



УДК 530.182

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139>

Пороговая устойчивость синхронного режима энергосети с топологией хаб-кластера

В. А. Храменков, А. С. Дмитричев, В. И. Некоркин

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»
Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Автор для переписки Владислав Анатольевич Храменков, hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru
Поступила в редакцию 15.11.2019, принята к публикации 30.12.2019, опубликована online 30.04.2020

Цели. Основной целью данной работы является исследование динамики модели энергосети с топологией хаб-кластера на основе уравнений Курамото с учетом инерции. Особая роль отводится изучению устойчивости синхронного режима работы сети, а также поиску условий его глобальной устойчивости. Рассматривается вопрос об условиях реализации синхронного режима в случае сосуществования нескольких режимов работы сети. **Методы.** В работе применяется численное моделирование работы энергосети. Также используется представленный в статье подход, базирующийся на втором методе Ляпунова и позволяющий дать наглядную оценку области безопасных возмущений, не нарушающих синхронный режим. **Результаты.** Приведены различные режимы работы энергосети и границы их существования в пространстве параметров. Описан подход, позволяющий дать оценку величине безопасных возмущений, не нарушающих синхронный режим. **Заключение.** В работе рассмотрена модель энергосети с топологией хаб-кластера. Данная сеть является типичным элементом крупных энергосетей и может оказывать значительное влияние на динамику всей сети в целом. Для хаб-кластеров из трех и четырех элементов были построены разбиения пространства параметров сетей на области, отвечающие различным режимам работы. В частности, выделены области глобальной асимптотической устойчивости синхронных режимов хаб-кластеров, то есть области их безаварийной работы при любых начальных условиях. Для характеристики режимов хаб-кластеров вне областей глобальной асимптотической устойчивости был предложен подход, базирующийся на втором методе Ляпунова, который позволяет дать наглядную оценку области безопасных возмущений, не нарушающих синхронные режимы работы сетей.

Ключевые слова: энергосети, синхронные машины, модель Курамото, синхронизация.

Образец цитирования: Храменков В.А., Дмитричев А.С., Некоркин В.И. Пороговая устойчивость синхронного режима энергосети с топологией хаб-кластера // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 2. С. 120–139.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работы по исследованию динамических режимов хаб-кластеров из трех и четырех элементов (раздел 4) выполнены в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0035–2019–0011. Подход для оценки величины безопасных возмущений (раздел 5) развит при поддержке РФФИ (гранты № 18-29-10040, № 18-02-00406).

Threshold stability of the synchronous mode in a power grid with hub cluster topology

V. A. Khramenkov, A. S. Dmitrichev, V. I. Nekorkin

Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS)
46, Ul'yanov Street, Nizhny Novgorod 603950, Russia

E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Correspondence should be addressed to Vladislav A. Khramenkov, hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru

Received 15.11.2019, accepted 30.12.2019, published online 30.04.2020

The main **purpose** of this paper is to investigate the dynamics of the power grid model with hub cluster topology based on the Kuramoto equations with inertia. It is essential to study the stability of synchronous grid operation mode and to find conditions of its global stability. The conditions that ensure establishment of the synchronous mode instead of coexisting asynchronous ones are considered. **Methods.** In this paper we use numerical modelling of different grid operation modes. Also we use an approach based on the second Lyapunov method, which allows to give an estimate of the area of safe perturbations that do not violate the synchronous mode. **Results.** Various power grid operation modes and boundaries of their existence in the parameter space are considered. An approach allowing to estimate the magnitude of safe disturbances that do not violate the synchronous mode, is described. **Conclusion.** The paper considers a power grid model with hub cluster topology. For hub-clusters of three and four elements, their parameter spaces are partitioned into areas corresponding to different operation modes. In particular, parameter areas with global asymptotic stability of synchronous modes that is with trouble-free operations under any initial conditions has been identified. To characterize the modes of hub clusters outside the areas of global asymptotic stability, estimates of the areas of safe perturbations that do not violate the synchronous grid operation mode is given.

Key words: power grids, synchronous machines, Kuramoto model, synchronization.

Reference: Khramenkov V.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I. Threshold stability of the synchronous mode in a power grid with hub cluster topology. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 120–139.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The work on the study of the dynamic regimes of hub clusters of three and four elements (Section 4) was performed as part of the state assignment of the IAP RAS, project No. 0035–2019–0011. The approach for estimating the magnitude of safe disturbances (Section 5) was developed with support from Russian Foundation for Basic Research (grants No. 18-29-10040, No. 18-02-00406).

Введение

Энергосеть представляет собой часть энергетической системы, в которой производится, преобразуется, передается и потребляется электрическая энергия. Энергосети являются крупномасштабными, распределенными на большой территории, системами, в которых электрические машины и устройства взаимодействуют друг с другом посредством электрических и магнитных соединений.

До недавнего времени основными источниками электрической энергии были крупные электростанции (АЭС, ГЭС и ТЭС), которые почти полностью определяли топологию энергосети, под которой понимается все многообразие вариантов связей между электростанциями и потребителями, а также их взаимное расположение на местности. Однако в последнее время происходит активное подключение к существующим энергосетям новых, в том числе маломощных, электростанций, использующих альтернативные и возобновляемые источники энергии, такие как энергия ветра, Солнца, приливов и геотермальная энергия. Это приводит к существенному усложнению топологии и, как следствие, динамики этих сетей [1, 2].

Базовым элементом крупных энергосетей является синхронная машина. В такой машине частота вращения ротора прямо пропорциональна частоте изменения электродвижущей силы в

статорных обмотках и наоборот. Поэтому нормальная (безаварийная) работа энергосети возможна лишь в так называемом синхронном режиме, когда частоты всех входящих в ее состав синхронных машин равны друг другу, а их фазы близки. По этой причине поиск условий существования синхронного режима работы энергосети и определение его устойчивости по отношению к различным возмущениям является одной из приоритетных задач исследования энергосетей. В последнее время значительный интерес наблюдается к изучению влияния на существование и устойчивость такого режима топологии энергосети.

Современные работы в этом направлении базируются на описании энергосетей в форме динамических сетей, как классических динамических систем, и использовании для их исследования методов теории современной нелинейной динамики и теории бифуркаций. Одним из классических и давно применяемых подходов к анализу устойчивости синхронного режима является исследование его устойчивости по отношению к малым возмущениям, то есть его локальной устойчивости. Значительное число работ по применению данного подхода можно найти в том числе в отечественной литературе [3–8]. Однако эти работы, как правило, посвящены изучению малых (одно-, двух- и трехмашинных) энергосетей, работающих на статическую нагрузку. И кроме того, они не могут объяснить возникновение целого ряда внештатных ситуаций в работе энергосетей. Это стимулировало развитие нового подхода к изучению энергосетей. Основное внимание в этом подходе сосредоточено на исследовании устойчивости синхронного режима работы энергосетей по отношению к нелокальным, большим возмущениям. Данному подходу посвящен ряд публикаций, в которых приводится анализ динамических моделей крупных сетей, таких как энергосеть Великобритании [9, 10], Северной Европы [11, 12], Италии [13, 14]. В них установлена особая роль топологии сети для ее устойчивости, а именно значительное влияние малых подсетей на динамику сети в целом. Динамика малых подсетей рассматривается в работах [15–24], где установлены основные режимы их работы, условия их существования и устойчивость по отношению к возмущениям основных параметров сети, например, к скачкам мощности.

В энергосетях можно встретить самые различных варианты топологий сетевых соединений. Одной из часто встречающихся является топология в виде хаб-кластера, состоящего из большого числа генераторов, соединенных с потребителем и наоборот. Крупные энергосети содержат большое количество подсетей в виде отдельных хаб-кластеров, поэтому последние оказывают большое влияние на динамику сетей в целом [15, 16, 18, 21, 22].

В нашей предыдущей работе [16] была получена оценка области параметров хаб-кластера из трех элементов, соответствующая глобальной асимптотической устойчивости его синхронного режима. В настоящей работе мы продолжаем исследование энергосетей с хаб-кластерами. В частности, численно установлены области существования различных режимов в хаб-кластерах из трех и четырех элементов. Выделены области глобальной асимптотической устойчивости синхронных режимов хаб-кластеров. А для характеристики режимов хаб-кластеров вне областей глобальной асимптотической устойчивости предложен аналитический подход, базирующийся на втором методе Ляпунова.

1. Модель

В настоящее время широкое распространение получила модель энергосети в виде связанных между собой синхронных машин, описывающих работу генераторов и потребителей электрической энергии [1, 9–11, 15].

Наиболее полное математическое описание динамики синхронной машины дается системой нелинейных уравнений Парка–Горева [25, 26], имеющих высокую размерность. Понятно, что анализ сети, состоящей из большого числа связанных между собой синхронных машин, дина-

мика которых подчиняется уравнениям Парка–Горева, достаточно сложен из-за большой размерности системы уравнений, описывающих эту сеть. Поэтому при рассмотрении даже небольших сетей используют более простые модели [5], в которых состояние синхронной машины определяется только положением ее вращающейся части, то есть ротора.

Итак, для описания движения ротора можно записать уравнение динамики его вращательного движения и получить систему дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих состояние одной синхронной машины. Без потери общности будем считать, что синхронная машина работает как генератор. В таком случае, чтобы определить ее состояние, необходимо знать уравнение движения ротора генератора. Запишем для ротора основное уравнение вращательного движения вокруг неподвижной оси

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = \Delta M, \quad (1)$$

где I – момент инерции ротора; ω – угловая частота вращения ротора; ΔM – небаланс моментов сил, действующих на ротор. Момент инерции ротора I не зависит от времени, поэтому его можно вынести за знак производной. Небаланс моментов ΔM может быть представлен в виде

$$\Delta M = M_T - M_D - M_{EM}, \quad (2)$$

где M_T – вращающий момент создаваемый турбиной; M_D – момент сопротивления, обусловленный трением в подшипниках, сопротивлением охлаждающей среды, а также иными демпфирующими факторами; M_{EM} – электромагнитный момент, обусловленный электрической нагрузкой генератора. При расчетах процессов, происходящих с генератором, вместо небаланса моментов ΔM , как правило, используют небаланс мощностей ΔP

$$\Delta P = P_T - P_D - P_{EM}, \quad (3)$$

Связь между этими небалансами в относительной системе единиц выражается соотношением:

$$\Delta M^* = \frac{\Delta P^*}{1 + \Delta\omega^*}, \quad \Delta M^* = \frac{\Delta M}{M_{\text{ном}}}, \quad M_{\text{ном}} = \frac{P_{\text{ном}}}{\omega_0}, \quad \Delta\omega^* = \frac{\omega}{\omega_0} - 1, \quad (4)$$

где $P_{\text{ном}}$ – номинальная мощность, ω_0 – синхронная частота, $\Delta\omega^*$ – переменная составляющая частоты. Как правило, $\Delta\omega^* \ll 1$, поэтому этой составляющей можно пренебречь и переписать уравнение (1) через небаланс мощностей без явных признаков принадлежности к относительной системе координат в виде

$$T_I \frac{d\omega}{dt} = \Delta P, \quad (5)$$

где T_I – безразмерный аналог постоянной ротора генератора. Положение ротора определяется углом Φ между осью, вращающейся вместе с ротором, и некоторой неподвижной осью. В качестве таких осей могут быть выбраны поперечная ось ротора q , вращающаяся вместе с ним, и неподвижная магнитная ось фазы A (рис. 1, а). Угловая скорость ротора ω и угол Φ связаны соотношением

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}. \quad (6)$$

Более удобной для отсчета углов является синхронная ось, вращающаяся с частотой ω_0 относительно неподвижной оси A . В этом случае положение ротора можно определять как угол Θ между поперечной и синхронной осями (см. рис. 1, а). Связь между углами Φ и Θ задается соотношением

$$\Phi = \omega_0 t + \Theta. \quad (7)$$

В новой системе координат уравнение (5) может быть записано в следующем виде:

$$T_I \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \Delta P. \quad (8)$$

Определим значения слагаемых, входящих в выражение (3). Мощность турбины P_T , как правило, считают постоянной во времени. Мощность сопротивления или потерь обычно записывают как $P_D = K_D \dot{\Theta}$, где K_D – демпферный коэффициент, который обобщенно отражает совокупное влияние всех демпфирующих факторов. Его значение будем считать постоянным во времени (точкой обозначаем производную по времени). Далее определим значение электромагнитной мощности генератора P_{EM} . Для этого рассмотрим модель простейшей энергосети – одномашинную модель, которая представляется одной удаленной электростанцией (эквивалентным генератором), работающей через трансформаторные связи и линию электропередачи параллельно с генераторами мощной энергосети, настолько мощной, что ее приемные шины обозначают как шины бесконечной мощности (ШБМ). Для них характерно постоянное по модулю напряжение U и постоянная частота этого напряжения ω_0 . Для простоты положим, что активные со-

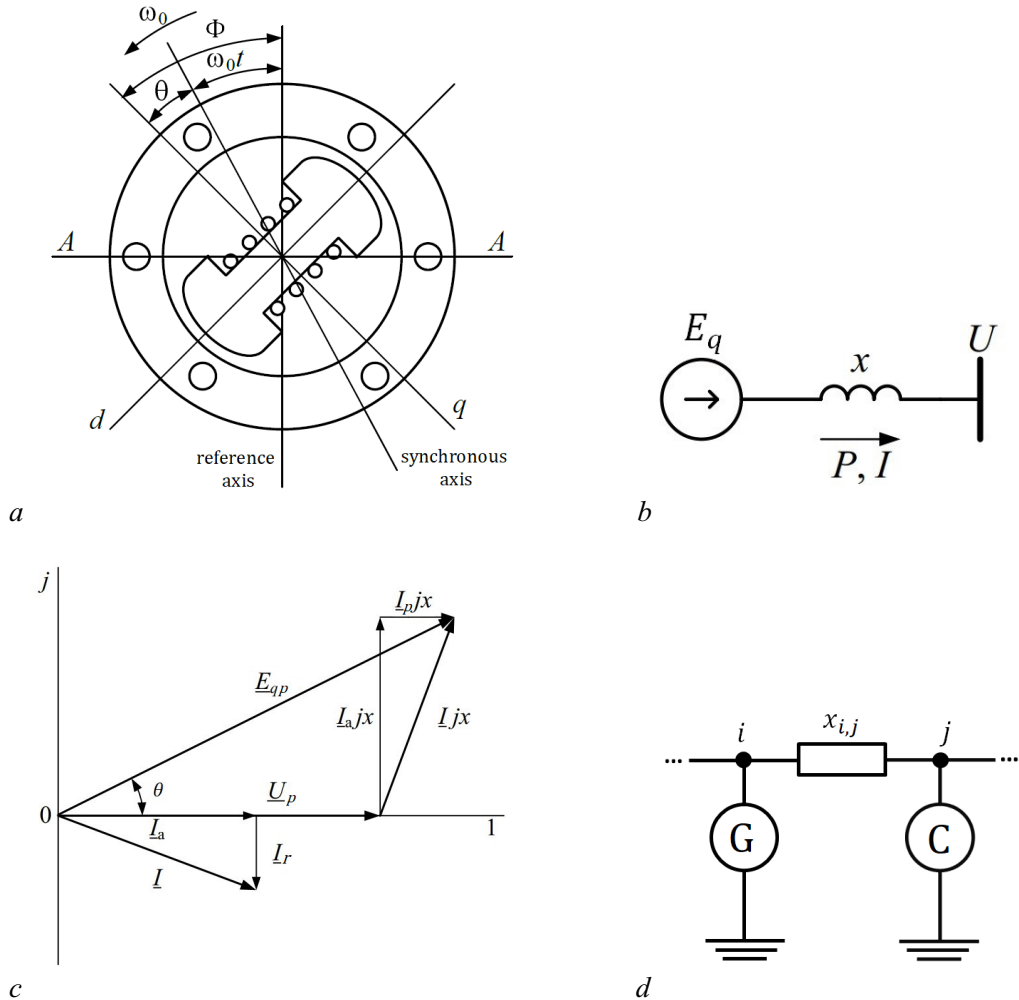


Рис. 1. *a* – параметры движения ротора генератора; *b* – одномашинная модель энергосети; *c* – векторная диаграмма модели одномашинной энергосети; *d* – эквивалентная схема участка энергосети. Рис. *a-c* адаптированы из работы [5]

Fig. 1. *a* – generator rotor motion parameters; *b* – one-machine grid model; *c* – one-machine grid vector diagram; *d* – equivalent grid circuit. Figures *a-c* are adapted from [5]

противления всех элементов модели равны нулю. При этих допущениях схема замещения имеет вид, представленный на рис. 1, *b*. Источником E_q моделируется синхронная ЭДС генератора, источником U – напряжение на ШБМ. Связь между мощностью P , модулями E_q, U векторов $\underline{E}_q, \underline{U}$ и углом Θ можно определить из векторной диаграммы напряжений, ЭДС и токов, действующих в эквивалентной схеме замещения (рис. 1, *c*). На диаграмме показаны активная \underline{I}_a и реактивная \underline{I}_r составляющие тока \underline{I} , а также, соответственно, продольная $\underline{I}_r jx$ и поперечная $\underline{I}_a jx$ составляющие падения напряжения $\underline{I} jx$ на эквивалентном сопротивлении x . ЭДС \underline{E}_{qp} и напряжение \underline{U}_p представлены фазными величинами. Из диаграммы следует, что модуль поперечной составляющей падения напряжения $\underline{I} jx$ определяется соотношением

$$I_a x = E_{qp} \sin(\Theta). \quad (9)$$

Умножив обе части формулы (9) на $3U_p/x$, получим выражение для активной составляющей трехфазной мощности

$$P = 3U_p I_a = \frac{3E_{qp}U_p}{x} \sin(\Theta) = \frac{E_q U}{x} \sin(\Theta). \quad (10)$$

Таким образом, в случае модели одномашинной энергосети слагаемое P_{EM} , входящее в уравнение (3), может быть определено по формуле (10), если разделить ее на номинальную мощность $P_{ном}$. В этом случае уравнение (8) можно переписать в виде

$$T_I \ddot{\Theta} = P_T - K_D \dot{\Theta} - \frac{E_q U}{x P_{ном}} \sin(\Theta). \quad (11)$$

Теперь перейдем к рассмотрению модели энергосети в виде связанных между собой синхронных машин. Эквивалентная схема участка такой сети приведена на рисунке 1, *d*. Такая сеть может быть представлена как граф, узлы которого символизируют синхронные машины, а ребра – линии передач, соединяющие их. В этом случае уравнение (11) может быть обобщено и записано в виде

$$T_{I,i} \ddot{\Theta}_i = P_{T,i} - K_{D,i} \dot{\Theta}_i + \sum_{j=1}^N \frac{E_{q,i} E_{q,j}}{x_{i,j} P_{ном}} \sin(\Theta_j - \Theta_i), \quad (12)$$

где индекс i обозначает номер элемента сети или же синхронной машины и принимает значения $i = 1, 2, \dots, N$, N – количество элементов сети; $T_{I,i}, K_{D,i}$ – постоянная инерции и демпферный коэффициент i го элемента сети, соответственно; P_i – механическая мощность, подводимая к валу ротора синхронной машины или снимаемая с него; $E_{q,i}$ – синхронная ЭДС i ой машины; $x_{i,j}$ – индуктивное сопротивление линии передач, соединяющей машины с номерами i и j . Если механическая мощность подводится, то есть $P_i > 0$, то машина работает как генератор, а если снимается, то есть $P_i < 0$, машина работает как потребитель.

Далее условимся для простоты считать, что синхронные ЭДС машин не меняются во времени, а также $K_{D,i} = K_D$ и $T_{I,i} = T_I$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Принимая эти упрощения, систему уравнений (12) можно переписать в виде

$$\ddot{\Theta}_i = P_i - \alpha \dot{\Theta}_i + \sum_{j=1}^N K_{i,j} \sin(\Theta_j - \Theta_i), \quad (13)$$

где приняты следующие обозначения: $P_i = P_{T,i}/T_I$, $\alpha = K_D/T_I$, $K_{i,j} = (E_{q,i} E_{q,j})/(x_{i,j} T_I)$. Все величины, входящие в уравнения (13), являются безразмерными. Систему уравнений (13) принято называть уравнениями Курамото с инерцией или уравнениями Курамото второго порядка [1, 27].

2. Синхронный режим работы энергосетей

Одной из приоритетных задач исследования энергосетей является поиск условий существования синхронного режима работы энергосети и определение его устойчивости по отношению к различным возмущениям. В рамках уравнений (13) синхронному режиму соответствует постоянное значение всех членов, стоящих под знаком суммы, которые определяют потоки мощности между элементами энергосети. Это условие выполняется для устойчивых состояний равновесия системы (13). Поэтому необходимо исследовать условия существования состояний равновесия системы (13) и определить множество начальных условий, при которых траектории системы (13) асимптотически стремятся к устойчивому состоянию равновесия, что соответствует установлению синхронного режима.

3. Модель энергосети в виде отдельного хаб-кластера

Рассмотрим хаб-кластер, состоящий из N элементов: одного потребителя и $N - 1$ генераторов (рис. 2). Динамика каждого элемента описывается уравнениями (13). Соответственно, $P_1 < 0$, $P_l > 0$, $l = 2, 3, \dots, N$. Для простоты будем считать, что линии передач, соединяющие элементы сети, идентичны, поэтому $K_{1,j} = K$, $j = 2, 3, \dots, N$ и $K_{i,1} = K$, $i = 2, 3, \dots, N$, остальные элементы матрицы смежности равны нулю. Для удобства введем новые переменные, время и параметры

$$\phi_i = \Theta_1 - \Theta_{i+1}, \quad t_{\text{new}} = \sqrt{K}t, \quad \gamma_i = \frac{P_{i+1} - P_1}{K} > 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (14)$$

С учетом (14) система (13) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -\gamma_i - \lambda y_i - \sin(\phi_i) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\phi_j), \end{cases} \quad (15)$$

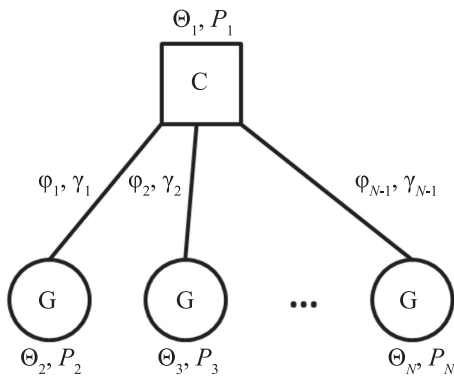


Рис. 2. Энергосеть в виде хаб-кластера

Fig. 2. Hub cluster power grid

где точкой обозначена производная по новому времени t_{new} и индекс i принимает значения от 1 до $N - 1$. Система (15) определена в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^{N-1} \times R^{N-1}$.

Как отмечалось выше, синхронному режиму работы энергосети соответствует устойчивое состояние равновесия системы (15), которое, в свою очередь, может быть найдено из системы уравнений

$$\begin{cases} y_i = 0, \\ \sin(\phi_i) = d_i, \end{cases} \quad (16)$$

где $d_i \equiv (1/N)(-N\gamma_i + \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j)$. Область S существования состояний равновесия системы (15) с учетом ограничений на значения параметров γ_i может быть записана в виде

$$S = \{\lambda, \gamma_i | \lambda > 0, \gamma_i > 0, d_i > -1\}. \quad (17)$$

При значениях параметров из области S система (15) имеет 2^{N-1} грубых состояний равновесия [16]

$$O_j(\phi_i = \phi_i^{(k)}, y_i = 0, i = 1, 2, \dots, N-1, k = 1, 2), \quad j = 1, 2, \dots, 2^{N-1}, \quad (18)$$

где периодические координаты состояний равновесия $\phi_i^{(k)}$ на фазовом цилиндре G могут быть записаны в виде

$$\phi_i^{(1)} = \arcsin(d_i), \quad \phi_i^{(2)} = \begin{cases} \pi - \phi_i^{(1)}, & d_i \geq 0, \\ -\pi - \phi_i^{(1)}, & d_i < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Стандартный анализ показывает, что состояние равновесия $O_1(\phi_i = \phi_i^{(1)}, y_i = 0)$ является асимптотически устойчивым, а все остальные – седловыми [16]. Синхронному режиму работы сети в виде хаб-кластера соответствует состояние равновесия O_1 . Все состояния равновесия системы (15) содержатся в поглощающей области G^+

$$G^+ = \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y_i^-, y_i^+]\}, \quad y_i^\pm = -\frac{\gamma_i \mp N}{\lambda}. \quad (20)$$

4. Анализ режимов работы хаб-кластеров из трех и четырех элементов

Сосредоточим теперь основное внимание на анализе режимов, реализующихся в малых хаб-кластерах. Рассмотрим сначала хаб-кластер из одного потребителя и двух генераторов.

При исследовании динамики системы (15) основным является вопрос о том, как могут изменяться переменные ϕ_i при различных значениях параметров. Удобно построить карту режимов изменения этих переменных на плоскости параметров (γ_1, γ_2) в области H при фиксированном значении параметра λ , потому что именно при значениях параметров из этой области в системе может реализоваться синхронный режим.

Численный анализ системы (15) в случае хаб-кластера из трех элементов показал, что в зависимости от значения параметра λ в системе могут реализоваться различные режимы работы, что проиллюстрировано рис. 3, на котором приведены разбиения области S на области, соответствующие различным режимам работы хаб-кластера.

Установлено, что наибольшее число режимов работы сети наблюдается при значении параметра $\lambda = 0.3$ (рис. 3, а). Для значений параметров из области a_1 состояние равновесия O_1 глобально асимптотически устойчиво, поэтому при любых начальных условиях реализуется синхронный режим. Для значений параметров из области a_2 траектории системы (15) стремятся в состояние равновесия O_1 только при определенных начальных условиях, поскольку в фазовом пространстве помимо этого аттрактора существует еще предельный цикл. Поведение траекторий системы (15) и осциллограммы переменных в малой окрестности этого предельного цикла приведены на рис. 4, а, б. В этом случае реализуется один из двух возможных квазисинхронных режимов. В этом режиме переменная ϕ_1 осциллирует во времени вокруг некоторого среднего значения, причем разница ее максимального и минимального значений не превышает 2π , что, фактически, означает постоянство среднего значения мощности, передаваемой между соответствующим генератором и потребителем. В то же время переменная ϕ_2 убывает во времени, что отвечает асинхронному режиму взаимодействия генератора и потребителя.

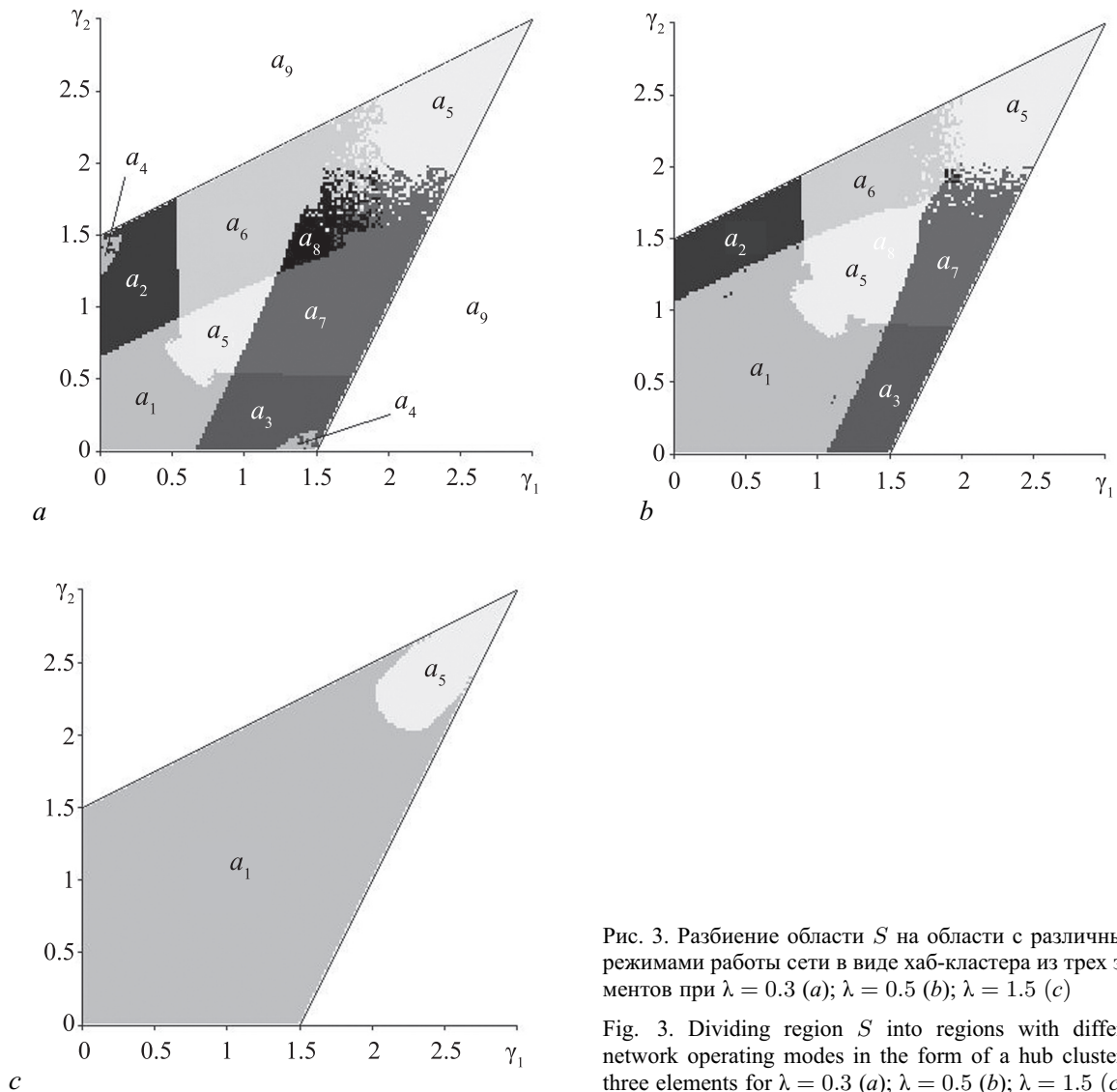


Рис. 3. Разбиение области S на области с различными режимами работы сети в виде хаб-кластера из трех элементов при $\lambda = 0.3$ (a); $\lambda = 0.5$ (b); $\lambda = 1.5$ (c)

Fig. 3. Dividing region S into regions with different network operating modes in the form of a hub cluster of three elements for $\lambda = 0.3$ (a); $\lambda = 0.5$ (b); $\lambda = 1.5$ (c)

При значениях параметров из области a_3 в системе (15) реализуется второй тип квазисинхронного режима. В этом режиме переменная ϕ_1 убывает во времени, а ϕ_2 осциллирует около некоторого среднего значения. Следовательно, имеет место определенная симметрия в пространстве параметров (γ_1, γ_2) относительно прямой $\gamma_1 = \gamma_2$. При значениях параметров из области a_4 существуют оба типа квазисинхронных режимов как в областях a_2 и a_3 , которые реализуются при различных значениях начальных условий. При значениях параметров из области a_5 в фазовом пространстве системы (15) существует предельный цикл (рис. 4, d). При движении траектории в его малой окрестности реализуется асинхронный режим, при котором обе переменные ϕ_1 и ϕ_2 убывают (рис. 4, c). Эту область необходимо избегать при выборе параметров сети. При значениях параметров из областей a_6 и a_7 помимо квазисинхронных режимов таких же типов, как в областях a_2 и a_3 , соответственно, существует асинхронный режим. При параметрах из области a_8 существуют все перечисленные выше режимы. При параметрах из области a_9 не существует синхронный режим, поэтому ее подробное изучение не представляет особого интереса. Стоит отметить, что в рассматриваемой системе отсутствует тип квазисинхронного режима, при котором обе переменные ϕ_1 и ϕ_2 осциллируют во времени в указанном выше смысле.

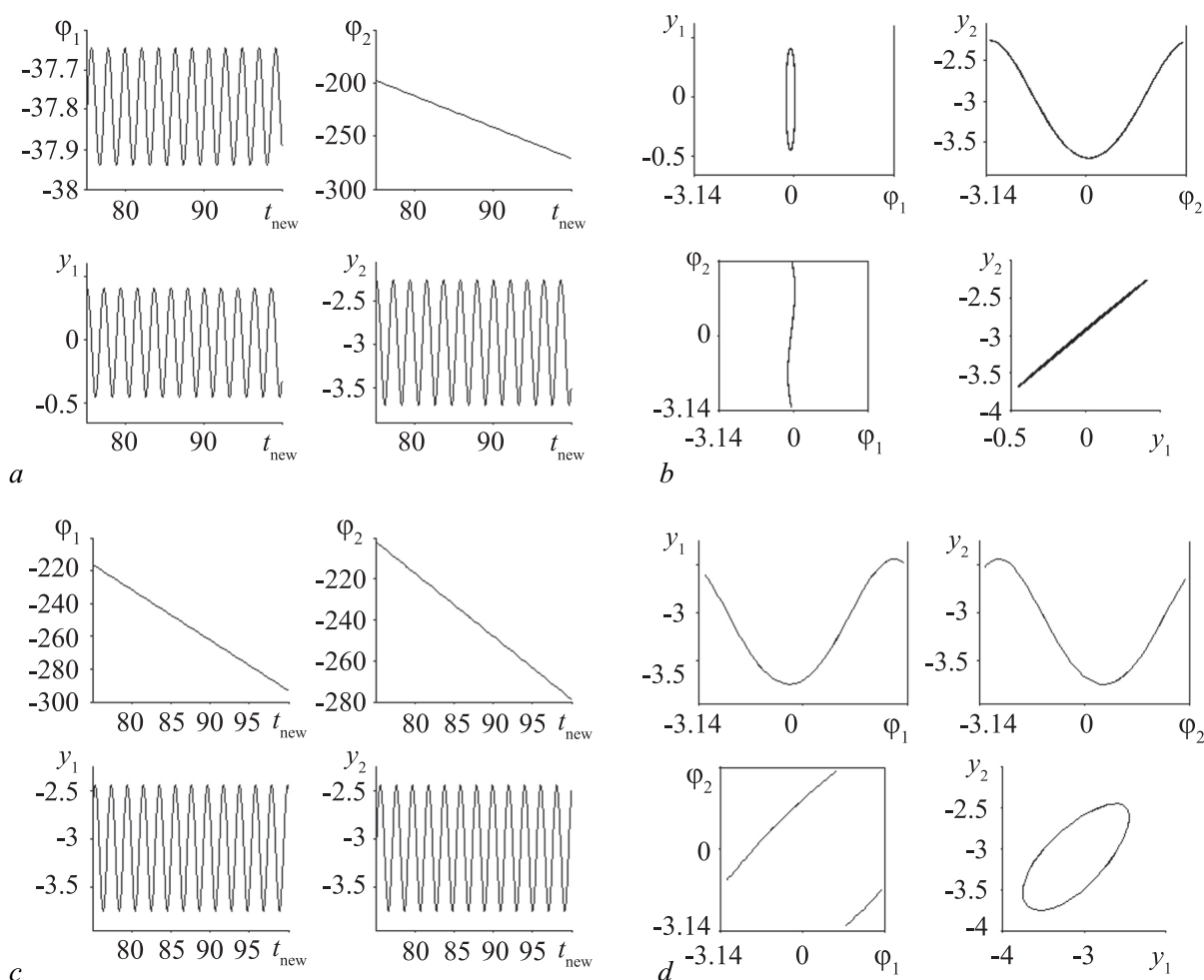


Рис. 4. Характерные осциллограммы переменных и проекции фазового портрета при $\lambda = 0.3$: $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 1$ – область a_2 (a, b); $\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 1$ – область a_5 (c, d)

Fig. 4. Typical oscillograms of variables and projections of the phase portrait for $\lambda = 0.3$: $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 1$ – area a_2 (a, b); $\gamma_1 = 0.9, \gamma_2 = 1$ – area a_5 (c, d)

Такой результат можно рассматривать как следствие наличия функции Ляпунова у системы (15), которая исключает существование колебательных предельных циклов.

Установлено, что увеличение параметра λ ведет к уменьшению общего количества комбинаций различных режимов работы сети и увеличению области, где существует только синхронный режим (см. рис. 3). При этом понятно, что вместе с этим параметром растут потери кинетической энергии ротора, что негативно сказывается на работе реальной сети.

Для того чтобы понять, как изменится динамика энергосети в виде хаб-кластера при увеличении числа ее элементов, рассмотрим хаб-кластер, состоящий уже из одного потребителя и трех генераторов, и сравним его поведение с предыдущим примером.

В этом случае рассмотрим сечение пространства параметров $\{\gamma_3 = \text{const}\}$ (рис. 5, a). Область, которую ограничивает след области S в этом сечении, обозначим через S_{sec} . Установлено, что число комбинаций различных режимов в случае хаб-кластера из четырех элементов больше, чем в случае сети из трех элементов. Поэтому удобно построить не одно разбиение области S_{sec} на области с различными режимами работы хаб-кластера, а три отдельных разбиения, характеризующие способ изменения каждой переменной φ_i . Налагая эти разбиения друг на друга, можно

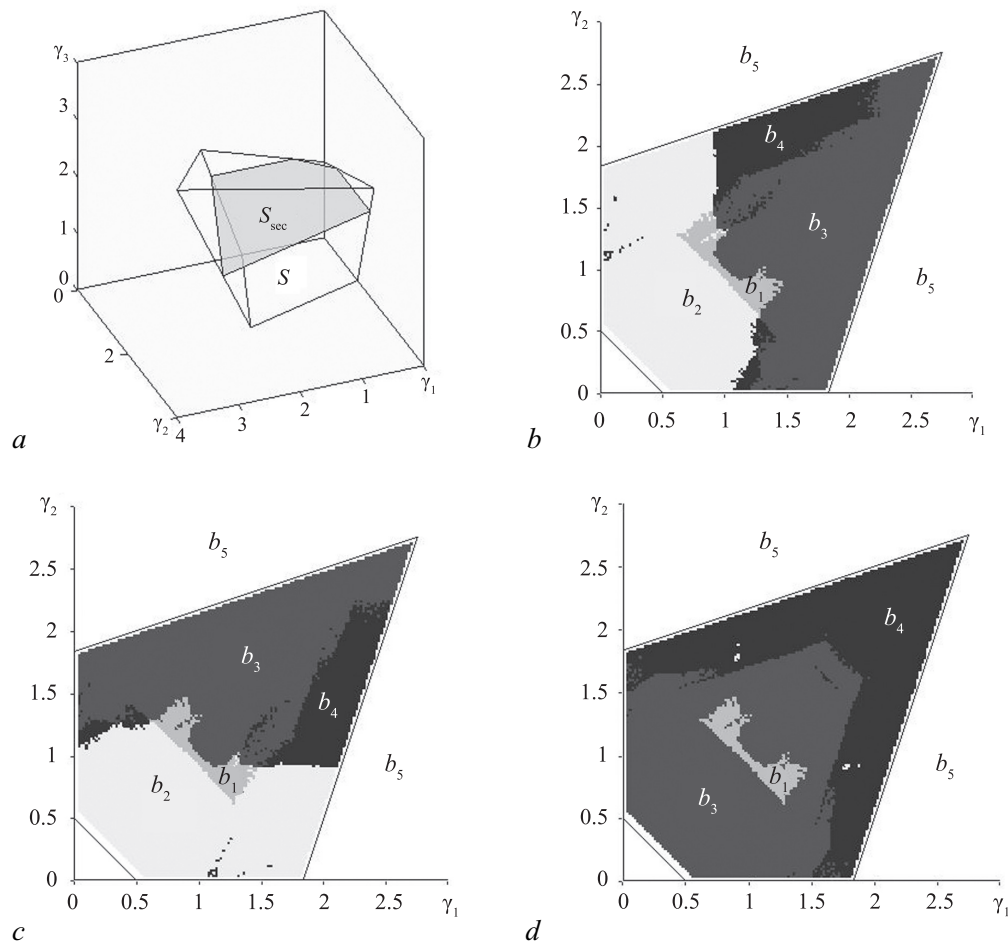


Рис. 5. Область параметров S и ее сечение S_{sec} при $\gamma_3 = 1.5$ (a); разбиение сечения S_{sec} на режимы изменения переменных при $\lambda = 0.5$ для ϕ_1 (b); ϕ_2 (c); ϕ_3 (d)

Fig. 5. The region of parameters S and its section S_{sec} for $\gamma_3 = 1.5$ (a); dividing of the section S_{sec} into the modes of changing variables for $\lambda = 0.5$ for variable ϕ_1 (b); ϕ_2 (c); ϕ_3 (d)

в итоге получить диаграмму режимов работы сети. Примеры таких разбиений на плоскости параметров (γ_1, γ_2) приведены на рис. 5, b–d. На рис. 6 приведены осциллограммы переменных и проекции фазового портрета некоторых характерных режимов хаб-кластера.

Рассмотрим, как изменяются переменные в режимах из разных областей разбиений. При значениях параметров из области b_1 переменная ϕ_i стремится к своему значению в состоянии равновесия O_1 . При наложении диаграмм эти области совпадают и образуют область глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия O_1 , то есть в системе при любых начальных условиях реализуется синхронный режим. Во всех остальных областях параметров, принадлежащих области S_{sec} , помимо синхронного режима, существуют и другие режимы изменения переменных ϕ_i . При значениях параметров из области b_2 переменная ϕ_i осциллирует около некоторого среднего значения, что отвечает квазисинхронному взаимодействию между потребителем и генератором с номером $i + 1$. При значениях параметров из области b_3 переменная ϕ_i убывает, что отвечает асинхронному взаимодействию между потребителем и генератором с номером $i + 1$. В области b_4 могут реализоваться оба описанных режима изменения переменной ϕ_i из областей b_2 и b_3 . При значениях параметров из области b_5 не существует синхронный режим работы сети, поэтому ее рассмотрение не представляет интереса.

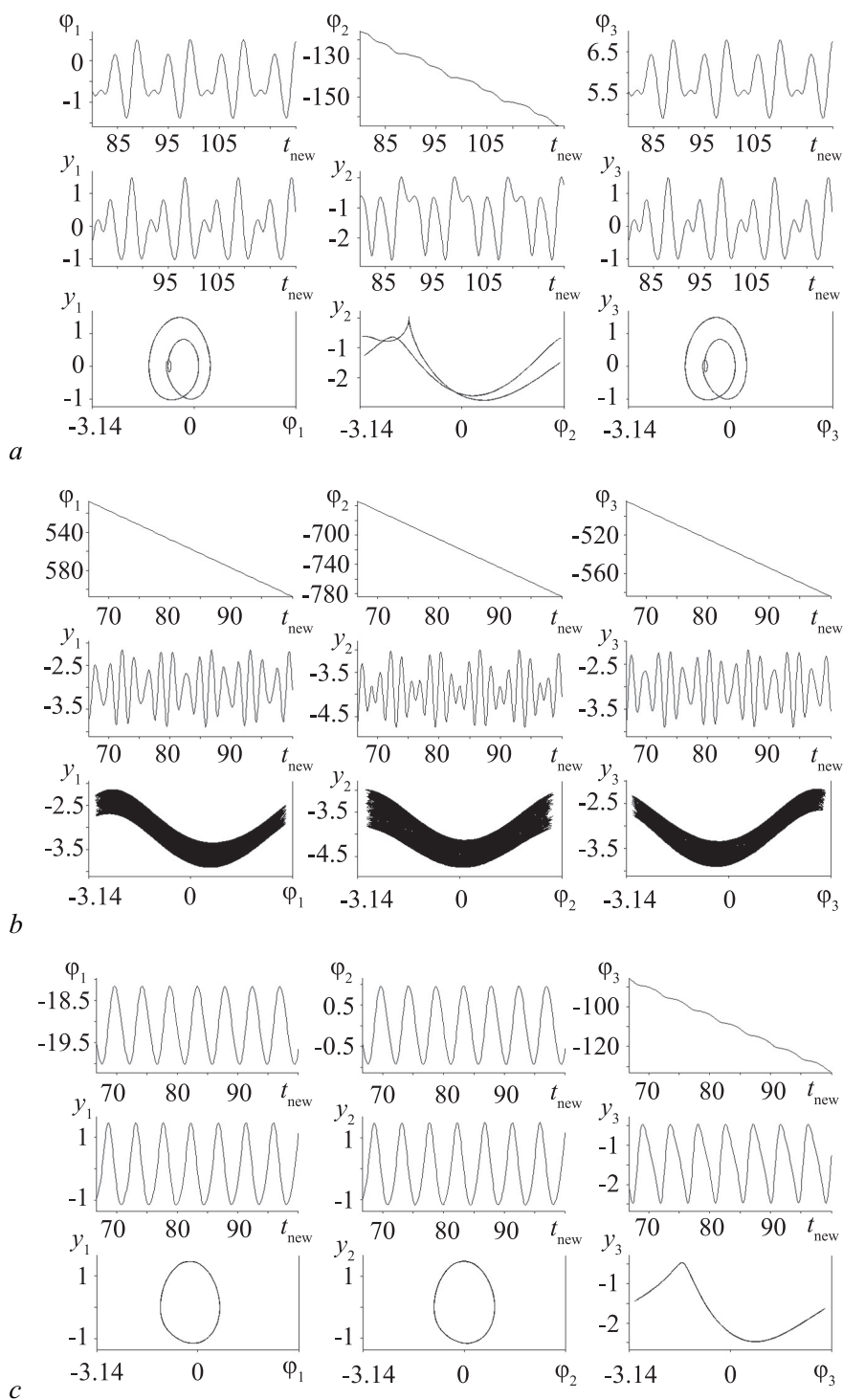


Рис. 6. Примеры осциллограмм переменных и некоторых проекций фазового портрета при $\lambda = 0.5$: $\gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 1.5$ (a); $\gamma_1 = 1.6, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 1.5$ (b); $\gamma_1 = 0.7, \gamma_2 = 0.5, \gamma_3 = 1.5$ (c)

Fig. 6. Examples of oscillograms of variables and some projections of the phase portrait for $\lambda = 0.5$: $\gamma_1 = 1.5, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 1.5$ (a); $\gamma_1 = 1.6, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 1.5$ (b); $\gamma_1 = 0.7, \gamma_2 = 0.5, \gamma_3 = 1.5$ (c)

Видно, что наряду с синхронным режимом в системе могут сосуществовать различные квазисинхронные режимы и асинхронный режим. Несмотря на большее многообразие динамических режимов работы хаб-кластера из четырех элементов по сравнению с сетью из трех элементов, не наблюдаются какие-либо качественно новые режимы работы сети, усложняется лишь поведение отдельных переменных ϕ_i . Эти результаты показывают, что выявленные свойства хаб-кластеров из трех и четырех элементов являются типичными для сетей с такой топологией.

5. Пороговая устойчивость синхронного режима

Поскольку вне области значений параметров, отвечающих глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия O_1 , система (15) может иметь аттракторы, отличные от устойчивого состояния равновесия, синхронный режим будет устанавливаться лишь при некоторых начальных условиях, которые формируют область притяжения состояния равновесия O_1 . Нахождение границы области притяжения состояния равновесия O_1 системы (15) является сложной задачей, требующей больших вычислительных затрат. Поэтому представляет большой интерес получение аналитической оценки величины области притяжения состояния равновесия O_1 .

Для этого в фазовом пространстве системы (15) введем в рассмотрение функцию вида

$$V(y_i, \phi_i) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j + \frac{2N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\phi_i^{(1)}}^{\phi_i} [\sin(\zeta) - d_i] d\zeta. \quad (21)$$

Производная по времени от функции (21), вычисленная в силу системы (15), имеет вид

$$\frac{dV}{dt_{\text{new}}} = -2\lambda \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j \right) \leq 0. \quad (22)$$

В силу того, что функция $V(y_i, \phi_i)$, определяемая выражением (21), является положительно определенной при значениях параметров $\gamma_i \in S_V$, причем $S_V \in S$, обращается в ноль в точке O_1 , а ее производная по времени, вычисленная в силу системы (15), является отрицательно определенной функцией, функция $V(y_i, \phi_i)$ является функцией Ляпунова системы (15). Область S_V будем называть областью существования функции Ляпунова (21).

Перепишем выражение (21)

$$V(y_i, \phi_i) = V_1(y_i) + V_2(\phi_i),$$

$$V_1(y_i) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j, V_2(\phi_i) = \frac{2N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\phi_i^{(1)}}^{\phi_i} [\sin(\zeta) - d_i] d\zeta. \quad (23)$$

Рассмотрим поверхности уровня функции Ляпунова (21), проходящие через седла $V(O_k) = C_k$, $k = 2, 3, \dots, N-1$. Найдем

$$C_{\min}^{\text{saddle}} = \min(C_k^{\text{saddle}}). \quad (24)$$

Множество точек фазового пространства системы (15), ограниченное замкнутой частью поверхности уровня $V(y_i, \phi_i) = C_{\min}^{\text{saddle}}$, охватывающей устойчивое состояние равновесия O_1 , принадлежит области притяжения этой точки. Поэтому указанную часть поверхности уровня можно

считать оценкой области притяжения состояния равновесия O_1 [16]. В качестве оценки величины области притяжения состояния равновесия O_1 будем использовать минимальное расстояние от этой точки до поверхности уровня $V(y_i, \phi_i) = C_{\min}^{\text{saddle}}$, которое обозначим r^{\min} . Найдем эту величину.

Рассмотрим сечение $\phi_i = \phi_i^*, i = 1, 2, \dots, N - 1$ поверхности уровня функции Ляпунова $V(y_i, \phi_i) = C_{\min}^{\text{saddle}}$, которое можно записать в виде

$$V_1(y_i) = C, \quad (25)$$

где $C \equiv C_{\min}^{\text{saddle}} - V_2(\phi_i^*) > 0$. В левой части выражения (25) стоит положительно определенная квадратичная форма $V_1(y_i)$, которую можно преобразовать к каноническому виду, тогда выражение (25) примет вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{x_i}{\sqrt{C/\lambda_i}} \right)^2 = 1, \quad (26)$$

где λ_i – собственные числа матрицы квадратичной формы $V_1(y_i)$, которую будем обозначать через A

$$A : a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = -\frac{1}{N-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad i \neq j. \quad (27)$$

Из выражений (27) видно, что матрица A является циркулянтном, поэтому ее собственные числа могут быть найдены по известной для циркулянтов формуле [28]:

$$\lambda_j = 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-2} \omega_j^k, \quad \omega_j = e^{i \frac{2\pi j k}{N-1}}, \quad i^2 = -1, \quad j = 0, 1, \dots, N-2. \quad (28)$$

Из формулы (28) легко найти, что

$$\lambda_0 = \frac{1}{N-1}. \quad (29)$$

Определим значения остальных собственных чисел $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N-2$. В силу того, что матрица A вещественная и симметричная, ее собственные числа вещественны. Поэтому выражение (28) можно записать в виде

$$\lambda_j = 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-2} \cos\left(\frac{2\pi j k}{N-1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (30)$$

Сумму, стоящую в правой части равенства (30), можно вычислить, используя следующую формулу из тригонометрии:

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (31)$$

Положив в формуле (31) $n = N-2, x = 2\pi j/(N-1)$, после преобразований получим, что искомая сумма равна (-1) и, следовательно,

$$\lambda_j = \frac{N}{N-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (32)$$

Таким образом, уравнение (26) задает эллипсоид, длина наименьшей полуоси которого вычисляется по формуле

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{N-1}{N} (C_{\min}^{\text{saddle}} - V_2(\phi_i^*))}. \quad (33)$$

Тогда расстояние r^{\min} имеет вид

$$r^{\min} = \min \left(\sqrt{l_{\min}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (\phi_i^* - \phi_i^{(1)})^2} \right). \quad (34)$$

Рассматривая правую часть выражения (34) как функцию переменных ϕ_i^* , можно показать, что она имеет единственный минимум при $\phi_i^* = \phi_i^{(1)}$, поэтому

$$r^{\min} = \sqrt{\frac{N-1}{N} C_{\min}^{\text{saddle}}}. \quad (35)$$

В качестве численной оценки области притяжения состояния равновесия O_1 используем максимальное значение радиуса сферы с центром в этой точке, при котором все траектории с начальными условиями на этой сфере асимптотически стремятся к состоянию равновесия O_1 .

Рассмотрим сначала, как меняется величина r^{\min} при изменении параметров γ_1 и γ_2 . На рис. 7, *b-d* приведены зависимости $r^{\min}(\gamma_1, \gamma_2)$ вдоль прямых $\gamma_2 = -2\gamma_1 + \gamma_1^*$ для $\gamma_1^* = 1$, $\gamma_1^* = 1.5$ и $\gamma_1^* = 2$, соответственно. Рассматриваемые прямые перпендикулярны прямой $\gamma_2 = \gamma_1$, относительно которой система обладает свойствами симметрии. При этом значения γ_1^* выбраны таким образом, чтобы прямые не пересекали область параметров a_1 . Видно, что при удалении от области a_1 величина r^{\min} убывает. Общий вид зависимости $r^{\min}(\gamma_1, \gamma_2)$ для параметров γ_1, γ_2 из области S_V приведен на рис. 7, *e*.

Далее рассмотрим, как изменяется величина r^{\min} при увеличении числа элементов хаб-кластера. Для этого положим $\gamma_i = \gamma, i = 1, 2, \dots, N-1$. В этом случае выражение для величины r^{\min} примет вид

$$r^{\min} = \sqrt{2 \left(2\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{N}\right)^2} + \frac{\gamma}{N} \left(-\pi + 2 \arcsin\left(\frac{\gamma}{N}\right)\right) \right)}. \quad (36)$$

Ограничимся значениями параметра $\gamma \in (0, 2]$ для того, чтобы функция Ляпунова (21) существовала для всех $N \geq 3$. Можно показать, что при таких значениях параметра γ функция $r^{\min}(\gamma)$ является монотонно убывающей. Зависимости $r^{\min}(\gamma_1)$ при разных значениях числа N представлены на рис. 7, *f*. Видно, что величина r^{\min} растет с увеличением числа N элементов хаб-кластера.

Таким образом, значение величины r^{\min} , которое может быть вычислено с помощью описанного выше подхода, дает наглядную оценку величины области притяжения состояния равновесия O_1 и определяет множество начальных условий, при которых система возвращается в исходный синхронный режим. Отметим, что система может принимать указанные начальные условия после воздействия какого-либо возмущения, поэтому можно сказать, что величина r^{\min} дает оценку границы безопасных возмущений системы.

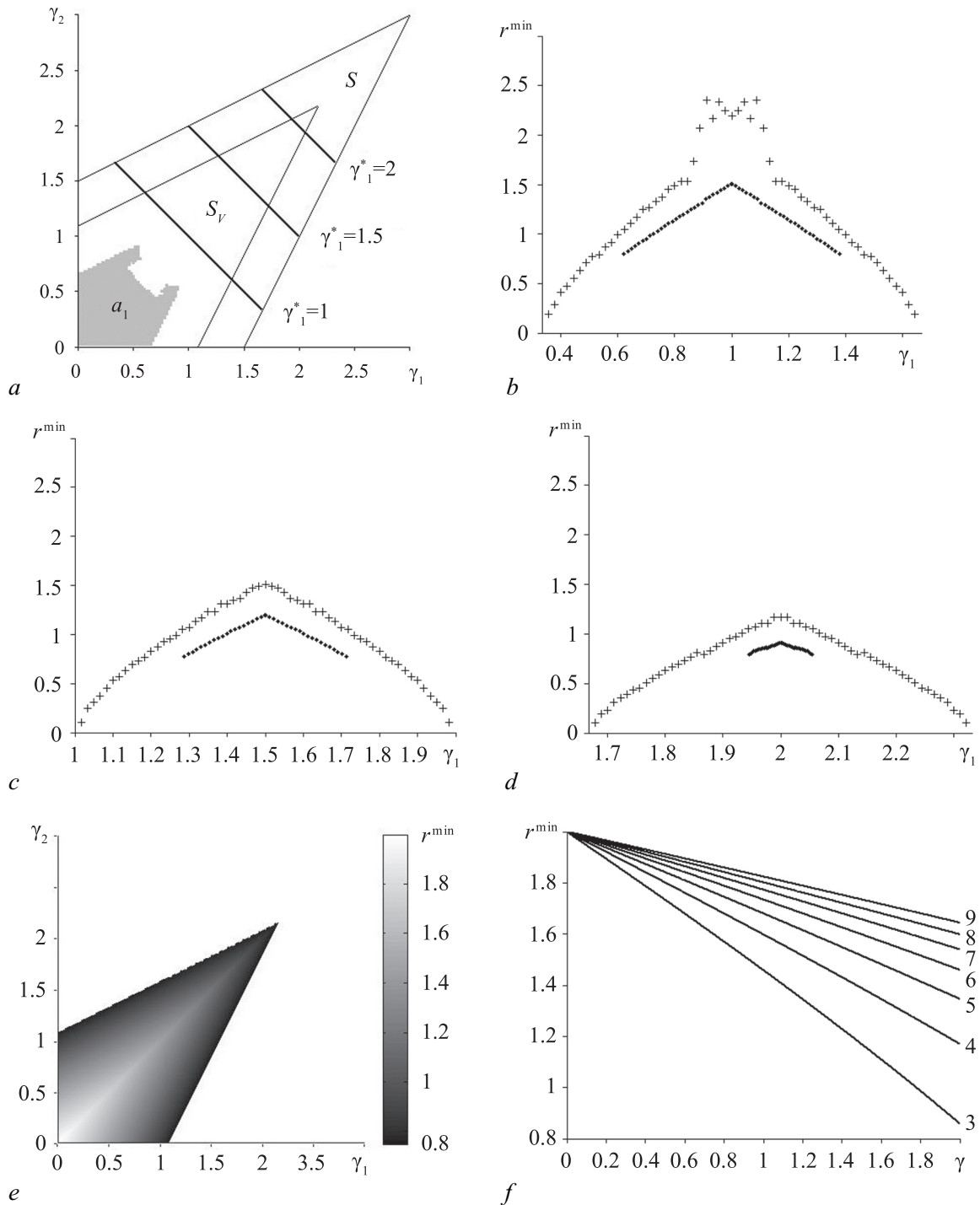


Рис. 7. *a* – взаимное расположение областей существования состояний равновесия S и функции Ляпунова S_V , а также прямых, на которых рассчитывается величина r^{\min} ; *b, c, d* – зависимость $r^{\min}(\gamma_1)$, определенная аналитически (ромбы) и численно (кресты) при $\gamma_1^* = 1$, $\gamma_1^* = 1.5$ и $\gamma_1^* = 2$, соответственно; *e* – значение величины r^{\min} в области S_V ; *f* – вид зависимости $r^{\min}(\gamma)$ при разном количестве элементов в хаб-кластере (справа от кривых указано соответствующее им количество элементов сети). Значение параметра $\lambda = 0.3$

Fig. 7. *a* – the mutual arrangement of the regions of existence of the equilibrium states S and the Lyapunov function S_V , as well as the straight lines on which the quantity r^{\min} is calculated; *b, c, d* – dependence $r^{\min}(\gamma_1)$ is determined by analytical (rhombuses) and numerical (crosses) methods for $\gamma_1^* = 1$, $\gamma_1^* = 1.5$ and $\gamma_1^* = 2$ respectively; *e* – the quantity r^{\min} in area S_V ; *f* – type of the dependence $r^{\min}(\gamma)$ with a different number of elements in the hub cluster (the corresponding number of network elements is indicated to the right of the curves). Parameter value $\lambda = 0.3$

Заключение

В работе рассмотрена модель энергосети с топологией хаб-кластера. Данная сеть является типичным элементом крупных энергосетей и может оказывать сильное влияние на динамику всей сети в целом.

Для хаб-кластеров из трех и четырех элементов построены разбиения пространства параметров на области, отвечающие различным режимам работы таких энергосетей. В частности, выделены области глобальной асимптотической устойчивости синхронных режимов хаб-кластеров, то есть области их безаварийной работы при любых начальных условиях.

Для характеристики режимов хаб-кластеров вне областей глобальной асимптотической устойчивости был предложен подход, базирующийся на втором методе Ляпунова, который позволяет дать наглядную оценку области безопасных возмущений, не нарушающих синхронные режимы работы сетей.

Библиографический список

1. *Grzybowski J.M.V., Macau E.E.N., Yoneyama T.* Power-Grids as Complex Networks: Emerging Investigations into Robustness and Stability. Springer International Publishing, 2012. P. 287–315.
2. *Pagani G.A., Aiello M.* The power grid as a complex network: A survey // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013. Vol. 392, no. 11. P. 2688–2700.
3. *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979.
4. *Окуловская Т.Я., Павлова М.В., Паниковская Т.Ю., Смирнов В.А.* Устойчивость электрических систем. Учебное пособие. Екатеринбург: УГТУ, 2001.
5. *Хрущев Ю.В., Заповодников К.И., Юшков А.Ю.* Электромеханические переходные процессы в электроэнергетических сетях: Учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012.
6. *Наровлинский В.Г.* Современные методы и средства предотвращения асинхронного режима электроэнергетической системы. М.: Энергоатомиздат, 2004.
7. *Смирнов К.А.* О критериях статической устойчивости энергосистем // *Электричество*. 1978. № 3. С. 12–16.
8. *Веников В.А., Цукерник Л.В.* Развитие методов исследования устойчивости электрических систем // *Электричество*. 1978. № 2. С. 1–7.
9. *Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D.* Self-organized synchronization in decentralized power grids // *Physical Review Letters*. 2012. Vol. 109, no. 6. 064101.
10. *Witthaut D., Timme M.* Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage // *New Journal of Physics*. 2012. 083036
11. *Menck P.J., Heitzig J.* How dead ends undermine power grid stability // *Nature Communications*. 2014. Vol. 5. P. 3969.
12. *Lozano S., Buzna L., Diaz-Guilera A.* Role of network topology in the synchronization of power systems // *The European Physical Journal B*. 2012. Vol. 85, no. 7. P. 231.
13. *Motter A.E., Myers S.A., Anghel M., Nishikawa T.* Spontaneous synchrony in power-grid networks // *Nature Physics*. 2013. Vol. 9. P. 191–197.
14. *Fortuna L., Frasca M., Fiore S.A.* Analysis of the Italian power grid based on Kuramoto-like model // 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). Leon, Spain. September 5–8, 2011.

15. *Filatrella, G., Nielsen, A.H., Pedersen, N.F.* Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model // *The European Physical Journal B*. 2008. Vol. 61, no. 4. P. 485–491.
16. *Дмитричев А.С., Захаров Д.Г., Некоркин В.И.* О глобальной устойчивости синхронного режима в хаб-кластерах энергосетей // *Известия вузов. Радиофизика*. 2017. Т. 60, № 6. С. 564–571.
17. *Аринушкин П.А., Анищенко В.С.* Анализ синхронных режимов работы цепочки связанных осцилляторов энергосетей // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 3. С. 62–77.
18. *Belykh V.N., Bolotov M.I., Osipov G.V.* Kuramoto phase model with inertia: Bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos // *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2015. Vol. 22, no. 5. P. 595–608.
19. *Nishikawa T., Motter A.E.* Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization // *New Journal of Physics*. 2015. Vol. 17, no. 1. 015012.
20. *Chang Y., Wang X., Xu D.* Bifurcation analysis of a power system model with three machines and four buses // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, no. 5. P. 1650082.
21. *Zhang W., Huang S., Mei S. et al.* Exponential synchronization of the Kuramoto model with star topology // *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*. Chengdu, China. July 27–29, 2016.
22. *Zhang X., Papachristodoulou A.* A real-time control framework for smart power networks with star topology // *American Control Conference (ACC)*. Washington, DC, USA. June 17–19, 2013.
23. *Schiffer J., Efimov D., Ortega R.* Almost global synchronization in radial multi-machine power systems // *57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018)*. Miami Beach, FL, United States. December 17–19, 2018.
24. *Long Vu Th., Turitsyn K.* Lyapunov functions family approach to transient stability assessment // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016. Vol. 31, no. 2. P. 1269–1277.
25. *Горев А.А.* Переходные процессы синхронной машины. М.: Государственное Энергетическое Издательство, 1950.
26. *Park R.* Two-reaction theory of synchronous machines: Generalized method of analysis – part I // *Transactions of the AIEE*. 1929. Vol. 48. P. 716–730.
27. *Dorfler F., Bullo F.* Synchronization and transient stability in power networks and nonuniform Kuramoto oscillators // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2012. Vol. 50, no. 3. P. 1616–1642.
28. *Gray R.M.* Toeplitz and circulant matrices: A review // *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*. 2006. Vol. 2, no. 3. P. 155–239.
29. *Страхов С.В., Вайман М.Я.* Современное состояние и возможности практического применения второго метода Ляпунова для расчета динамической устойчивости электроэнергетических систем // *Электричество*. 1977. № 10. С. 7–9.
30. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1979.

References

1. Grzybowski J.M.V., Macau E.E.N., Yoneyama T. Power-Grids as Complex Networks: Emerging Investigations into Robustness and Stability. *Springer International Publishing*, 2012, pp. 287–315.
2. Paganì G.A., Aiello M. The power grid as a complex network: A survey. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, vol. 392, no. 11, pp. 2688–2700.
3. Zhdanov P.S. Stability Issues for Electrical Systems. М.: Energy, 1979 (in Russian).

4. Okulovskaya T.Y., Pavlova M.V., Panikovskaya T.Yu., Smirnov V.A. Stability of Electrical Systems. Training manual. Yekaterinburg: UGTU, 2001 (in Russian).
5. Hrushev Yu.V., Zapodovnikov K.I., Yushkov A.Yu. Electromechanical Transients in Electric Networks: Training Manual. Tomsk: Publishing house of Tomsk Polytechnic University, 2012 (in Russian).
6. Narovlinskiy V.G. Modern Methods and Means of Preventing the Asynchronous Mode of the Electric Power System. M.: Energoatomizdat, 2004 (in Russian).
7. Smirnov K.A. On criteria for steady state stability of power system. *Elektrichestvo*, 1978, no. 3, pp. 12–16 (in Russian).
8. Venikov V.A., Tsukernik L.V. The development of methods for power systems stability studies. *Elektrichestvo*, 1978, no. 2, pp. 1–7 (in Russian).
9. Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D. Self-organized synchronization in decentralized power grids. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 109, no. 6, 064101.
10. Witthaut D., Timme M. Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage. *New Journal of Physics*, 2012, 083036.
11. Menck P.J., Heitzig J. How dead ends undermine power grid stability. *Nature communications*, 2014, vol. 5, p. 3969.
12. Lozano S., Buzna L., Diaz-Guilera A. Role of network topology in the synchronization of power systems. *The European Physical Journal B.*, 2012, vol. 85, no. 7, p. 231.
13. Motter A.E., Myers S.A., Anghel M., Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Physics*, 2013, vol. 9, pp. 191–197.
14. Fortuna L., Frasca M., Fiore S.A. Analysis of the Italian power grid based on Kuramoto-like model. 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). Leon, Spain. September 5–8, 2011.
15. Filatrella, G., Nielsen, A.H., Pedersen, N.F. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *The European Physical Journal B.*, 2008, vol. 61, no. 4, pp. 485–491.
16. Dmitrichev A.S., Zakharov D.G., Nekorkin, V.I. Global stability of a synchronous regime in hub clusters of the power networks. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2017, vol. 60, no. 6, pp. 506–512.
17. Arinushkin P.A., Anishchenko V.S. Analysis of synchronous modes of coupled generators, stability of dynamic modes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 62–77 (in Russian).
18. Belykh V.N., Bolotov M.I., Osipov G.V. Kuramoto phase model with inertia: bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2015, vol. 22, no. 5, pp. 595–608.
19. Nishikawa T., Motter A.E. Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization. *New Journal of Physics*, 2015, vol. 17, no. 1, 015012.
20. Chang Y., Wang X., Xu D. Bifurcation analysis of a power system model with three machines and four buses. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 5, 1650082.
21. Zhang W., Huang S., Mei S. et al. Exponential synchronization of the Kuramoto model with star topology. *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*, Chengdu, China, July 27–29, 2016.
22. Zhang X., Papachristodoulou A. A real-time control framework for smart power networks with star topology. *American Control Conference (ACC)*, Washington, DC, USA, June 17–19, 2013.
23. Schiffer J., Efimov D., Ortega R. Almost global synchronization in radial multi-machine power systems. *57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018)*, Miami Beach, FL, United States, December 17–19, 2018.

24. Long Vu Th., Turitsyn K. Lyapunov functions family approach to transient stability assessment. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2016, vol. 31, no. 2, pp. 1269–1277.
25. Gorev A.A. Transients of Synchronous Machines. M.: State Energy Publishing House, 1950 (in Russian).
26. Park R. Two-reaction theory of synchronous machines: Generalized method of analysis – part I. *Transactions of the AIEE*, 1929, vol. 48, pp. 716–730.
27. Dorfler F., Bullo F. Synchronization and transient stability in power networks and nonuniform Kuramoto oscillators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, vol. 50, no. 3, pp. 1616–1642.
28. Gray R.M. Toeplitz and circulant matrices: A review *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2006, vol. 2, no. 3, pp. 155–239.
29. Strachov S.V. Wyman M.J. The present state of development and possibilities for practical application of Lyapunov’s second method in determining the transient stability of power systems. *Elektrichestvo*, 1977, no. 10, pp. 7–9 (in Russian).
30. Barbashin E.A. Lyapunov’s Functions. M: Science, 1979 (in Russian).



Храменков Владислав Анатольевич – родился в Муроме Владимирской области (1994). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2018). Имеет диплом бакалавра по направлению «Радиофизика» и диплом магистра по направлению «Радиофизика». Аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория колебаний, синхронные машины, энергосети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru



Дмитричев Алексей Сергеевич – родился в 1980 году в селе Слободское Кстовского района Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2002). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2010, ННГУ). Область научных интересов – нелинейная динамика, динамические сети, структурообразование, волны и пространственно-временной хаос, синхронизация. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: admityr@neuron.appl.sci-nnov.ru



Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андропова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru