [4].

Исследуемый процесс (например, тепло- или массоперенос) характеризуется функцией $f(x)$ (температура, концентрация), где под x понимается совокупность всех переменных (время, координаты и пр.). Функция эта удовлетворяет уравнению

$$Lf(x) = s(x), \quad (1)$$

в котором L – некоторый линейный оператор, а $s(x)$ – плотность источников. Как правило, нас интересует не само решение, зависящее от многих переменных и содержащее часто избыточную информацию, а *то, что измеряется в эксперименте*. Результат измерения определяется свойствами самого поля $f(x)$ и погружённого в него детектора, формализуемого путём введения *локальной функции отклика* $w(x)$. Ограничение классом *аддитивных детекторов* [5] позволяет рассматривать показание детектора J как линейный функционал от решения уравнения (1). В гильбертовом пространстве функций такой функционал записывается в виде скалярного произведения

$$J = (w, f) := \int f(x)w(x)dx, \quad (2)$$

где интегрирование ведётся по всей области определения функций f и w . Принцип двойности, на котором построена теория возмущений в представлении Марчука, гласит, что идентичный результат может быть записан с использованием решения $f^+(x)$ сопряжённого (по Лагранжу) уравнения

$$L^+ f^+(x) = w(x), \quad (3)$$

$$J = (f^+, s). \quad (4)$$

Отметим, что по определению сопряжённых операторов имеет место соотношение

$$(g, Lf) = (L^+ g, f) \quad (5)$$

для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$, а из (4) следует, что значение $f^+(x_0)$ сопряженной функции (называемой также *ценностью*) $f^+(x)$ в точке x_0 равно *показанию детектора в поле, созданном единичным дельта-источником* $s(x) = \delta(x - x_0)$.

Вся информация о среде, существенная для рассматриваемого процесса, заключена в операторах L, L^+ . В сложных системах решение уравнений (1) и (3) является трудоёмкой задачей. Обратная задача формулируется как определение оператора L по набору известных функционалов J . Собственно говоря, это и есть *задача об измерении*: по экспериментально найденным значениям функционалов J_i определить оператор L . Определение оператора в этом случае означает выбор конкретного оператора из некоторого, определяемого физикой процесса, семейства операторов. В простейшем случае, рассмотренном ещё Марчуком, предполагается параметрическое задание операторов, $L = L(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, когда форма оператора известна и необходимо определить лишь численные значения входящих в неё параметров. В этом случае определить оператор – значит, найти значения параметров σ_i .

Предположим теперь, что из каких-то соображений нам известно, что искомый оператор L близок в некотором смысле к известному оператору L_1 , для которого известны решения основного (f) и сопряжённого (f^+) уравнений (при тех же правых частях), а стало быть, и значение функционала J . Пометим эти характеристики нижним индексом «1» и введём обозначения

$$V_1 = L - L_1, \quad (6)$$

и

$$(V_1)_{11} = (f_1^+, V_1 f_1), \quad (7)$$

тогда формула теории малых возмущений (формула (4.20) книги [3]) запишется в виде

$$J \approx J_1 - (V_1)_{11}. \quad (8)$$

Она выражает (приближённо) значение J через решения f_1 и f_1^+ уравнений (1)–(3) с пробным (опорным) оператором L_1 , что позволяет избежать отдельного решения задачи, оператор которой L близок к L_1 , а воспользоваться готовыми решениями, подставив их в эту формулу. Таково стандартное применение теории возмущений к решению *прямой задачи*. В результате мы получаем континуум решений, соответствующих континууму операторов в окрестности *опорного* (или *невозмущённого*) оператора L_1 . При $L = L_1$ решение получается точным, при $L \neq L_1$ оно получается с ошибкой: чем ближе L к L_1 , тем меньше ошибка $|J - J_1|$. Вокруг опорного оператора (точки в операторном пространстве) образуется некоторая *область приемлемой точности*.

Пусть теперь J – результат измерения, отвечающий оператору L , а J_1 и другие величины с индексом 1 связаны с пробным оператором L_1 , имеющим ту же форму, что и «истинный оператор» L , но другие ($\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$) значения параметров. Формула (8) связывает истинные параметры σ_i с пробными σ'_i . Представим её в виде

$$J - J_1 \approx -(f_1^+, L f_1) + (f_1^+, L_1 f_1). \quad (9)$$

Истинные параметры входят в J и L , пробные – только в величины с индексом 1. При наличии достаточного количества измеряемых функционалов (отвечающих, например, разным функциям отклика $w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x)$), эта формула позволяет, в принципе, ставить вопрос о вычислении набора параметров σ_i оператора L , то есть, по существу о решении *обратной задачи*. Проблема, однако, заключается в том, что формула (9), будучи лишь первым (линейным) приближением теории возмущений, имеет весьма ограниченную область применимости, а применение высших порядков теории возмущений резко увеличивает вычислительные затраты.

2. Стационарные функционалы

Эффективный метод преодоления этой трудности, названный *вариационным методом интерполирования* (ВИ-методом), был предложен в работе [6] и заключается в использовании стационарной формы представления показаний детектора и не одного, а нескольких опорных операторов. Остановимся на этом подробнее.

С помощью двух линейных функционалов (2) и (4) от решений основного и сопряжённого уравнений можно построить и нелинейные, имеющие то же численное значение, например, билинейный функционал

$$\mathcal{J}(f^+, f) = (w, f) + (f^+, s) - (f^+, Lf). \quad (10)$$

Поскольку f и f^+ суть точные решения основного и сопряжённого уравнений, то, в согласии с записанными выше формулами, функционал (10) численно совпадает со значением J :

$$\mathcal{J}(f^+, f) = J + J - J = J.$$

Заменим теперь f и f^+ в функционале (10) близкими к ним функциями ϕ и ϕ^+ тех же переменных,

$$\mathcal{J}(\phi^+, \phi) = (w, \phi) + (\phi^+, s) - (\phi^+, L\phi), \quad (11)$$

и возьмём первую вариацию функционала (11) по ϕ^+ и ϕ при фиксированных s и w :

$$\delta\mathcal{J}(\phi^+, \phi) = (w, \delta\phi) + (\delta\phi^+, s) - (\delta\phi^+, L\phi) - (\phi^+, L\delta\phi). \quad (12)$$

Воспользуемся в двух последних слагаемых свойством (5) сопряжённых операторов и коммутативностью скалярного произведения в гильбертовом пространстве функций. Заменив после этого ϕ на f , получаем $\delta\mathcal{J} = 0$. Таким образом, на точных решениях уравнений (1) и (3) функционал \mathcal{J} не просто совпадает с искомым показанием детектора J , но он ещё и *стационарен*:

$$\mathcal{J}(f^+, f) \equiv \mathcal{J}(\phi^+, \phi)|_{\phi^+=f^+; \phi=f} = J,$$

и

$$\delta\mathcal{J}(f^+, f) \equiv \delta\mathcal{J}(\phi^+, \phi)|_{\phi^+=f^+; \phi=f} = 0.$$

Вот это представление показания детектора и используется в ВИ-методе.

Отметив опорные операторы и соответствующие им функции индексами, принимающими значения от 1 до n (число опорных операторов), представим входящие в (4) функции в виде линейных суперпозиций решений опорных задач с теми же самыми правыми частями $s(x)$ и $w(x)$,

$$f^+(x) = \sum_{i=1}^n c_i^+ f_i^+(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x), \quad (13)$$

а условия стационарности представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_i} \mathcal{J} \left(\sum c_i^+ f_i^+, \sum c_i f_i \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial c_i^+} \mathcal{J} \left(\sum c_i^+ f_i^+, \sum c_i f_i \right) &= 0. \end{aligned}$$

Подстановкой (13) приводим их к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^n L_{ik} c_i^+ = J_k, \quad \sum_{i=1}^n L_{ki} c_i = J_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где $L_{ij} = L_{ij}(L) = (f_i^+, Lf_j)$. Решая систему (14), подставляя результат в аппроксимации (13) и заменяя ими точные функции f^+ и f в вариационном функционале (4), получаем приближённое (интерполяционное) значение искомого функционала

$$\tilde{J} = \mathcal{J} \left(\sum_{i=1}^n c_i^+ f_i^+(\cdot), \sum_{i=1}^n c_i f_i(\cdot) \right).$$

Билинейная форма – не единственная форма представления стационарного функционала. В ряде случаев предпочтительней оказывается дробно-линейная форма [7]

$$J = (f^+, s)(w, f) / (f^+, Lf),$$

которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. Представляя входящие в нее f и f^+ в виде линейных комбинаций опорных решений

$$f = \sum_i c_i f_i, \quad f^+ = \sum_i c_i^+ f_i^+.$$

В результате получим

$$J = \sum_{ij} c_i^+ c_j J_i J_j / \sum_{kl} c_k^+ c_l L_{kl}, \quad (15)$$

где $J_i = (f_i^+, s) = (w, f_i)$, $L_{kl} = (f_k^+, Lf_l)$.

Из условия стационарности, принимающего в этом случае вид

$$\partial J / \partial c_n^+ = \partial J / \partial c_n = 0,$$

вытекают уравнения для постоянных коэффициентов c_i^+ и c_j :

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_j L_{in}] = 0,$$

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_i L_{nj}] = 0.$$

3. Случай двух опорных операторов

Рассмотрим подробнее простейший случай, когда число опорных задач n равно двум. В этом случае

$$c_1^+ / c_2^+ = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{21}) / (J_1 L_{12} - J_2 L_{11}),$$

$$c_1 / c_2 = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{12}) / (J_1 L_{21} - J_2 L_{11}).$$

Для вычисления входящих сюда матричных элементов оператора L удобно ввести обозначение $V_i = L - L_i$ и воспользоваться билинейностью скалярных произведений, свойством сопряжённости операторов (5) и уравнениями (1)–(4). В частности,

$$L_{11} = (f_1^+, Lf_1) = (f_1^+, (L_i + V_i)f_1) = (f_1^+, L_i f_1) + (f_1^+, V_i f_1) = (f_1^+, L_i f_1) + (f_1^+, V_i f_1),$$

где i мы вольны выбрать по своему усмотрению. Очевидно, выбор $i = 1$ упрощает первое слагаемое $(L_i)_{11} \equiv (f_1^+, L_i f_1)$, превращая его в $(f_1^+, L_1 f_1) = (f_1^+, s) = J_1$.

Следуя этим путём, приходим к общей формуле

$$(L_i)_{kl} = \begin{cases} J_k, & \text{если } i = l, \\ J_l, & \text{если } i = k, \end{cases}$$

приводящей к следующим выражениям для матричных элементов:

$$L_{11} = J_1 + (V_1)_{11},$$

$$L_{12} = J_1 + (V_2)_{12},$$

$$L_{21} = J_2 + (V_1)_{21},$$

$$L_{22} = J_2 + (V_2)_{22}.$$

В итоге, для отношений коэффициентов (от которых только и зависит результат) получаем выражения

$$\begin{aligned} c_1^+/c_2^+ &= -\frac{(J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{21})}{(J_1(V_1)_{12} - J_2(V_1)_{11})}, \\ c_1/c_2 &= -\frac{(J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{12})}{(J_1(V_1)_{21} - J_2(V_1)_{11})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив эти выражения в вытекающую из (15) формулу

$$J = \frac{c_1^+ c_1 J_1 J_1 + c_1^+ c_2 J_1 J_2 + c_2^+ c_1 J_2 J_1 + c_1^+ c_2 J_2 J_2}{c_1^+ c_1 L_{11} + c_1^+ c_2 L_{12} + c_2^+ c_1 L_{21} + c_1^+ c_2 L_{22}}.$$

и обозначив $c_2/c_1 = \varepsilon$ и $c_2^+/c_1^+ = \varepsilon^+$, приходим к окончательному результату в виде

$$J = \frac{J_1^2 + J_2^2 + (\varepsilon + \varepsilon^+) J_1 J_2}{J_1 + (V_1)_{11} + J_2 + (V_2)_{22} + [\varepsilon(J_1 + (V_2)_{12} + \varepsilon^+(J_2 + (V_1)_{21}))]}.$$

Отметим, что для совпадения коэффициентов c_i^+ и c_i достаточно, чтобы матричные элементы (V_1) и (V_2) были симметричными $((V_i)_{kl} = (V_i)_{lk})$.

Подчеркнем три важные особенности предложенного алгоритма. Во-первых, он реализует в определенном смысле идею интерполяции решения по двум (в общем случае нескольким) известным решениям в области \mathcal{L} , тогда как обычная теория возмущений носит скорее характер экстраполяции (зная решение в одной «точке» L_0 , мы пытаемся распространить его на область \mathcal{L}). Во-вторых, найденное нами решение не только совпадает с $J_1(J_2)$ при $L = L_1(L_2)$, но в окрестностях этих операторов совпадает с результатами теории малых возмущений, построенной около $L_1(L_2)$. Действительно, устремляя V_1 к нулю, получим $\varepsilon^+ \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, в результате чего приходим к формуле малых возмущений

$$J \approx \frac{J_1^2 + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_1 J_2}{J_1 + (V_1)_{11} + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_2} \approx J_1 - (V_1)_{11}.$$

В-третьих, вычисление входящих в окончательный результат матричных элементов $(V_i)_{kl}$ по сложности расчетов эквивалентно вычислениям в теории малых возмущений, значительно более простым, чем во втором приближении этой теории.

Рассмотрим применение предлагаемого метода к решению простейших задач в четырёх процессах – оптическом, волновом, диффузионном и кинетическом, управляемых соответственно ОДУ первого порядка, параболическим уравнением в частных производных, ОДУ второго порядка и интегральными уравнениями.

4. Дифференциальное уравнение первого порядка (оптическая модель)

Простейшей задачей в этом классе является задача о прохождении частиц (фотонов, нейтронов) через однородный слой толщиной t без рассеяния. Частицы движутся в положительном направлении оси z , падая на левую границу слоя $z = 0$ и выходя через правую $z = t$, на которой расположен детектор, измеряющий число (поток) выходящих частиц J . Число это зависит от произведения толщины слоя на коэффициент ослабления σ , называемого оптической толщиной слоя (если речь идёт о фотонах). Если толщину, принять, например, равной 1, то останется только зависимость от коэффициента ослабления σ , которая имеет известный вид

$$J(\sigma) = e^{-\sigma}.$$

Предположим теперь, что функция $J(\sigma)$ нам не известна, а точнее, её значения известны, скажем, в двух точках σ_1, σ_2 и равны, соответственно, J_1 и J_2 . Определение по этим данным значений функции $J(\sigma)$ в этом промежутке является простейшей задачей интерполяции и в отсутствие иной информации решается линейным алгоритмом

$$\tilde{J}(\sigma) = J_1 + \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(J_2 - J_1), \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2.$$

Разумеется, вовлечение в процесс новой информации о функции $J(\sigma)$ (например, её значений или значений её производных в других точках) позволяет уточнить алгоритм. Мы здесь тоже привлечём дополнительную информацию, но в несколько иной форме: *будем считать, что J есть линейный функционал от решения $f(z)$ уравнения*

$$L(\sigma)f(z) \equiv \frac{df}{dz} + \sigma f = s(z),$$

имеющий вид

$$J = (w, f) = \int_0^1 w(z)f(z)dz.$$

В соответствии с рассматриваемым процессом

$$s(z) = \delta(z), \quad w(z) = \delta(z - 1).$$

Назовем задачу аппроксимации функционала J как функции параметра σ на отрезке $[\sigma_1, \sigma_2]$ по значениям на его концах *при поставленных условиях задачей А* и продемонстрируем применение ВИ-метода для её решения. Основная и сопряженная функции в этой задаче имеют вид

$$f(z) = e^{-\sigma z}, \quad f^+(z) = e^{-\sigma(1-z)}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Зависящие от параметра σ опорные операторы удобно выбрать соответствующими граничным точкам рассматриваемого отрезка, длину которого $\sigma_2 - \sigma_1$ обозначим через $2a$, а центральную

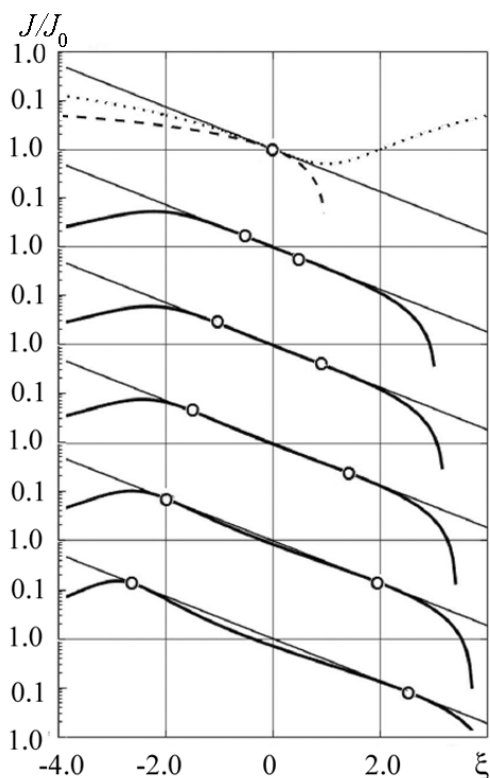


Рис. 1. К задаче А. Тонкие сплошные линии – точное решение; штриховые – первое приближение теории возмущений, точки – второе приближение; жирные линии – результаты ВИ-метода, соответствующие значениям $a=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ (сверху вниз); кружочки – значения в опорных точках

Fig. 1. To problem A. Thin solid lines show exact solution, bold solid curves – VI-solutions, dashed line shows the first approximation of the perturbation theory, dotted line relates to second one, open circles are reference cases

точку – через σ_0 . Введя переменную $\xi = \sigma - \sigma_0 \in (-a, +a)$, выразим через неё матричные элементы ВИ-метода:

$$(V_1)_{11} = (\xi + a)J_1, \quad (V_2)_{22} = (\xi - a)J_2,$$

$$(V_1)_{21} = \frac{(\xi + a)}{2a}(J_1 - J_2),$$

$$(V_2)_{12} = \frac{(\xi - a)}{2a}(J_1 - J_2), \quad J_1 = e^a J_0,$$

$$J_2 = e^{-a} J_0, \quad J_0 = e^{-\sigma_0}.$$

Отсюда

$$c_1^+ = c_1 = (\xi - a)[2a - 1 + e^{-2a}],$$

$$c_2^+ = c_2 = (\xi + a)[2a + 1 - e^{2a}].$$

Результаты расчета для $0.5 \leq a \leq 2.5$ приведены на рис. 1. Видно, что вариационный метод позволяет существенно расширить область воспроизведения результата (по сравнению с теорией возмущений): при $a = 1.5$ хорошо вычисляются вариации функционала на порядок в обе стороны, тогда как теория малых возмущений удовлетворительно описывает лишь 10–20-процентные изменения функционала. При больших a ВИ-представление начинает заметно «провисать» в центральной области, фактически приводя к разрыву области приемлемой точности описания решения.

5. Уравнение в частных производных параболического типа (волновая модель)

Рассмотрим применение рассматриваемого метода на модельной задаче, описываемой параболическим уравнением для амплитуды волны электромагнитного излучения [8]. Речь идёт о распространении волн в случайно-неоднородной среде с размерами неоднородностей диэлектрической проницаемости l_ϵ , многократно превышающими длины волн λ . Рассеянные волны в этом случае концентрируются в узком тесном угле с раствором порядка $\lambda/l_\epsilon \ll 1$, то есть практически в том же направлении, что и первичная волна. Пусть такая среда занимает полупространство $z > 0$ и на него падает плоская волна $u = u_0 \exp(ikz)$. В указанных условиях отражённая волна слаба по сравнению с нерассеянной, идущей в начальном направлении. Последнюю представляю в виде

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, z) \exp(ikz), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Здесь $f(\mathbf{x}, z)$ – амплитуда волны (вообще говоря, комплексная). Подстановка (при указанных условиях) этого выражения в скалярное уравнение Гельмгольца приводит к уравнению

$$2ik \frac{\partial f}{\partial z} + \Delta_\perp f(\mathbf{x}, z) + k^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, z) f = 0, \quad (17)$$

где $k^2 = (\omega/c)^2 \bar{\epsilon}$ – квадрат среднего волнового числа (предполагаем, что $\bar{\epsilon} = \text{const}$), $\tilde{\epsilon} = [\epsilon(\mathbf{r}) - \bar{\epsilon}] / \bar{\epsilon}$ – относительная величина флуктуаций диэлектрической проницаемости, так что $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$.

Практически представляет интерес ситуация, когда нельзя пренебречь и дифракционными процессами и поглощением. Для удобства представления дальнейших результатов введем обозначение $2ik\beta(\mathbf{x}, z) \equiv k^2 \tilde{\epsilon}$.

В том случае, когда $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, z)$ не зависит от поперечной координаты, модуль которой обозначим как ρ , уравнение (17) при граничном условии

$$f(0, \rho) = [2\pi\sigma^2]^{-1} \exp(-\rho^2/2\sigma^2)$$

имеет аналитическое решение

$$f(z, \rho) = [2\pi(\sigma^2 + iz/k)]^{-1} \exp\{-\rho^2/2(\sigma^2 + iz/k)\} \exp\left\{\int_0^z \beta(z') dz'\right\}. \quad (18)$$

Задача В. Пусть нам требуется определить амплитуду поля излучения на плоскости $z = t$. В этом случае $w(z) = \delta(z-t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ и $J = f(t, \rho_0)$. Введенный выше коэффициент β положим равным

$$\beta(\rho, z) = (5 - 4 \exp(-\rho^2/2\sigma^2))k^{-1}.$$

В том случае, когда $\sigma|d\beta/d\rho|z \ll 1$, можно воспользоваться теорией малых возмущений. В качестве опорного решения выберем решение уравнения (17) при $\beta = \beta_1 = \text{const}$. Сопряженная функция опорного решения имеет вид

$$f^+(z, \rho) = [2\pi i(t-z)/k]^{-1} \exp\{-k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2i(t-z)\} \exp\left\{-\int_z^t \beta(z') dz'\right\}. \quad (19)$$

При $\Delta\beta t \geq 1$ теория малых возмущений неприменима. Обратимся к методу вариационного интерполирования. Выберем два опорных решения с $\beta_2 = 1/k$ и $\beta_1 = 5/k$. В этом случае $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$. Для вычисления амплитуды волны f с заданным β воспользуемся полученными ранее соотношениями (15), (16) и опорными решениями (18) и (19). При вычислении матричных элементов $(V_i)_{kl}$ возникает необходимость численного интегрирования по переменной z . На рис. 2 приведены результаты расчетов ВИ-методом в сравнении с решением уравне-

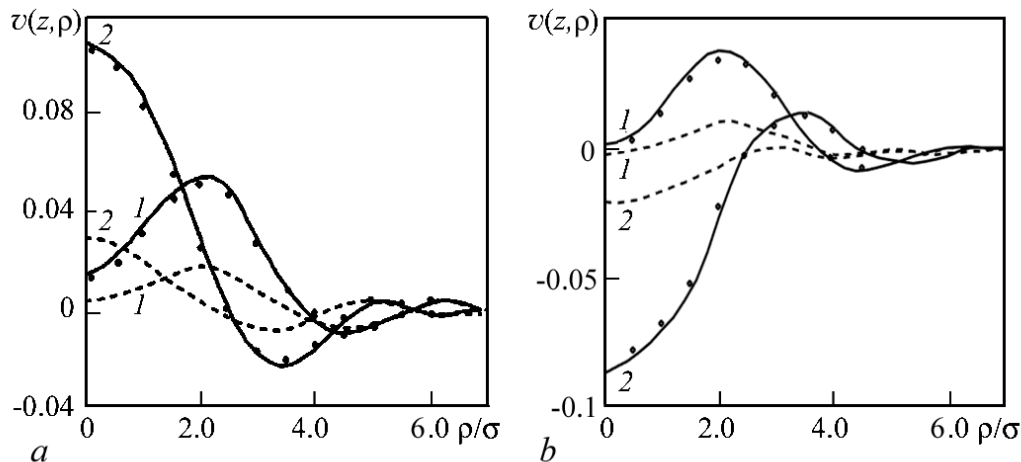


Рис. 2. К задаче В. 1 – $\text{Re } f$, 2 – $\text{Im } f$; сплошные кривые – точные решения разностным методом, точки – результаты ВИ-метода, штриховые – первое приближение теории возмущений; а – $\Delta\beta t = 2.8$; б – $\Delta\beta t = 3.2$

Fig. 2. To problem B. Indices correspond to $\text{Re } f$ 1 and $\text{Im } f$ 2, solid lines correspond to exact solutions, dots – VI-results, dashed lines – to first-order PT results; а – relates to case $\Delta\beta t = 2.8$, б – to case $\Delta\beta t = 3.2$

ния (17) разностным методом с относительной погрешностью менее 0.003. Отметим, что для выбранных глубин опорные решения отличаются более чем на порядок, и, как и предполагалось ранее, теория малых возмущений не описывает выбранное изменение функции $f(z, \rho)$. Данные же вариационного метода интерполирования практически совпадают с решением уравнения (17) разностным методом.

6. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (диффузионная модель)

Обратимся теперь к процессу одномерной стационарной диффузии (назовем её **задачей С**), описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

В слое $(-1, 1)$ бесконечной однородной среды с коэффициентом поглощения диффундирующих частиц σ и коэффициентом диффузии λ равномерно распределён стационарный источник с плотностью $s = 1/2$ (рис. 3). Требуется найти усреднённую по области источника концентрацию диффундирующих частиц. Процесс описывается уравнением диффузии

$$-\lambda f''(x) + \sigma f(x) = s(x), \quad s(x) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

функция Грина которого имеет вид

$$g(x, x') = \frac{1}{2\sqrt{\sigma\lambda}} e^{-\sqrt{\sigma/\lambda}|x-x'|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

позволяющий представить основную и сопряжённую функции задачи в аналитическом виде

$$f(x) = f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} [1 - e^{-\sqrt{\sigma/\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma/\lambda} x)}], & |x| < 1; \\ \frac{1}{2\sigma} e^{-\sqrt{\sigma/\lambda} |x|} \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma/\lambda}), & |x| > 1. \end{cases} \quad (20)$$

Искомый функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{4\sigma} [2 - \sqrt{\lambda/\sigma} (1 - e^{-2\sqrt{\sigma/\lambda}})]. \quad (21)$$

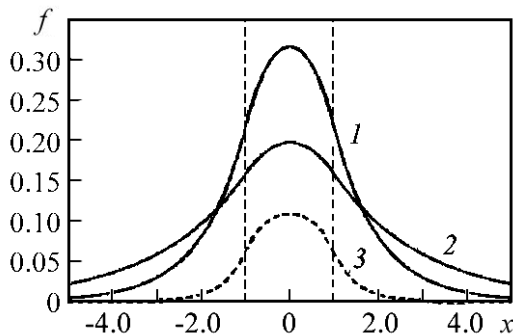


Рис. 3. К задаче С. Основная и сопряжённая (здесь они совпадают) функции (20): 1 – ($\sigma = 1, \lambda = 1$), 2 – ($\sigma = 1, \lambda = 2$), 3 – ($\sigma = 2, \lambda = 1$). Точные значения искомого функционала $J = J(\sigma, \lambda)$ определяются формулой (21)

Fig. 3. To problem C. Curves show the basic and adjoint functions (20) (here its coincide): 1 – ($\sigma = 1, \lambda = 1$), 2 – ($\sigma = 1, \lambda = 2$), 3 – ($\sigma = 2, \lambda = 1$). Exact values $J = J(\sigma, \lambda)$ are defined by the formula (21)

Чтобы установить погрешность вариационной интерполяции в данной задаче, представим $f(x)$ в экспоненциальной форме

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma} \left(e^{(|x|+1)\sqrt{\sigma/\lambda}} - e^{(|x|-1)\sqrt{\sigma/\lambda}} \right), & |x| \geq 1, \\ \frac{1}{4\sigma} \left(2 - e^{-(|x|+1)\sqrt{\sigma/\lambda}} - e^{(|x|-1)\sqrt{\sigma/\lambda}} \right), & |x| < 1, \end{cases}$$

найдем отношение f'' к f

$$\frac{f''}{f} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\lambda}, & |x| \geq 1, \\ \frac{\sigma}{\lambda} - \frac{2\sigma}{f\lambda}, & |x| < 1, \end{cases}$$

и воспользуемся им для вычисления матричного элемента

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (f_i, L f_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i L f_j dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_i \left(-\lambda \frac{d^2}{dx^2} + \sigma \right) f_j dx = \\ &= \left(\sigma - \lambda \frac{\sigma_j}{\lambda_j} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f_i f_j dx + \frac{\lambda}{\lambda_j} \int_{-1}^1 f_i dx = \left(\sigma - \lambda \frac{\sigma_j}{\lambda_j} \right) J_{ij} + \frac{\lambda}{\lambda_j} J_i, \end{aligned}$$

где

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda_i J_i - \lambda_j J_j}{\lambda_i \sigma_j - \lambda_j \sigma_i}, & i \neq j, \\ \frac{3 J_i}{2 \sigma_i} - \frac{1 - e^{-2\sqrt{\sigma_i/\lambda_i}}}{4 \sigma_i}, & i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матричный элемент L_{ij} принимает вид

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (\sigma_i J_{ij} + J_i) \lambda / \lambda_j + \sigma J_{ij}, \\ J_{ij} &= \begin{cases} \frac{\lambda_i J_i - \lambda_j J_j}{\lambda_i \sigma_j - \lambda_j \sigma_i}, & i \neq j, \\ \frac{3 J_i}{2 \sigma_i} - \frac{1 - e^{-2\sqrt{\sigma_i/\lambda_i}}}{4 \sigma_i}, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Линейная зависимость матричных элементов L_{ij} от σ и λ приводит к дробно-полиномиальной форме представления зависимости искомого функционала от σ и λ , что обычно позволяет получить лучшую точность, чем аппроксимация степенным рядом. Например, в рассматриваемом случае вдоль линии $\sigma/\lambda = \text{const}$ достаточно одной опорной точки, чтобы выражение J_i^2/L_{11} точно соответствовало искомому функционалу.

На рис. 4 представлена топограмма интерполяционной погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае применения двух опорных операторов с несовпадающими параметрами ($\sigma = 5, \lambda = 1$) и ($\sigma = 1, \lambda = 5$). В некоторой окрестности

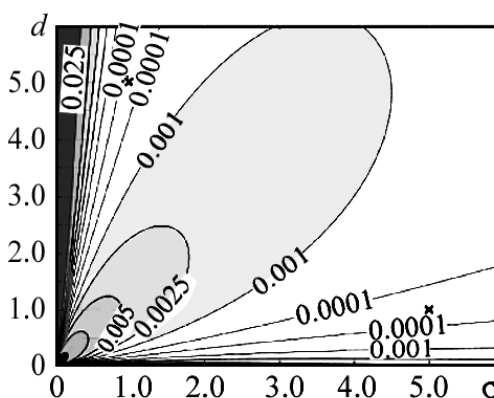


Рис. 4. Линии одинаковой погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае двух опорных точек $\sigma = 5, \lambda = 1$ и $\sigma = 1, \lambda = 5$ (отмечены крестиками)

Fig. 4. Iso-error curves in case of two reference points $\sigma = 5, \lambda = 1$ and $\sigma = 1, \lambda = 5$ (marked with small crosses)

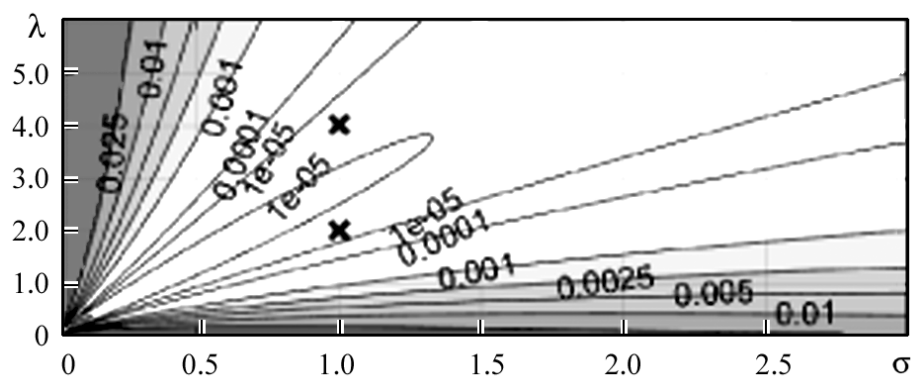


Рис. 5. Линии одинаковой погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае двух опорных точек $\sigma = 1, \lambda = 2$ и $\sigma = 1, \lambda = 4$ (отмечены крестиками)

Fig. 5. Iso-error curves in the case of two reference points $\sigma = 1, \lambda = 2$ and $\sigma = 1, \lambda = 4$ (marked with crosses)

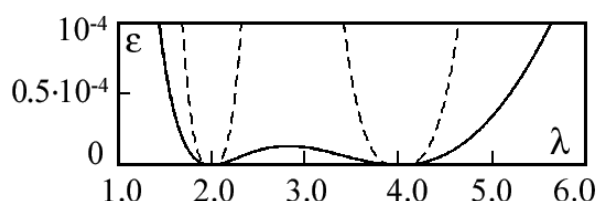


Рис. 6. Погрешность интерполяции $\varepsilon = \tilde{J} - J$ для опорных точек $(\sigma = 1, \lambda = 2)$ и $(\sigma = 1, \lambda = 4)$ вдоль оси λ при $\sigma = 1$. Штриховой линией показана погрешность второго приближения теории возмущений

Fig. 6. Same for reference points $(\sigma = 1, \lambda = 2)$ and $(\sigma = 1, \lambda = 4)$. Dashed curve represent the error of 2nd approximation of perturbation theory

прямых, проходящих через начало координат и опорные точки, аппроксимация оказывается очень точной. Наибольшая погрешность наблюдается, когда хотя бы одна из координат стремится к 0, а также в области между опорными точками. На двух следующих рисунках (рис. 5 и 6) приведены результаты расчёта погрешности в случае однопараметрической интерполяции, когда один из параметров двухпараметрической модели совпадает.

7. Интегральное уравнение Вольтерры (кинетическая модель)

В основе кинетической модели физических процессов переноса лежит концепция столкновений, в рамках которой влияние сближающихся друг с другом микрочастиц (атомов, ионов, фотонов и электронов) проявляется в мгновенном скачкообразном изменении их импульсов, описываемом интегральным членом кинетических уравнений. Простейшим примером такого типа является стационарная задача о *равновесном энергетическом спектре* частиц¹ с заданной индикатрисой рассеяния в однородной безграничной среде [10]. Единственной характеристикой частицы является здесь её энергия E , а дифференциальный энергетический спектр их $f(E)$ определяется спектром источника $s(E)$ с максимальной энергией E_0 , сечением взаимодействия $\sigma(E)$ и индикатрисой рассеяния $K(E, E')$. Последняя равна плотности вероятности иметь рассеянной частице энергию E при условии, что до рассеяния она имела энергию E' ($E < E'$). Три этих функции связаны уравнением баланса, имеющего в данном случае вид интегрального

¹Не очень точный, хотя и популярный термин. Правильнее звучит *задача о деградации энергии*, потому что в строгом (термодинамическом) смысле никакого равновесия здесь нет.

уравнения Вольтерры второго рода:

$$Lf(E) \equiv \sigma(E)f(E) - \int_E^{E_0} \sigma(E')K(E', E)f(E')dE' = s(E). \quad (22)$$

Если при этом искомая величина представляется в виде

$$J = \int_0^{E_0} w(E)f(E)dE = (w, f),$$

то её можно выразить через сопряжённую функцию $f^+(E)$,

$$J = \int_0^{E_0} f^+(E)s(E)dE = (f^+, s),$$

удовлетворяющую уравнению

$$L^+f(E) \equiv \sigma(E)f^+(E) - \sigma(E) \int_{E_1}^E K(E, E')f^+(E')dE',$$

где E_1 пороговая энергия детектора, то-есть, энергия частиц, ниже которой он на них уже не реагирует. При $\sigma(E) = 1$, $K(E', E) = \alpha(E/E')^{\alpha-2}/E'$ и $s(E) = \delta(E - E_0)$ уравнения для $f(E)$ и $f^+(E)$ имеют простые аналитические решения, получаемые при помощи преобразования Меллина:

$$f(E) = \alpha E_0/E^2 + \delta(E - E_0). \quad (23)$$

Пусть детектор выполняет спектральные измерения, то-есть, измеряет поток частиц с энергией, скажем, E_1 . При такой постановке задачи функция отклика детектора $w(E) = \delta(E - E_1)$, функционал $J = f(E_1)$, а сопряженная функция $f^+(E)$ удовлетворяет уравнению

$$f^+(E) - \int_{E_1}^E K(E, E')f^+(E')dE' = \delta(E - E_1),$$

решение которого

$$f^+(E) = \alpha E/E_1^2 + \delta(E - E_1), \quad E \geq E_1. \quad (24)$$

Соответственно, выражение для функционала (при $E_0 \neq E_1$) имеет вид:

$$J = (f, w) = (f^+, s) = \alpha E_0/E_1^2. \quad (25)$$

Полагая в выражениях (23)–(25) $\alpha = \alpha_i$, получим набор опорных решений. Для возмущенной задачи в уравнении (22) полагаем $\sigma(E)$ и $\alpha \neq \alpha_j$:

$$\sigma(E)f(E) - \int_E^{E_0} \sigma(E')K(E', E)f(E')dE' = s(E). \quad (26)$$

Если положить $\sigma(E) = \sigma_0(E/E_0)^\beta$, то решение данного уравнения получается из (23) простым делением на $\sigma(E)$:

$$f(E) = \frac{1}{\sigma_0} \left[\frac{\alpha}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\beta+1} + \delta(E - E_0) \right],$$

которой соответствует значение функционала при $E_1 < E_0$

$$J = \frac{\alpha}{\sigma_0} \left(\frac{E_0}{E_1} \right)^{1+\beta} \frac{1}{E_1}. \quad (27)$$

Вычислим матричные элементы L_{ij} для оператора L , соответствующего уравнению (26).

$$L_{ij} = \sigma_0(E_0/E_1)^{1-\beta} \left[\alpha_j(\alpha_i - \beta) - (E_0/E_1)^{\beta-\alpha} ((\alpha - \alpha_j)(\alpha - \alpha_i) - \beta(\alpha - \alpha_i)) \right] / ((\alpha - \beta)E_1). \quad (28)$$

Полагая в (25) $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ и решая систему двух линейных уравнений для для коэффициентов c_j с использованием приведённых выше матричных элементов, получим:

$$c_1 = ((\alpha - \alpha_2 - \beta)(E_0/E_1)^\beta + \beta\alpha_2(E_0/E_1)^\alpha) / (\sigma_0 E_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha - \beta))$$

$$c_2 = -((\alpha - \alpha_1 - \beta)(E_0/E_1)^\beta + \alpha_1\beta(E_0/E_1)^\alpha) / (\sigma_0 E_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha - \beta)).$$

Используя данные выражения для коэффициентов c_1 и c_2 совместно с опорными значениями функционала (25), получим ВИ-представление возмущенной задачи:

$$\tilde{J} = c_1 J_1 + c_2 J_2 = \frac{\alpha}{\sigma_0} \frac{E_0}{E_1^2} (E_0/E_1)^\beta.$$

ВИ-представление, приближённое по своему характеру и лежащим в его основе положениям, полностью совпадает с точным решением (27)! Впрочем, полученный результат ожидаем. Несмотря на то, что варьируемые параметры α , β и σ_0 нелинейно входят в оператор L , зависимость искомого функционала от α и $\sigma(E)$ представима в виде дроби. Такие зависимости при помощи ВИ-представления описываются точно, что и подтверждает рассмотренный пример.

Заключение

В работе продемонстрировано применение метода вариационного интерполирования к нескольким задачам переноса частиц и излучений. Несмотря на существенно различающиеся виды функционального поведения решений, применение метода вариационного интерполирования позволило описать с приемлемой точностью область значений функционалов, соответствующую его изменениям на порядки. Это однозначно показывает его преимущество перед первым приближением классической теории возмущений при сравнимых вычислительных затратах.

В том случае, когда оператор «возмущенной» задачи отличается от опорных операторов лишь численными значениями некоторого набора параметров, вариационное представление является функцией этих параметров. Такое представление сводит задачу определения значений этих параметров к решению системы алгебраических уравнений.

Точная оценка погрешностей рассматриваемого метода требует дополнительных исследований, особенно когда «возмущенный» оператор отличается от опорных функциональным видом. В том случае, когда оператор L допускает параметризацию, вопрос оценки погрешности

ВИ-представления сводится к оценке точности дробно-полиномиальной аппроксимации многомерных функций [9]. Дробно-полиномиальная аппроксимация широко применяется в вычислительной технике, как средство, позволяющее получить большую точность при малых временных затратах.

В то же время относительная простота метода вариационного интерполирования и полученные в работе результаты позволяют надеяться получать достаточную точность в широкой области изменения варьируемого параметра, соответствующего изменению изучаемого функционала в несколько раз. Данное заключение основывается на возможности при помощи вариационного интерполирования точно представлять и нелинейные зависимости, о чем свидетельствует два последних рассмотренных примера.

На данном этапе исследований авторы не могут предложить универсального способа оптимального выбора опорных задач как и прогнозирования оценки точности метода вариационного интерполирования. Целью этой статьи было обратить внимание на позитивные стороны предлагаемого метода, его оригинальность и тесную неформальную связь с динамикой процесса, обусловленную использованием описывающих процесс уравнений.

Библиографический список

1. Snider R., Trampert J. Inverse problems in geophysics // In Wavefield Inversion (ed. A. Wirgin), Springer-Verlag Wien, 1999.
2. Марчук Г.И., Дробышев Ю.П. Некоторые вопросы линейной теории измерений. Автометрия. 1977, № 3. С. 24–30.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
4. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 335 с.
5. Учайкин В.В., Лагутин А.А. Стохастическая ценность. М.: Энергоатомиздат, 1993.
6. Учайкин В.В. Метод вариационного интерполирования в ядерно-технических расчётах // Атомная энергия. 1989. Т. 61, № 1. С. 54–55.
7. Марчук Г.И., Орлов В.В. К теории сопряжённых функций, Сб. Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. 30–45.
8. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. М.: Наука, 1978.
9. Петрак Л.В. Дробно-рациональная аппроксимация функций и приложения: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2004. 123 с.
10. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. Moscow, Атомиздат, 1978. 256 с.

References

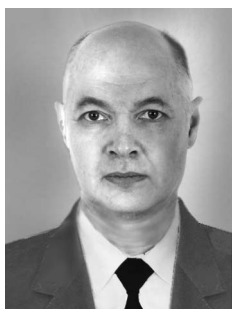
1. Snider R., Trampert J. Inverse Problems in Geophysics. In Wavefield Inversion (ed. A. Wirgin), Springer-Verlag Wien, 1999.
2. Marchuk G.I., Drobishev I.P. Some issues of the linear measurement theory. Moscow, Avtometrija, 1977, no. 3, pp. 24–30 (in Russian).
3. Marchuk G.I. Methods of Computational Mathematics. Moscow, Fizmatlit, Nauka, 1977 (in Russian).
4. Marchuk G.I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Moscow, Nauka, 1992 (in Russian).

5. Uchaikin V.V., Lagutin A.A. Stochastic Importance. Moscow, Energoatomizdat, 1993 (in Russian).
6. Uchaikin V.V. Method of variational interpolation in nuclear technical calculations. *Atomic Energy*, 1989, vol. 61, no. 1, pp. 54–55 (in Russian).
7. Marchuk G.I., Orlov V.V. On the theory of conjugate functions. Sb. Neutron physics. Moscow, Gosatomizdat, 1961, 30–45 (in Russian).
8. Rytov S.M., Kravtsov Yu.A., Tatarsky V.I. Introduction into Statistical Radiophysics. Part 2. Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
9. Petrak L.V. Fractional-rational Approximation of Functions and Applications. Ekaterinburg, 2004. 123 p. (in Russian).
10. Kolchuzhkin A.M., Uchaikin V.V., Introduction into Theory of Particle Propagation through the Matter. Moscow, Atomizdat, 1978 (in Russian).



Учайкин Владимир Васильевич – родился в Барнауле (1941), окончил Томский политехнический институт (1964). Защитил кандидатскую диссертацию (НИИ АР, Мелекес, 1969) и докторскую диссертацию (Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО АН СССР, 1989). Автор (соавтор) более 400 научных работ, в числе которых 7 монографий, опубликованных крупнейшими зарубежными научными издательствами (Springer, World Scientific и др.), учебного пособия с грифом Минвуза и уникального учебника по механике с грифом УМО России, статей по проблемам науки и образования, научно-популярных статей. Заслуженный работник высшей школы (2002). Заслуженный деятель науки и техники Ульяновской области (2013). Ветеран труда. Почетный гражданин Ульяновской области.

Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
 Ульяновский государственный университет
 E-mail: vuchaikin@gmail.com



Литвинов Владимир Андреевич – родился в Павловске Алтайского края (1957). Окончил физический факультет Алтайского государственного университета (1979), аспирантуру в Томском политехническом институте и защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984). Преподавал в Алтайском государственном университете, заведовал кафедрой в Барнаульском юридическом институте. Автор (соавтор) более 80 научных работ и такого же количества учебно-методических изданий, среди которых две монографии, два учебных пособия, имеющих гриф Минобрнауки. Среди научных статей работы в области физики космических лучей, геофизики, информационных технологий, педагогики. Ветеран труда, награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством II степени» и рядом ведомственных наград.

Россия, 656038 Барнаул, ул. Чкалова, 49
 Барнаульский юридический институт МВД России
 E-mail: lva201011@yandex.ru