



## ВЛИЯНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИЛЫ

*И. И. Вульфсон*

Исследуется влияние медленных движений на эффективные значения параметров диссипативных сил в уравнениях быстрых движений колебательной системы. Ранее было показано, что диссипативные характеристики, полученные экспериментально при гармонических колебаниях, могут существенно изменяться при полигармоническом возбуждении. В данной статье эта проблема рассматривается более подробно применительно к определению резонансных амплитуд и пороговых условий параметрических и субгармонических резонансов.

*Ключевые слова:* Медленные и быстрые движения, колебания, нелинейные диссипативные силы, динамическая устойчивость, параметрический резонанс, субгармонический резонанс.

### 1. Предварительные замечания

При исследовании нелинейных колебаний широко применяются методы, использующие разделение движений на быстрые и медленные [1–5]. С помощью этих методов удается описать, а иногда и обнаружить ряд существенных динамических эффектов. В частности, взаимовлияние быстрых и медленных движений во многих случаях определяет реальный уровень диссипации в колебательной системе.

Роль диссипативных факторов при формировании колебательных режимов чрезвычайно велика. В частности, от уровня диссипации зависят амплитуда резонансных колебаний, интенсивность затухания свободных колебаний, условия динамической устойчивости при параметрическом возбуждении, возникновение субгармонических режимов, автоколебаний и др. Между тем, учет именно этих сил нередко оказывается наиболее уязвимым местом в динамических исследованиях и инженерных расчетах колебательных систем. Последнее, в первую очередь, связано с тем, что большое число диссипативных факторов, а также сложность и многообразие энергетических потерь при колебаниях существенно затрудняет корректное математическое описание диссипативных сил [6–10]. При этом мы обычно располагаем ограниченной исходной информацией, заимствованной из экспериментальных материалов в форме некоторых интегральных диссипативных характеристик, таких как коэффициент

рассеяния  $\psi$  или логарифмический декремент  $\vartheta$ , которые получены при гармонических колебаниях некоторых эталонных моделей. Однако, «настраивая» для определения этих параметров реальную механическую систему на гармонический режим, мы по существу экспериментальным методом осуществляем гармоническую линеаризацию диссипативных сил. Поэтому полученная таким образом информация о диссипативных свойствах системы является далеко не полной и отражает их лишь в той мере, в какой гармонически линеаризованная диссипативная сила соответствует действительному сопротивлению. Естественно, что при многочастотных колебаниях это соответствие нарушается, причем при определенных условиях – существенным образом.

Аналитическое исследование проблемы учета нелинейных диссипативных сил при многочастотном возмущении основано на предложенной И.И. Блехманом идее разделения движений на быстрые и медленные [4]. При реализации этой идеи возможно несколько подходов. Один подход, разработанный И.И. Блехманом применительно к задачам вибрационной реологии, позволяет определять так называемые вибрационные силы, отражающие влияние высокочастотных составляющих возбуждения на медленные процессы.

Для систем с одной степенью свободы возникающая при колебаниях сила сопротивления независимо от ее природы может быть описана следующим образом:

$$R = - |R(q, \dot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q}, \quad (1)$$

где  $q$  – обобщенная координата.

В одних случаях модуль силы не зависит от обобщенной скорости (позиционные силы трения), в других – модуль силы не зависит от обобщенной координаты («вязкое» трение); в частном случае модуль силы может сохранять постоянное значение («сухое» или кулоново трение). При  $R = -f(q)\dot{q}$  диссипативную силу называют позиционно-вязкой [4].

При другом подходе движение системы рассматривается как совокупность двух движений, а именно, – существенно зависящих от диссипации (например, резонансных) и практически не зависящих от диссипации (например, нерезонансных). Этот подход, базирующийся на методах гармонической или статистической линеаризации, был использован применительно к системам с сухим трением [11] и с позиционными гистерезисными силами сопротивления [12,13].

По характеру влияния диссипативных сил колебательные режимы можно разделить на две группы. К первой группе отнесем режимы, амплитудный уровень которых зависит от диссипации, такие как свободные колебания и вынужденные резонансные колебания; ко второй – режимы, существование которых возможно только при преодолении некоторого энергетического барьера, определяемого диссипацией. Такой эффект, в частности, наблюдается при возбуждении параметрического и субгармонического резонансов, а также в автоколебаниях при жестком возбуждении. При этом «чужие» колебания могут быть как высокочастотными (быстрое движение), так и низкочастотными (медленное движение). Во всех перечисленных случаях возникающие режимы, по существу, можно рассматривать как «свободные» колебания, поддерживаемые внешним источником энергии, компенсирующим работу диссипативных сил.

В статье получили дальнейшее развитие исследования, изложенные в работах [12–17], которые посвящены коррекции диссипативных характеристик при учете сопутствующих медленных или быстрых движений. При этом применительно к рассматриваемой проблеме особое внимание обращено на малоизученное влияние медленных движений на быстрые.

Заметим, что в статье не ставится задача обзора многочисленных библиографических источников, освещающих различные аспекты проблемы рассеяния энергии в элементах механических систем.

## 2. Эквивалентная линеаризация диссипативных сил при гармонических режимах

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{q} + |R(q, \dot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q} + cq = Q(t), \quad (2)$$

где  $m$  – масса,  $c$  – коэффициент жесткости,  $Q(t)$  – вынуждающая сила.

Нелинейность дифференциального уравнения (2) связана только с диссипативной силой (1). Для большинства реальных инженерных задач эта сила обычно играет существенную роль только в качестве диссипативного фактора и пренебрежимо мало влияет на частоту свободных колебаний. Если  $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$ , то при установившихся вынужденных колебаниях  $q = A \sin(\omega t - \gamma)$  абсолютное значение рассеянной за один цикл энергия определяется как

$$\Delta E_- = \int_0^\tau |R\dot{q}| dt = A \int_0^{2\pi} |R(A \sin \varphi, A\omega \cos \varphi) \cos \varphi| d\varphi. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi = \omega t - \gamma$ ,  $\tau = 2\pi/\omega$ . (Здесь и ниже изменение полной энергии за период колебаний представлено как  $\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_-$ , где индексы «+» и «-» отвечают подведенной и рассеянной энергии.)

С другой стороны, для «линейной» силы эквивалентного сопротивления имеем  $R_b = -b\dot{q}$ , при этом  $\Delta E_- = \pi b \omega A^2$ . Тогда при учете (3) баланс рассеянной энергии имеет место при  $b = \Delta E_- / (\pi \omega A^2) = \psi c / (2\pi \omega)$ . Этот результат, естественно, одновременно совпадает с коэффициентом, полученным методом гармонической линеаризации. При кулоновом трении  $R = -P \operatorname{sgn} \dot{q}$  аналогичным способом получаем  $\Delta E_- = 4PA$ ,  $\psi = 8P/(cA)$ ,  $b = 4P/(\pi A \omega)$ . Ниже ограничимся анализом частотонезависимого сопротивления, при котором  $\psi$  не зависит от частоты. Именно этот случай наиболее характерен для конструкционного демпфирования механических систем.

Можно показать, что при некоторых допущениях, используя аналогичный прием применительно к системам со многими степенями свободы, диссипативные силы могут быть представлены следующим образом:  $\mathbf{R} = -\mathbf{b}\dot{\mathbf{q}}$ , где  $\mathbf{b} = (\boldsymbol{\alpha}^T)^{-1} \mathbf{b}^* \boldsymbol{\alpha}^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  – квадратная матрица коэффициентов форм, в которой каждый столбец отвечает фиксированной собственной частоте,  $\mathbf{b}^* = \operatorname{diag}\{b_1^*, \dots, b_H^*\}$ ,  $b_r^* = \psi_r c_r^* / (2\pi \omega)$ ,  $c_r^*$  – элементы диагональной матрицы  $\mathbf{c}^* = (\boldsymbol{\alpha}^T)^{-1} \mathbf{c} \boldsymbol{\alpha}^{-1}$  [17]. По существу, к этому результату сводится и метод Е.С. Сорокина [8]. Следует, однако, иметь в виду, что изложенный выше подход базируется на предположении о гармоническом характере

колебаний и отсутствии диссипативных связей между различными формами колебаний, когда не происходит обусловленная диссипацией перекачка энергии из одной формы в другую.

### 3. Коэффициенты диссипации при бигармонических колебаниях. Резонансные режимы

Принимая в дифференциальном уравнении (2)  $Q(t) = F_1 \sin \Omega t + F_2 \sin \omega t$ ,

$$\ddot{q} + \Lambda(q, \dot{q}) + k^2 q = f_1 \sin \Omega t + f_2 \sin \omega t, \quad (4)$$

где  $\Lambda = R/m$ ,  $k^2 = c/m$ ,  $f_i = F_i/m$ , ( $i = 1, 2$ ).

Пусть  $\Omega = k$ , а  $\omega \ll k$ . В соответствии с приемом разделения «быстрых» и «медленных» движений имеем  $q = q_k + q_\omega$ . Далее вместо (4) запишем

$$\begin{aligned} \ddot{q}_k + \Lambda_k(q, \dot{q}) + k^2 q_k &= f_1 \sin \Omega t, \\ \ddot{q}_\omega + k^2 q_\omega &= f_2 \sin \omega t, \quad q_0 = F_0/c. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\Lambda_k$  – отнесенная к единичной массе диссипативная сила, приведенная к частоте  $k$ .

Первое уравнение, которое определим как модифицированное, связано со вторым только посредством нелинейной диссипативной силы. Во втором уравнении диссипативная составляющая опущена, так как при достаточном удалении от резонансных режимов ее влияние на амплитуду вынужденных колебаний пренебрежимо мало. Решение уравнений (5) имеет вид  $q_k = A \sin(\Omega t - \gamma_1)$ ,  $q_\omega \approx a \sin(\omega t - \gamma_2)$ , где

$$A = \frac{\pi f_1}{\vartheta k^2}, \quad a \approx \frac{f_2}{|k^2 - \omega^2|}. \quad (6)$$

Здесь  $\vartheta$  – эффективное значение логарифмического декремента, подлежащее определению.

Диссипативной составляющей  $\Lambda_k$  соответствует рассеянная за период  $2\pi/k$  энергия  $\Delta E_-^k$ , равная

$$\Delta E_-^k = \int_0^{4A} R dq_k = mA \int_0^{2\pi} |\Lambda(q_\omega + A \sin \varphi)| \cos \varphi \operatorname{sgn}(\dot{q}_\omega + Ak \cos \varphi) d\varphi. \quad (7)$$

При этом

$$\vartheta = -0.5 \ln(1 - \psi) = -0.5 \ln\left(1 - \frac{2\Delta E_-^k}{cA^2}\right) \approx \frac{\Delta E_-^k}{cA^2}. \quad (8)$$

Далее, используя (7), (8) и принимая  $|\Lambda| = [\Lambda_{\max}(q_\omega)][\lambda(A \sin \varphi)]$ , получаем

$$\vartheta = \frac{\Lambda_{\max}(q_\omega)}{k^2 A} \int_0^{2\pi} \lambda(A \sin \varphi) \cos \varphi \operatorname{sgn}(\dot{q}_\omega + Ak \cos \varphi) d\varphi, \quad (9)$$

где  $\lambda = |\Lambda/\Lambda_{\max}|$ . В выражении (9) за знак интеграла вынесены медленно меняющиеся составляющие. Значение  $\Lambda_{\max}$  определяется следующим образом:

$\Lambda_{\max} = 0.25k^2 A \vartheta_0/h$ , где  $h = S/(4\Lambda_{\max}A)$  – коэффициент заполнения петли гистерезиса,  $S$  – площадь петли.

В частном случае при  $\dot{q}_\omega \ll Ak$  согласно (6)–(9) имеем  $\vartheta \approx \vartheta_0$ , где  $\vartheta_0$  – экспериментально определенное значение логарифмического декремента при гармоническом режиме. Используя это предельное значение, окончательно получаем

$$\vartheta = \vartheta_0 \Phi, \quad (10)$$

где

$$\Phi = \frac{\int_0^{2\pi} \lambda(A \sin \varphi) \cos \varphi \operatorname{sgn}(\dot{q}_\omega + Ak \cos \varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \lambda(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi}. \quad (11)$$

Функция  $\Phi$  показывает степень уменьшения логарифмического декремента при бигармонических колебаниях по сравнению с гармоническими.

В таблице полученные результаты конкретизированы для ряда наиболее распространенных форм петель гистерезиса – прямоугольной, эллиптической и треугольной (рессорная характеристика). Дадим некоторые пояснения приведенных в таблице зависимостей на примере анализа прямоугольной петли гистерезиса. В этом случае в формуле (11) следует принять  $h = 1$ ,  $\lambda = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi &= 0.25 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \operatorname{sgn}(a\omega \cos \theta + Ak \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \begin{cases} \sqrt{1 - z^{-2} \cos^2 \theta} & \text{для } z \geq |\cos \theta|, \\ 0 & \text{для } z \leq |\cos \theta|, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где  $z = (\dot{q}_k)_{\max}/(\dot{q}_\omega)_{\max}$ ,  $\theta = \omega t - \gamma_2$ .

Таблица

Диссипативные характеристики бигармонических колебаний при  $\omega \ll k$

$z$	$z \leq 1$	$z \geq 1$
Прямоугольная форма петли гистерезиса $h = 1, \lambda = 1$	$\Phi_k = \frac{E(z) - (1 - z^2)K(z)}{z \arcsin z}$ $\Phi_\omega = \Phi_k (1 - \frac{2}{\pi} \arccos z)$	$\Phi_\omega = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{z}\right)$
Эллиптическая форма петли гистерезиса $h = \pi/4, \lambda =  \cos \varphi $	$\Phi_k = \frac{1}{\arcsin z} \left\{ \arcsin z - \frac{2}{\pi} G_1(z) + \frac{1}{\pi z} \left[ 1 + \frac{z^2 - 1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z} \right] \right\}$ , где $G_1(z) = z \int_0^{\pi/2} \frac{u \cos u}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 u}} du$ $\Phi_\omega = \Phi_k (1 - \frac{2}{\pi} \arccos z)$	$\Phi_k = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{\sqrt{1 - z^2}}{2z(\pi/2 - \arccos z)}$ $\Phi_\omega = \Phi_k (1 - \frac{2}{\pi} \arccos z)$
Треугольная форма петли гистерезиса $h = 0.5, \lambda =  \sin \varphi $	$\Phi_k = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{\sqrt{1 - z^2}}{2z(\pi/2 - \arccos z)}$ $\Phi_\omega = \Phi_k (1 - \frac{2}{\pi} \arccos z)$	$\Phi_\omega = 1 - \frac{1}{2z^2}$

Примечание:  $K(z)$ ,  $E(z)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

При  $z < 1$ , как это следует из зависимостей (10) и (12), на некотором отрезке времени приведенное к частоте  $\Omega = k$  значение логарифмического декремента  $\vartheta$  обращается в нуль. На этих участках колебания с собственной частотой не влияют на знак суммарной скорости  $\dot{q} = \dot{q}_k + \dot{q}_\omega$ ; при этом за период  $2\pi/k$  не происходит замыкание контура петли гистерезиса. На остальных участках приведенное значение логарифмического декремента оказывается функцией  $z$  и  $\theta$ . Произведем усреднение функции  $\Phi$  на этих участках

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \Phi_k(z) &= \frac{1}{\arcsin z} \int_{\arccos z}^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{z^2}} d\theta = \\ &= \frac{1}{z \arcsin z} [E(z) - (1 - z^2)K(z)].\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь  $K(z)$  и  $E(z)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода при модуле  $z$ .

Можно показать, что  $\Phi_k(1) = 2/\pi$ ,  $\Phi_k(0) = \pi/4$ . Поскольку на некоторых участках  $\vartheta = 0$ , амплитуда  $A$  в установившихся режимах будет медленно пульсировать около некоторого среднего значения, возрастая при  $\vartheta = 0$  и убывая при  $\vartheta \neq 0$ . Представляет интерес усредненное значение  $\vartheta_\omega$  за период  $2\pi/\omega$ , отвечающее установившемуся значению резонансной амплитуды  $A$ ,

$$\vartheta_\omega = \vartheta_0 \Phi_\omega, \quad (14)$$

где  $\Phi_\omega = \Phi_k(1 - (2/\pi) \arccos z)$ , индексом  $\omega$  отмечено усреднение на периоде  $2\pi/\omega$ .

При  $z \gg 1$  исчезает зона, в которой  $\Phi = 0$  и  $\vartheta = 0$ . В этом случае

$$\Phi = \Phi_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{z^2}} = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{z}\right).$$

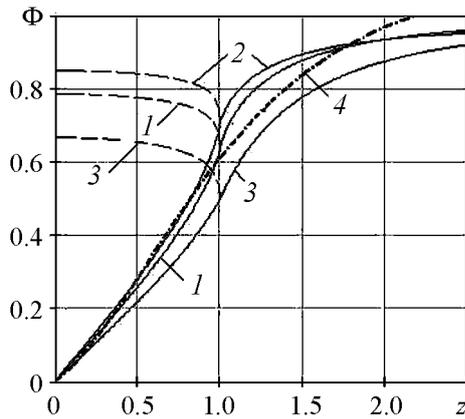


Рис. 1. Графики  $\Phi(z)$  при типовых петлях гистерезиса: 1 – прямоугольная, 2 – эллиптическая, 3 – треугольная (рессорная характеристика); штриховая линия –  $\Phi_k$ , сплошная линия –  $\Phi_\omega$ ; 4 – график, построенный по аппроксимирующей зависимости

Здесь  $E(1/z)$  – полный эллиптический интеграл второго рода при модуле  $1/z$ .

При  $z \rightarrow \infty$  имеем  $\Phi \rightarrow 1$ , следовательно,  $\vartheta_\omega \rightarrow \vartheta_0$ .

Среди наиболее важных реализаций прямоугольной петли гистерезиса следует выделить случаи  $\vartheta_0 = \text{const}$  (петля Корчинского) [10] и сухое трение. В последнем случае

$$P = P_0 \Phi(z). \quad (15)$$

Здесь  $P_0$  – сила сухого трения,  $P$  – эффективное значение этой силы при би-гармонических колебаниях.

На рис. 1 приведены графики  $\Phi_k$  (штриховая линия) и  $\Phi_\omega$  (сплошная линия) для прямоугольной, эллиптической

и треугольной петлей гистерезиса (соответственно кривые 1, 2, 3). Кривая 4 построена по аппроксимирующей зависимости  $\Phi_\omega = z(0.4 + 0.75z)/(1.2 + 0.68z^2)$ , позволяющей производить оценки при отсутствии информации о форме петли гистерезиса. Можно показать, что функция  $\Phi_\omega$  при малых  $z$  близка к линейной. В частности, для прямоугольной петли гистерезиса  $\Phi_\omega \approx 0.5z$ , для эллиптической –  $\Phi_\omega \approx 16z/(3\pi^2)$ , для треугольной –  $\Phi_\omega \approx 3z/(2\pi)$ . В зоне  $\Phi_\omega \ll 1$  эффективные значения диссипативных коэффициентов существенно уменьшаются по сравнению с исходными экспериментальными результатами, полученными при гармоническом режиме.

Снижение диссипации связано с сокращением эффективной площади петли гистерезиса на основной частоте  $\Omega$  из-за колебаний с частотой  $\omega$ . Аналогичный эффект наблюдался и при учете влияния быстрых движений на медленные. На рис. 2 это иллюстрируется графиками  $R(q)$ , полученными при компьютерном моделировании для эллиптической и треугольной петлей гистерезиса [16]. При обратном воздействии – медленных движений на быстрые – исходный контур петли не искажается, однако на каждом периоде  $\tau = 2\pi/\omega$  возникают зоны, на которых, как уже отмечалось, не происходит замыкание контура; при этом  $\Delta E_- = 0$ .

Согласно (6), (14) резонансная амплитуда определяется из следующего уравнения:

$$A = \pi A_* / [\vartheta_0(A) \Phi_\omega(z(A)/v)], \quad (16)$$

где  $A_* = f_1/k^2$  – статическая амплитуда ( $\omega = 0$ ).

Введем в рассмотрение параметры  $A_0$ ,  $\kappa_0 = A_0/A_*$ ,  $z_0 = A_0k/(a\omega)$ , отвечающие гармоническому режиму. При этом уравнение (16) приводится к виду  $\xi \Phi_\omega(z) = 1$ , где  $\xi = A/A_0 = \Phi_\omega^{-1}$ ,  $z = Ak/(a\omega) = \xi(z_0)$ . График функции  $\xi(z_0)$ , устанавливающий рост резонансных амплитуд при бигармонических колебаниях по сравнению с гармоническими, приведен на рис. 3. Как показывает анализ, форма петли гистерезиса пренебрежимо мало влияет на функцию  $\xi(z_0)$ .

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования резонансного режима при  $\vartheta_0 = \text{const}$  для трех вариантов представления функции  $\Lambda(q, \dot{q})$ , пропорциональной нелинейной диссипативной силе (см. (4)).

В первом варианте (кривые 1)  $\Lambda = 2\delta_0 k \dot{q}$ , где  $\delta_0 = \vartheta_0/(2\pi)$ , что соответствует гармонической линейризации диссипативных сил без учета влияния медленного движения.

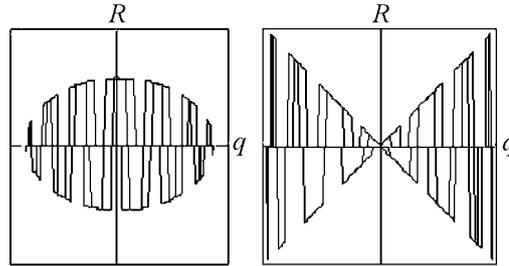


Рис. 2. Искажения петли гистерезиса при  $\omega > k$

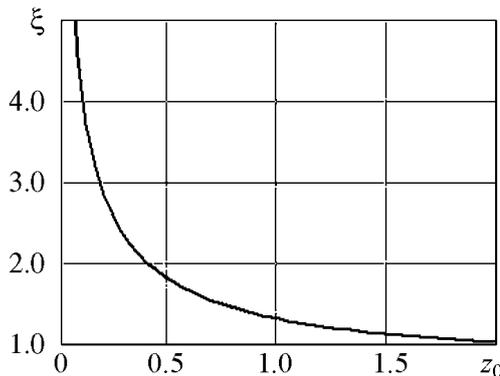


Рис. 3. График  $\xi(z_0)$

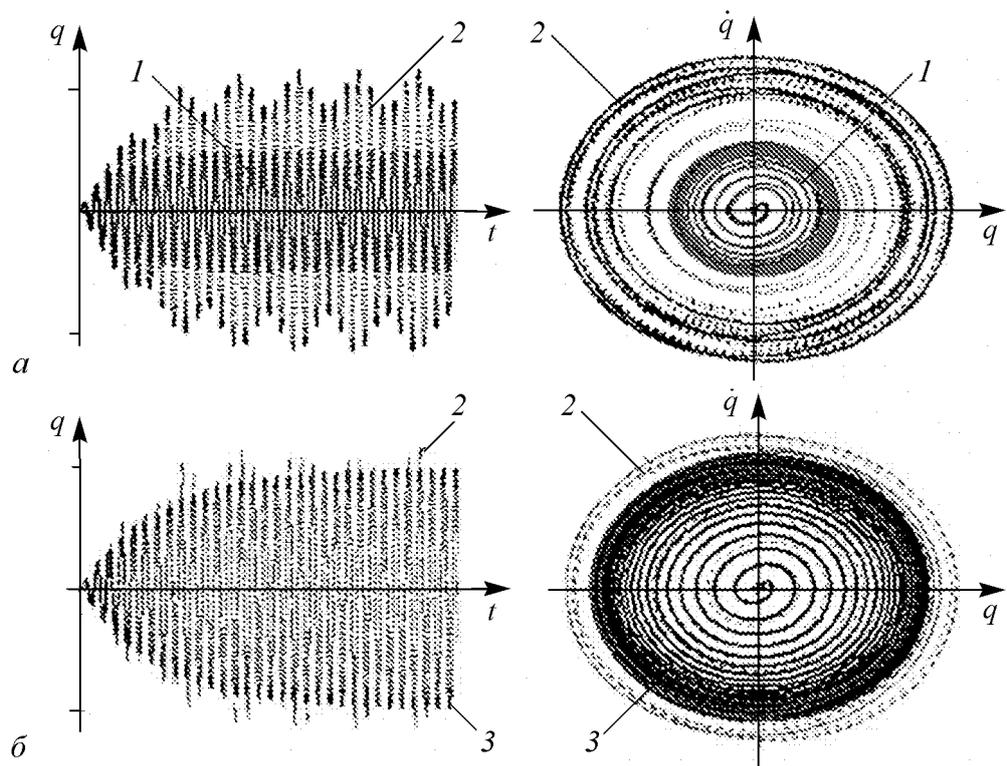


Рис. 4. К анализу влияния медленных движений на резонансную амплитуду: 1 – гармоническая линейаризация (вариант 1); 2 – нелинейное представление диссипативной силы (вариант 2); 3 – коррекция диссипативной силы при разделении быстрых и медленных движений (вариант 3)

Во втором варианте (кривые 2) учтен нелинейный характер диссипации  $\Lambda = 2\delta_0 k \eta (|\dot{q}| - a\omega)$ , где  $\eta$  – единичная функция. Сопоставление результатов численного эксперимента для этих вариантов (рис. 4, а) свидетельствует о примерно двукратном увеличении резонансной амплитуды при нелинейном представлении диссипативной силы. Следовательно, традиционный способ учета нелинейной диссипативной силы, основанный на гармонической линейаризации, в данном случае может привести к значительным ошибкам.

В третьем варианте (рис. 4, б, кривые 3) использовано модифицированное дифференциальное уравнение (см. (5)) и приведенная выше коррекция диссипативной силы  $\Lambda = 2\delta_0 k \dot{q}_k / \xi(z_0)$ . Хорошее совпадение кривых 2 и 3 свидетельствуют об эффективности приведенного способа определения резонансных амплитуд при учете позиционных сил сопротивления и бигармонического возбуждения.

Некоторые результаты экспериментальных исследований рассматриваемой задачи приведены в работах [15,16].

#### 4. Влияние многочастотных колебаний на условия динамической устойчивости при главном параметрическом резонансе

Если исключить из рассмотрения влияние медленного движения, параметрические колебания системы с одной степенью свободы, как известно, описываются

линейным однородным дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + c_0(1 - \varepsilon \sin \Omega t)q = 0,$$

которое перепишем так:

$$a\ddot{q} + c_0q = -b\dot{q} + \varepsilon c_0q \sin \Omega t.$$

Умножив обе части равенства на  $\dot{q}dt$ , получаем

$$d(T + \Pi) = -b\dot{q}^2 dt + \varepsilon c_0 q \dot{q} \sin \Omega t dt,$$

где  $T$ ,  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергии. Тогда, изменение полной энергии системы за период колебаний  $\tau = 2\pi/k$  равно  $\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_-$ . Здесь

$$\Delta E_+ = \varepsilon c_0 \int_0^\tau q \dot{q} \cos \Omega t dt, \quad \Delta E_- = b \int_0^\tau \dot{q}^2 dt$$

– подведенная энергия и абсолютное значение рассеянной энергии. Примем  $q \approx A \sin(kt + \alpha)$ , где  $A$  – усредненное значение амплитуды на периоде  $\tau$ , и  $\Omega = \Omega_* = 2k$ , что отвечает главному параметрическому резонансу. Тогда, после интегрирования получаем

$$\Delta E_- = 0.25\vartheta_0 c_0 A^2, \quad \Delta E_+ = 0.5\varepsilon c_0 \pi A^2 \cos 2\alpha.$$

Максимуму подведенной энергии отвечает фазовый сдвиг  $\alpha = 0$ . Отсюда  $\Delta E = 0.5\pi c_0 \varepsilon A^2 - \vartheta_0 c_0 A^2$ . При  $\Delta E < 0$  колебания затухают. Таким образом, условие подавления главного параметрического резонанса имеет вид  $\varepsilon < \varepsilon_* = 2\vartheta_0/\pi = 4\delta_0$ . Отсюда следует, что определенный уровень диссипативных сил служит своеобразным энергетическим барьером, препятствующим параметрическому возбуждению. Отношение  $\varepsilon_*/\varepsilon$  определяет запас устойчивости системы.

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение при одновременном воздействии параметрического и силового возбуждения:

$$\ddot{q} + |\Lambda(q)| \operatorname{sgn} \dot{q} + k^2 q (1 - \varepsilon \sin \Omega t) = w \sin \omega t, \quad (17)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\Omega$  – глубина пульсации и частота параметрического возбуждения.

Примем, что  $\omega \ll k$ ,  $\Omega = 2k$ . Последнее условие, как уже отмечалось, отвечает зоне главного параметрического резонанса. Снова применим прием разделения быстрых и медленных движений, после чего для анализа параметрических колебаний можно воспользоваться модифицированным уравнением при изложенной выше коррекции диссипативных сил.

$$\ddot{q}_1 + 2\delta k \dot{q}_1 + k^2 q_1 (1 - \varepsilon \sin \Omega t) = 0,$$

где  $\delta = \vartheta_0 \Phi(z)/(2\pi)$ ,  $z = Ak/(a\omega)$ ,  $A$  и  $a$  – амплитуды параметрических и вынужденных колебаний.

Полученное выше условие подавления главного параметрического резонанса теперь имеет вид  $\vartheta > 0.5\pi\varepsilon$ . При учете (10) представим это условие как

$$\sigma_0 > \sigma_* = \Phi^{-1}(z), \quad (18)$$

где  $\sigma_0 = 2\vartheta_0/(\pi\varepsilon)$ . При нарушении условия (18) амплитуда  $A$ , а следовательно, и параметр  $z$  растут, что, в свою очередь, приводит к уменьшению  $\sigma_*$ . Поэтому вместо неограниченного возрастания амплитуды, свойственного параметрическому резонансу в линейной системе, условие (18) может оказаться выполненным. При этом как быстрые, так и медленные движения могут привести к устойчивому периодическому режиму

Для более наглядной иллюстрации поведения системы при совместном параметрическом и силовом возбуждении воспользуемся отображением характерных состояний системы на плоскости параметров  $(\sigma_0 - z)$  (рис. 5). Для каждого из выявленных режимов приведены результаты численного моделирования. Рассмотрим два случая.

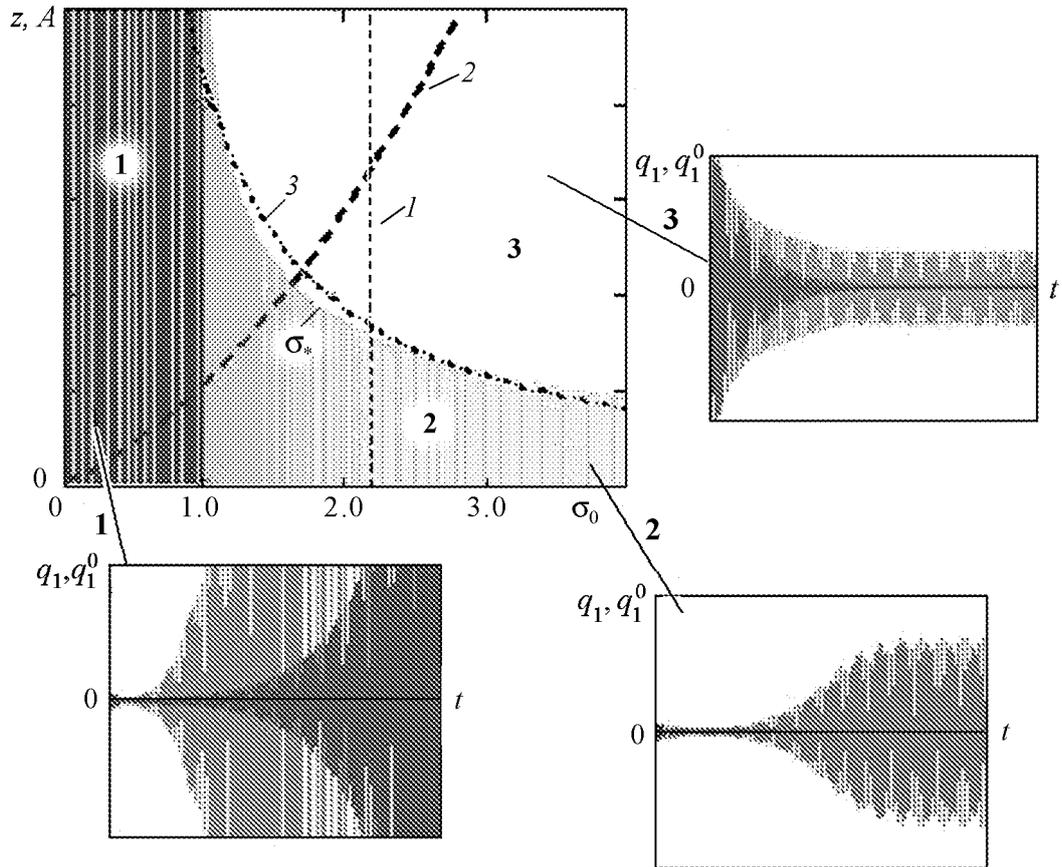


Рис. 5. К анализу условий устойчивости при параметрическом резонансе: область 1 – неустойчивые колебания; область 2 – устойчивые колебания при  $w = 0$  и неустойчивые – при  $w \neq 0$ ,  $\sigma_0 < \sigma_*$ ; область 3 – устойчивые колебания. Кривые: 1 –  $\vartheta_0 = \text{const}$ ; 2 –  $\vartheta_0(A)$  – возрастающая функция; 3 –  $\vartheta_0(A)$  – убывающая функция

**Случай 1** ( $w = 0$ ). В этом случае вынужденные колебания отсутствуют, поэтому  $z = \infty$  и  $\Phi = 1$ , а следовательно, условие динамической устойчивости имеет вид  $\sigma_0 > 1$ .

**Случай 2** ( $w \neq 0$ ). Поскольку теперь  $\Phi(z) < 1$ , область динамической неустойчивости расширяется. Поэтому условия, обеспечивающие динамическую устойчивость при отсутствии низкочастотного возбуждения, теперь могут оказаться нарушенными.

В области **1** ( $\sigma_0 < 1$ ) система всегда динамически неустойчива, не зависимо от воздействия дополнительного возбуждения, которое в данном случае проявляется лишь в росте интенсивности нарастания амплитуды. Это наглядно видно на совмещенном графике  $q_1(t)$  и  $q_1^0(t)$  ( $q_1^0$  соответствует случаю 1, которому на графиках отвечает более темный оттенок кривых). В области **2** система устойчива при  $w = 0$  и  $\sigma_0 > 1$  (случай 1) и неустойчива при  $w \neq 0$  и  $\sigma_0 < \sigma_*$ . Наконец, в области **3** ( $\sigma_0 > \sigma_*$ ) условия динамической устойчивости соблюдаются не зависимо от дополнительного возмущения.

На плоскости параметров штриховыми линиями показаны три характерных случая изменения логарифмического декремента в зависимости от амплитуды. Если  $\vartheta_0 = \text{const}$  (прямая 1), то в области **2** амплитуда растет, а в области **3** – убывает. Следовательно, амплитуда установившегося режима соответствует границе асимптотической устойчивости  $\sigma_*$ . На графиках  $q_1(t)$  и  $q_1^0(t)$  видно, что при  $w \neq 0$  колебания выходят на установившийся режим, а при  $w = 0$  колебания быстро затухают. Аналогичный характер поведения системы имеет место при возрастающей функции  $\vartheta_0(A)$  (кривая 2).

При убывающем характере изменения  $\vartheta_0(A)$  возможны два случая. Если кривая 3 дважды пересекает кривую  $\sigma_*$ , то верхняя точка пересечения соответствует неустойчивому режиму, а нижняя – устойчивому. При отсутствии нижней точки пересечения, как это, например, имеет место при кулоновом трении, колебания при  $\sigma_0 > \sigma_*$  полностью затухают ( $A \rightarrow 0$ ).

## **5. Влияние дополнительного движения на условия возникновения субгармонических резонансов**

В нелинейных системах могут возникнуть субгармонические колебания, частота которых меньше частоты вынуждающей силы. Поскольку в нелинейной системе свободные колебания не являются гармоническими, вынуждающая сила способна совершать работу и в том случае, когда ее частота совпадает с частотой одной из гармоник свободных колебаний. Однако реализация подобного режима возможна лишь при условии, что работа вынуждающей силы на этой гармонике компенсирует работу диссипативных сил. Таким образом, в отличие от резонансных режимов, амплитуда которых определяется уровнем диссипации, в данном случае диссипативные силы устанавливают некоторый энергетический барьер, при преодолении которого возможно возникновение субгармонического резонанса. Аналогичную «барьерную» роль диссипация исполняет при параметрическом резонансе (см. выше), а также при «жестком» возбуждении автоколебаний. В подобных случаях изменение эффективных значений параметров диссипации за счет быстрых или медленных до-

полнительных движений может существенно сказаться не только на количественных характеристиках исследуемых режимов, но и на условиях их существования.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее нелинейные вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы при бигармоническом возбуждении и позиционной силе трения,

$$\ddot{q} + |R(q)| \operatorname{sgn} \dot{q} + P(q) = w_1 \sin(\Omega t + \varphi) + a\Omega_1^2 \sin \Omega_1 t. \quad (19)$$

Здесь составляющая с частотой  $\Omega$  отвечает основному режиму, а кинематическое возбуждение с частотой  $\Omega_1$  – дополнительному (все силы отнесены к единице массы). Для изучения субгармонических колебаний при учете дополнительного возбуждения, не сужая общности в подходе к проблеме, примем  $|R(q)| = \zeta |P(q)|$ , что отвечает так называемой рессорной характеристике сил сопротивления, встречающейся во многих инженерных приложениях. Кроме того, конкретизируем функцию  $P(q)$ , пропорциональную нелинейной восстанавливающей силе  $P(q) = k_0^2(1 + \alpha q^2)q$ , где  $k_0$  – частота свободных колебаний при  $\alpha = 0$ . Принятая функция  $P(q)$  отвечает уравнению Дуффинга, анализу которого посвящена обширная литература. В рамках данной статьи принятая упругая характеристика лишь исполняет роль математической модели, на примере которой иллюстрируются возможности развиваемого здесь подхода к решению поставленной задачи.

После перехода к безразмерному времени  $\tau = k_0 t$  представим уравнение (19) в виде

$$q'' + \zeta(1 + \alpha q^2) |q| \operatorname{sgn} q' + (1 + \alpha q^2)q = f \sin(\omega \tau + \varphi) + a\omega_1^2 \sin \omega_1 \tau, \quad (20)$$

где  $f = w_1/k_0^2$ ,  $\omega = \Omega/k_0$ ,  $\omega_1 = \Omega_1/k_0$ ,  $()' = d/d\tau$ . На основании уравнения (20) исследуем условия возбуждения субгармонического резонанса порядка  $1/3$ . Субгармонические колебания могут быть с достаточной точностью представлены как свободные колебания без трения [18–20]

$$q \approx A \sin \omega_0 \tau + A_3 \sin 3\omega_0 \tau, \quad (21)$$

где  $\omega_0 = 1 + 0.75\alpha A^2$ ,  $\omega_1 = 3\omega_0$ ,  $A_3 = \alpha A^3/(32 + 21\alpha A^2)$ .

Сначала рассмотрим случай  $a = 0$ . При этом в нашем случае энергия единичной массы (в безразмерной форме), расходуемая за период  $2\pi/\omega_0$ , равна  $\Delta E_- = 2\zeta_0(A^2 + 0.5\alpha A^4)$ , а подводенная энергия, равная работе вынуждающей силы, определяется как  $\Delta E_+ = 3\pi f_1 A^3 \alpha \sin \varphi / (32 + 21A^2)$ . На основании энергетического баланса  $\Delta E_- = \Delta E_+$  условие существования субгармонического резонанса определяется как  $|\sin \varphi| \leq 1$ . Отсюда

$$\zeta_0 \leq \zeta_*(\omega_0) = 1.5\pi \alpha f A(\omega_0) [1 + 0.5\alpha A^2(\omega_0)]^{-1} [32 + 21\alpha A^2(\omega_0)]^{-1}, \quad (22)$$

где  $A(\omega_0) = 2\sqrt{(\omega_0^2 - 9)/27}$ . Как было показано выше, эффективный уровень диссипации при дополнительном низкочастотном возбуждении понижается согласно зависимости  $\zeta = \zeta_0 \Phi(z)$ .

Для иллюстрации области существования субгармонических резонансов воспользуемся плоскостью параметров  $(\omega - A)$  [18]. На рис. 6 приведено семейство

кривых, полученных на основании (21), (22) при варьировании параметра  $z$ . Возможность возбуждения резонансов при фиксированном значении  $z$  на графиках ограничена двумя точками пересечения с кривой  $3\omega_0$  (например, точки  $N$  и  $K$  на кривой 2). Кривая 1 отвечает случаю, когда  $\Phi(z) \approx 1$ , то есть дополнительное возбуждение практически не проявляется. В рассматриваемом случае кривые 1 и  $3\omega_0$  не пересекаются, что свидетельствует об отсутствии субгармонических резонансов. При уменьшении параметра  $z$  зона возбуждения растет.

Верхняя граница возбуждения (точка  $N$ ) в основном зависит от роста уровня диссипации, в то время как на нижней границе (точка  $K$ ) резко уменьшается работа вынуждающей силы на третьей гармонике, амплитуда которой при близости к линейной системе стремится к нулю.

Далее сопоставим результаты численного моделирования для ряда режимов субгармонических колебаний при сопутствующих медленных движениях (рис. 7). На основании уравнения (20) при  $f_1 = 5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\omega_1 = 6$  и отсутствии низкочастотного возбуждения ( $a = 0$ ) субгармонический резонанс возбуждается при  $\zeta = \zeta_0 \leq 0.069$ . Это подтверждается срывом субгармонических колебаний, наблюдаемом на графиках  $q(\tau)$  при нарушении данного условия (рис. 7,  $a$ ,  $b$ ).

Третий фрагмент (рис. 7,  $в$ ) отличается тем, что  $a \neq 0$ , то есть введено дополнительное низкочастотное возмущение ( $\omega_2 = 0.3$ ,  $v = a\omega_2 = 21$ ). Графики, приведенные на рис. 7,  $a$ ,  $в$ , практически совпадают, несмотря на то, что параметр  $\zeta_0$  существенно превышает критическое значение  $\zeta_*$ . При этом имеет место незначительная амплитудная модуляция при том же среднем значении амплитуды  $A = 2.8$ .

### Заключение

В статье исследовано влияние медленных движений на изменение эффективных характеристик нелинейных диссипативных сил при высокочастотных колебательных режимах. Результаты исследования использованы для определения резо-

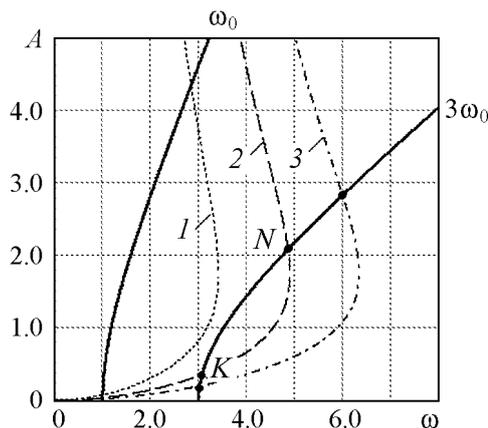


Рис. 6. К определению условий существования субгармонических колебаний при бигармонических колебаниях: 1 -  $z = 3$ ; 2 -  $z = 0.8$ ; 3 -  $z = 0.5$

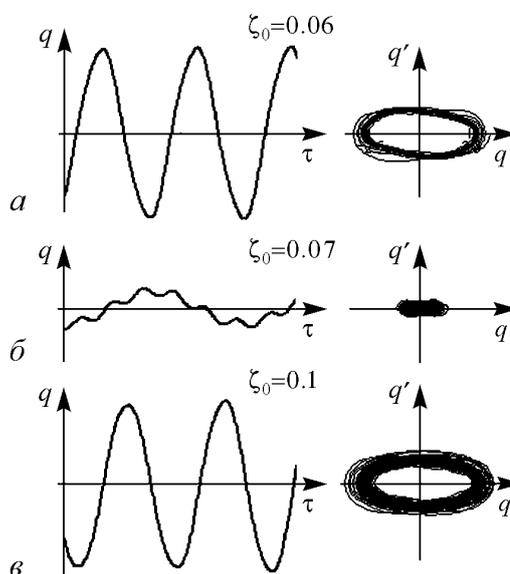


Рис. 7. Компьютерное моделирование субгармонических режимов:  $a$ ,  $b$  - гармоническое возбуждение;  $в$  - бигармоническое возбуждение

нансных амплитуд, а также пороговых условий возбуждения параметрических и субгармонических колебаний. Установлено, что медленные движения, равно как и быстрые, могут при определённых условиях изменить диссипативные характеристики колебательных процессов и существенно увеличить резонансные амплитуды возбуждаемых «быстрых» колебаний, а в ряде случаев – изменить условия существования колебательных режимов.

#### Библиографический список

1. *Van der Pol B.* Selected scientific papers. North-Holland Publ.Co., Amsterdam, 1960.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
3. *Волосов В.М. Моргунов Б.И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
4. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 400 с.
5. *Ланда П.С.* Изменение эффективных параметров усреднённых движений нелинейных систем под действием шума и вибраций // Изв. вузов. ПНД. 2008. Т. 16, № 3. С. 33.
6. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 194 с.
7. *Нашив А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. М.: Мир, 1988. 448 с.
8. *Сорокин Е.С.* Динамический расчёт несущих конструкций. М.: Госстройиздат, 1958. 325 с.
9. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. 317 с.
10. *Кочнева Л.Ф.* Внутреннее трение в твёрдых телах при колебаниях. М.: Наука, 1979. 96 с.
11. *Коловский М.З.* О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. № 226. М., Л.: Машгиз, 1963. С. 7.
12. *Вульфсон И.И.* Определение приведенных значений параметров диссипации при бигармонических колебаниях // Вибротехника. 1968. Т. 9, № 4. С. 33.
13. *Вульфсон И.И.* Учет нелинейных диссипативных сил при полигармонических колебаниях элементов машин // Вибротехника. 1981. Т. 38, № 4. С. 63.
14. *Вульфсон И.И., Вульфсон М.Н.* Уточненная эквивалентная линеаризация позиционных диссипативных сил при неоднородных колебаниях // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004. № 4. С. 20.
15. *Dresig H., Vulfson J.I.* Zur Dämpfungstheorie bei nichtharmonischer Belastung. Dämpfung und Nichtlinearität. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993. S. 141.
16. *Blechman I., Dresig H., Vulfson I.* To the theory of nonlinear dissipation at polyharmonic excitation. Proceedings of XXXII International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». St. Petersburg, 2004. P. 50.
17. Нелинейные задачи динамики и прочности машин / Под ред. В.Л. Вейца. Л.: ЛГУ. 1983. 336 с.

18. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
19. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. 284 с.
20. Вульфсон И.И. Об условиях возникновения субгармонических резонансов при неоднородном возбуждении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 2. С. 3.

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна      Поступила в редакцию      28.05.2012  
 После доработки      10.10.2012

## EFFECT OF LOW-FREQUENCY VIBRATIONS ON NONLINEAR DISSIPATIVE FORCES

*I. I. Vul'fson*

The paper examines the impact of the slow movements to effective values of dissipative forces in the equations of fast motion of oscillatory system. It was previously shown that the dissipative characteristics obtained experimentally under harmonic oscillations can change significantly with polyharmonic excitation. In this paper the problem is considered in more detail in relation to the determination of the resonance amplitudes and threshold conditions for parametric and subharmonic resonances.

*Keywords:* Slow and fast motion, vibration, nonlinear dissipative forces, the dynamical stability, parametric resonance, subharmonic resonance.

*Вульфсон Иосиф Исаакович* – родился в Риге (1931). После окончания Ленинградского политехнического института (1956) работал на инженерных должностях в конструкторских бюро полиграфического машиностроения и станкостроения (1956–1963); с 1963 года – в ЛИТЛП, ныне – в Санкт-Петербургском государственном университете технологии и дизайна (СПб-ГУТД). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1963) и доктора технических наук (1970) в области механики машин и теории колебаний. Заслуженный деятель науки Российской Федерации (2002). Автор более 500 научных публикаций, в том числе 7 монографий, изданных в России, Германии и США, 11 учебных пособий, двух справочников: «Нелинейные задачи динамики машин» (в соавторстве), «Динамические расчеты цикловых механизмов», «Колебания машин с механизмами циклового действия», «Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives», «Dynamik der Mechanismen» ( в соавторстве), Справочник «Вибрации в технике» (в соавторстве), «Механика машин» (в соавторстве), «Колебания в машинах» и др. Член Научно-методического совета по теории механизмов и машин Министерства образования и науки РФ. Член редакционной коллегии журнала «Теория механизмов и машин».



191186 Россия, Санкт-Петербург, ул. Большая морская, 18  
 Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна  
 E-mail: jov@sutd.ru