



«Странные волны» в ансамбле генераторов ван дер Поля

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

*Поступила в редакцию 19.01.2020, принята к публикации 9.02.2020,
опубликована online 30.04.2020*

Цель. Исследование процессов пространственной разупорядоченности и развития фазовой мультистабильности в дискретной среде из ангармонических осцилляторов. **Методы.** Компьютерное моделирование ангармонической среды ансамблем генераторов ван дер Поля с локальными диффузионными связями; численное исследование математической модели, исследование фазовой динамики, визуализация формирующихся пространственных структур при помощи распределения разности фаз. **Результаты.** Показано, что в ансамбле генераторов ван дер Поля существуют пространственно разупорядоченные волновые режимы, аналогичные режимам «странных волн», обнаруженных ранее в модели негармонических фазовых осцилляторов. Выявлены закономерности эволюции странных волн в ансамбле генераторов ван дер Поля с ростом ангармоничности колебаний и при изменении параметра связи. Определены границы области существования режимов странных волн. Показано, что области существования волн с разным числом фазовых сбоев пересекаются, формируя тем самым мультистабильность режимов странных волн. **Заключение.** Переход от гармонических колебаний к периодическим релаксационным может вызывать пространственную разупорядоченность посредством возникновения сбоев фазы, возникающих в произвольных точках дискретной автоколебательной среды. С ростом ангармоничности этот эффект усиливается и среда разбивается на множество чередующихся кластеров с почти синфазными и почти противофазными колебаниями. Такие кластеры взаимодействуют друг с другом, демонстрируя «эффект взаимного отталкивания». Обнаруженные эффекты могут быть интересны для понимания процессов пространственной организации и образования структур в автоколебательных средах с простой временной динамикой.

Ключевые слова: колебания и волны, мультистабильность, пространственные структуры.

Образец цитирования: Шабунин А.В. «Странные волны» в ансамбле генераторов ван дер Поля // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 2. С. 186–200. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-186-200>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-52-12004.

Strange waves in the ensemble of van der Pol oscillators

A. V. Shabunin

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, Saratov 410012, Russia
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Received 19.01.2020, accepted 9.02.2020, published online 30.04.2020

The **purpose** of this paper is to study the processes of spatial disorder and the development of phase multistability in a discrete medium of anharmonic oscillators. **Methods.** An ensemble of diffusively coupled van der Pol oscillators is used as a model of discrete anharmonic medium. The model is investigated by numerical simulation; its phase dynamics is studied. The formed spatial structures are visualized by means of phase difference distribution. **Results.** It is shown that the ensemble of van der Pol generators demonstrates spatially irregular wave modes when the parameter of anharmonicity exceeds certain threshold value. This phenomenon is similar to appearance of strange waves in ensemble of anharmonic phase oscillators. Regularities of evolution of these waves with parameters change are investigated. Regions of existence and stability of the waves are built. It is shown that the strange wave modes form multistability, since stability regions of waves with different numbers of phase defects overlap. **Conclusion.** Transition from harmonic to relaxation oscillations can be followed by a spatial disorder, because of phase failures that might take place at arbitrary points of the discrete self-oscillating medium. This effect increases with the growth of anharmonicity. As a result, the medium is divided into a lot of clusters with almost in-phase and out-of-phase behaviors. Such clusters interact, demonstrating mutual repulsion. The observed phenomena may be interesting for understanding the processes of spatial organization and formation of structures in self-oscillating media with simple temporal dynamics.

Key words: oscillations and waves, multistability, spatial structures.

Reference: Shabunin A.V. Strange waves in the ensemble of van der Pol oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 2, pp. 186–200. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-2-186-200>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. The reported study was funded by RFBR and DFG according to the research project no. 20-52-12004.

Введение

Изучение колебательных и волновых явлений в ансамблях, состоящих из большого числа осцилляторов, показывает, что взаимодействие простых систем может приводить к новым эффектам, не наблюдающимся в подсистемах, взятых по-отдельности [1]. Одно из подобных явлений – синхронизация колебаний [2–4], в результате которой осуществляется захват фаз и подстройка частот автоколебаний в подсистемах. При определенных условиях симметрии это приводит к установлению таких режимов, в которых автоколебания в разных точках дискретной среды оказываются одинаковыми по форме и амплитуде, но сдвинутыми по фазе. Если величины сдвигов между соседними осцилляторами оказываются равными, то такой режим можно рассматривать, как дискретный аналог бегущей автоволны.

Режимы бегущих автоволн в цепочках периодических осцилляторов хорошо известны и подробно исследованы (см. например [5–9]). Как это следует из их определения, данный тип колебаний относится к пространственно-однородным режимам. Однако, в результате усложнения временной либо пространственной динамики они могут трансформироваться в пространственно-нерегулярные волны. Таким образом, пространственно-однородная бегущая волна может быть исходной точкой для формирования пространственного хаоса. Одним из путей этой эволюции является хаотизация колебаний осцилляторов, составляющих дискретную среду [10–13]. Очевидно, что нерегулярность временной динамики отдельного генератора ведет к пространственной

нерегулярности всего ансамбля¹. Другим источником пространственной нерегулярности для автогенераторов, в том числе периодических, может служить мультистабильность парциальных систем [14]. Может ли пространственный хаос наблюдаться в взаимодействующих осцилляторах с простой временной динамикой и при отсутствии мультистабильности? Положительный ответ на этот вопрос был получен в 1997 году в работе Х. Даидо [15], в которой было показано, что пространственный хаос может создаваться в среде, составленной из локально связанных ангармоничных фазовых осцилляторов

$$\dot{\theta}_i = h(\theta_{i-1} - \theta_i) + h(\theta_{i+1} - \theta_i), \quad (1)$$

где $h(\theta) = \sin(\theta) + a \cos(2\theta)$. Если амплитуда второй гармоники a достаточно велика, то в системе (1) наблюдаются волновые режимы, в которых протяженные участки с линейным нарастанием фазы вдоль дискретной среды перемежаются короткими участками фазовых сбояв. В результате, пространственный снимок волны напоминает временную реализацию в режиме переключающейся перемежаемости (on-off intermittency). Эти режимы были названы автором *странными волнами*.

Как видно из уравнения (1), модель, в которой были диагностированы странные волны, является сильно идеализированной: она содержит лишь две гармоники в спектре, и колебания в ней изохронны. Существуют ли странные волны в более реалистичных системах? В 2005 году при исследовании мультистабильности бегущих волн в кольце генераторов ван дер Поля в этой системе были обнаружены автоволновые режимы со сбоями фазы вдоль дискретной среды [16]. Они наблюдались при значениях параметров, соответствующих релаксационным колебаниям генераторов. Необходимо отметить, что ансамбль генераторов ван дер Поля не является расширенным аналогом модели (1), поскольку: (а) спектр ансамбля, в отличие от (1), содержит лишь нечетные гармоники; (б) высшие гармоники никогда не превосходят основной; (в) колебания являются неизохронными. В работе [16] был лишь отмечен факт существования режимов нерегулярных бегущих волн, однако, их детальное исследование проведено не было. Настоящее исследование ставит своей целью восполнить этот пробел. В работе проводится более детальное описание режимов странных волн в ансамбле генераторов ван дер Поля, определяются области существования этих режимов и исследуются закономерности их эволюции при изменении управляющих параметров.

1. Исследуемая система и решения в виде бегущих волн

Рассмотрим кольцо из N ($N = 30$) идентичных генераторов ван дер Поля, в котором между парциальными подсистемами действуют взаимные локальные линейные связи через производные (такие связи также называют *диффузионными*)

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2) \dot{x}_i + x_i = \gamma (\dot{x}_{i+1} + \dot{x}_{i-1} - 2\dot{x}_i). \quad (2)$$

Здесь x_i – динамическая переменная i -го осциллятора, ε – параметр, регулирующий амплитуду и форму колебаний, $\gamma \geq 0$ – параметр силы связей. В силу периодических граничных условий все математические операции с индексами осцилляторов осуществляются по модулю N .

Отдельно взятый генератор ван дер Поля – автоколебательная система, демонстрирующая при $\varepsilon = 0$ бифуркацию мягкого рождения предельного цикла (бифуркация Андронова–Хопфа). При переходе через точку бифуркации в системе возникают квазигармонические колебания бесконечно малой амплитуды. С ростом ε амплитуда и период колебаний увеличиваются,

¹В отсутствие явления полной синхронизации хаоса.

а спектр обогащается высшими гармониками; при $\varepsilon \gg 1$ колебания становятся релаксационными. При объединении генераторов в ансамбль (2) форма колебаний остается прежней, но колебания в соседних точках оказываются сдвинутыми друг относительно друга на постоянный временной интервал (τ): $x_i(t) = x_1(t - (i - 1)\tau)$ – то есть реализуются режимы бегущих волн. Причем, в силу периодических граничных условий, τ может принимать лишь конечное число значений:

$$\tau = \frac{KT}{N}, \quad (3)$$

где $K = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ – целочисленный индекс, называемый далее индексом волны ($2\pi K$ есть волновое число). Нормируя τ на период колебаний, получим фазовые сдвиги между колебаниями подсистем:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T} \quad (4)$$

величина которых определяется индексом K :

$$\Delta\varphi^{(K)} = 2\pi \frac{K}{N}. \quad (5)$$

Таким образом, в ансамбле конечной длины реализуется дискретный и конечный набор пространственных режимов (пространственных мод), характеризуемых целочисленным индексом K . Последний определяется начальными условиями и задает пространственную структуру однородной бегущей волны. Обозначая волну с этим индексом как C^K , получим полный набор пространственных мод $\{C^0, C^1, \dots, C^{N/2}\}$, который может наблюдаться в ансамбле².

2. Бегущие волны в гармоническом приближении

Как уже сказано выше, при малом ε колебания в каждом из генераторов можно считать почти гармоническими:

$$x_i^{(K)}(t) \simeq \rho^{(K)} \cos \left(t + i\Delta\varphi^{(K)} \right), \quad (6)$$

где $\Delta\varphi^{(K)}$ определяется в соответствии с (5), а амплитуда $\rho^{(K)}$ вычисляется по формуле (см. [16])

$$\rho^{(K)} = 2\sqrt{\varepsilon - 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi^{(K)})}. \quad (7)$$

Рождение каждой из волн (6) происходит при $\rho^{(K)} = 0$, то есть на прямой линии

$$\varepsilon = 2\gamma(1 - \cos \Delta\varphi^{(K)}). \quad (8)$$

При фиксированном γ последовательность бифуркаций рождения бегущих волн соответствует возрастанию их волновых чисел. Соответственно, только первая из этих бифуркаций (для $K = 0$) приводит к появлению устойчивых колебаний, а все остальные бифуркационные линии (8) «невидимы». Тем не менее, рожденные на них автоволны в дальнейшем могут приобрести устойчивость и стать наблюдаемыми.

²Поскольку положительные и отрицательные значения волнового числа влияют только на направление распространения волны, будем рассматривать только $K \geq 0$.

Устойчивость гармонических бегущих волн исследована в ряде работ [7, 9, 16]. В работе [7] определено *фазовое условие устойчивости* бегущих волн: набег фазы на длине связей должен быть в диапазоне $[0 : \pi/2]$. Применительно к рассматриваемой системе (2) это означает, что устойчивыми могут быть лишь волны с $0 \leq \Delta\varphi^{(K)} < \pi/2$ то есть при:

$$0 \leq K < \left[\frac{N}{4} \right], \quad (9)$$

где скобки означают взятие целой части числа. Таким образом, для рассматриваемого здесь ансамбля из тридцати осцилляторов полный набор устойчивых мод равен восьми: от C^0 до C^7 . Более короткие волны при диффузионном типе связи неустойчивы. В дополнение к фазовому, в работе [9] был проведен амплитудный анализ устойчивости для кольца гармонических осцилляторов, на основании которого в [16] получены формулы для устойчивости K -волны в ансамбле (2):

$$\varepsilon > \gamma \left(2 - 4 \cos \left(\Delta\varphi^{(K)} \right) + \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right)}{\cos \left(\Delta\varphi^{(K)} \right)} \right). \quad (10)$$

Совместно с (9) они определяют области устойчивости для гармонических волн. Каждая такая область располагается внутри конуса, образованного линиями (10) и $\gamma = 0$; причем области для волн с большим K вложены внутрь областей с меньшим K (см. рис. 6, а в работе [17]).

3. Численное исследование ангармонических волн

При $\varepsilon \gg 0$ колебания в осцилляторах становятся ангармоническими и их теоретический анализ существенно усложняется. Поэтому дальнейшие результаты получены в численных исследованиях. Для этого уравнения (2) численно интегрировались из начальной точки $\mathbf{x}(0)$, в качестве которой выбиралась гармоническая K -волна (уравнение (6) совместно с (7) и (4)). Для визуализации пространственной структуры полученного решения по траектории $\mathbf{x}(t)$ строилось сечение Пуанкаре в виде выборки $\mathbf{X}(n) = \mathbf{x}(t_n)$, где t_n – n -й момент пересечения траекторией гиперплоскости $\dot{x}_1 = 0$. График $X_i(n)$ как функции пространственной координаты i есть *пространственный снимок* волны в фиксированный момент времени t_n . Семейство таких пространственных снимков, построенных для разных n и наложенных друг на друга, позволяет визуализировать пространственную структуру режима и будет называться далее *пространственным профилем* волны. Пример пространственного профиля для бегущей волны с $K = 5$ приведен на рис. 1, а. Из него хорошо видно, что волна обладает пространственным периодом (длиной волны), который K раз укладывается на периоде дискретной среды. Для выявления характера режима также строились *пространственные профили фаз* – графики зависимости разностей фаз между колебаниями текущего и соседнего (предыдущего) осцилляторов $\Delta\varphi$ от координаты осциллятора i . Как следует из формулы (4), разность фаз пропорциональна временному сдвигу между колебаниями соседних осцилляторов, который для бегущей волны является константой. Соответственно, для C^5 фазовый профиль представляет собой горизонтальную прямую линию, что и подтверждается расчетом (рис. 1, б). Однако, для негармонических колебаний однородность в распределении фазы вдоль ансамбля может нарушаться (см. [15, 16]). При этом величина суммарного набег фазы должна сохраняться и для таких режимов. Поэтому для диагностиро-

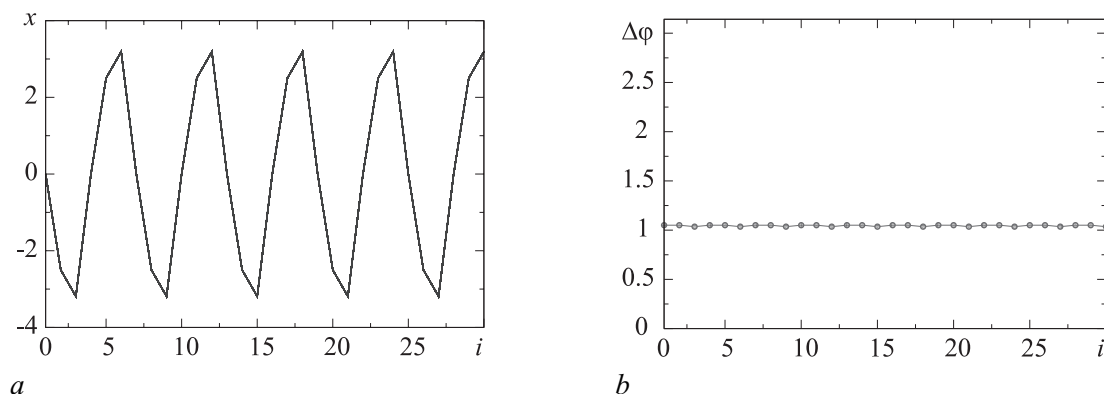


Рис. 1. Пространственный (a) и фазовый (b) профили для волны C^5 ; значения параметров: $\varepsilon = 3, \gamma = 0.1$

Fig. 1. Spatial (a) and phase (b) profiles for wave C^5 ; parameter values: $\varepsilon = 3, \gamma = 0.1$

вания волновой моды с заданным K , как однородной, так и неоднородной, помимо фазового профиля, использовалась также величина суммарного фазового сдвига по длине ансамбля:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Delta\varphi_i.$$

Равенство величины Φ значению $2\pi K$ может служить критерием принадлежности рассматриваемого волнового режима к моде C^K .

4. Эволюция волновой моды C^5

Исследования показывают, что поведение волн с разными волновыми индексами качественно схожи. Выберем для определенности одну из бегущих волн, например, отображенную на рис. 1, a волну с $K = 5$ и дальнейшее рассмотрение проведем на ее примере. Определим сначала область существования выбранной моды и сопоставим ее с аналитическим выражением (10). Для этого будем случайным образом задавать значения параметров ε и γ и, выбирая начальные условия, соответствующие гармоническому приближению (6), численно интегрировать уравнения (2) на большом временном интервале; после чего рассчитаем распределение разностей фаз вдоль ансамбля. Контроль выхода на заданную моду осуществляется по величине суммарного фазового сдвига Φ , который в данном случае должен быть равен 10π .

В результате проведенного исследования была получена карта моды C^5 в области параметров $0 < \gamma \leq 1$ и $0 < \varepsilon \leq 20$, которая изображена на рис. 2 в виде заштрихованной области. Построена также прямая (10), ограничивающая снизу область устойчивости данной моды в гармоническом приближении, обозначенная как l_s . Как видно из рисунка, при слабой связи нижняя граница области существования моды (кривая l_1) близка к линии l_s , но отходит от нее при большей связи. В последнем случае, область существования оказывается также ограниченной «сверху» по параметру ε (линия l_2). Таким образом, в отличие от гармонической бегущей волны, область существования негармонической волны оказывается ограниченной. Эта особенность уже была отмечена в работе [16]. Однако в ходе настоящего исследования была выявлена еще одна область существования моды C^5 , располагающаяся в виде расширяющейся полосы вдоль оси $\gamma = 0$ и ограниченная «снизу» по параметру ε . Последняя отмечена

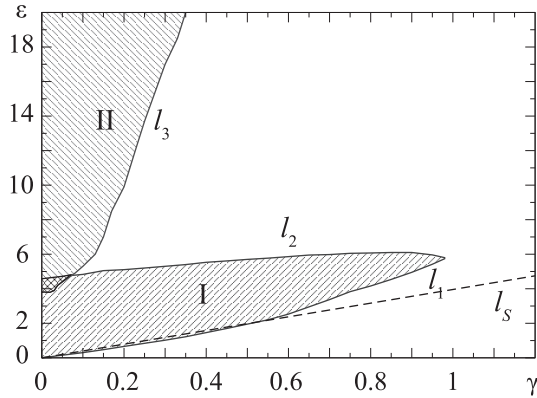


Рис. 2. Области существования волновой моды C^5 : I – зона пространственно однородной волны, II – зона пространственно нерегулярных волн

Fig. 2. Regions of wave mode C^5 existence: I – region of spatially-homogeneous wave, II – region of spatially-irregular waves

на рис. 2 как область II. Исследования показывают, что в зонах I и II наблюдаются разные колебательные режимы, объединяемые одинаковым значением суммарного фазового сдвига $\Phi = 10\pi$, но с разными фазовыми профилями. Первая соответствует исходной однородной бегущей волне C^5 (см. рис. 1, a, b), а вторая – семейству пространственно неоднородных бегущих волн. Пространственный профиль одного из таких режимов показан на рис. 3, a. Видно, что эти колебания не обладают строгим пространственным периодом, сохраняя периодичность лишь в среднем. Различия становятся более наглядными, если построить для данного режима фазовый профиль (см. рис. 3, b). Как видим, для данного типа волн распределение разностей фаз более не является постоянным, как в бегущей волне,

а разбивается на пространственные кластеры: интервалы с почти постоянным сдвигом фаз «перемежаются» интервалами, на которых разности фаз существенно отклоняются от постоянного уровня. Последние будем называть *фазовыми сбоями* или *фазовыми дефектами*.

Таким образом, на базе единой волновой моды C^5 наблюдается два вида разных режимов: пространственно однородная бегущая волна и семейство странных волн с разным числом сбоев. Если первый режим полностью идентифицируется своим волновым индексом K , то для идентификации странной волны необходимо знать также число фазовых дефектов и их расположение вдоль ансамбля. Волну, имеющую N_d фазовых сбоев, будем далее обозначать как C^{K, N_d} .

Для различения двух типов волн – однородной и неоднородной – в описанный выше алгоритм построения области существования моды C^5 был добавлен блок для анализа пространственного распределения разностей фаз $\Delta\phi_i$. Величина неоднородности этого распределения может быть определена либо по значению среднеквадратичного отклонения $\sigma_{\Delta\phi}$, либо по равно-

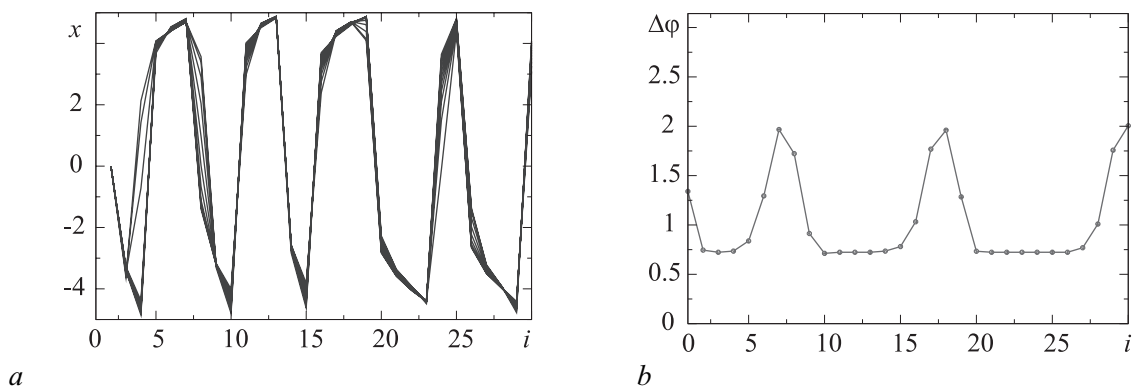


Рис. 3. Волна с тремя дефектами $C^{5,3}$: a – пространственный профиль и b – распределение разностей фаз; значения параметров: $\varepsilon = 6$, $\gamma = 0.1$

Fig. 3. Wave with three defects $C^{5,3}$: a – spatial profile and b – phase difference distribution; parameter values: $\varepsilon = 6$, $\gamma = 0.1$

мерной норме $\|\Delta\varphi_i\| = \max\{|\Delta\varphi_i|\}$. Последний способ и был использован в работе: волна была отнесена к «странным волнам», если величина $\|\Delta\varphi_i\|$ превосходила выбранный порог $\delta = 1.4$ (обоснованность этого выбора поясняется далее). Уточняющее исследование с использованием описанного алгоритма позволило разбить область существования волновой моды C^5 на две характерные зоны со своими границами – область I и область II, а также выявить наличие пересечения между этими областями.

5. Исследование странных волн, возникших на базе волновой моды C^5

5.1. Волна с одним фазовым дефектом. Рассмотрим сначала наиболее простой режим странных волн – волну с одним фазовым дефектом, которую обозначим, как $C^{5,1}$. Она наблюдается лишь в режиме релаксационных колебаний при $\varepsilon \approx 3.8$ и существует лишь при достаточно слабой связи. На рис. 4, а показано распределение разности фаз для этого режима в три последовательные моменты времени, разделенные равными интервалами: $t_1, t_2 = t_1 + \Delta t$ и $t_3 = t_1 + 2\Delta t$ ($\Delta t = 2000$). Как видно из рисунка, в каждый момент времени ансамбль разбивается на два кластера: (а) зона с однородным распределением разностей фаз и (б) область дефекта. Последний представляет собой треугольник с вершиной в точке d , которую будем называть *положением дефекта*, и высотой $\theta = \Delta\varphi(d)$ – *амплитудой дефекта*. Сравнивая распределения разности фаз для разных моментов времени, легко убедиться, что форма и амплитуда дефекта остаются неизменными, а меняется лишь его положение в ансамбле. Таким образом, фазовый профиль волны вращается вдоль ансамбля как единое целое. Покажем, что это вращение происходит с постоянной угловой скоростью. Для этого построим положение дефекта в зависимости от времени (рис. 4, б). Как видно из графика, зависимость $d(t)$ носит ступенчатый характер, что является следствием пространственной дискретности системы. Однако при ее сглаживании получается линейная функция $\tilde{d}(t)$ (штриховая линия), что свидетельствует о равномерности вращения фазового дефекта с постоянной скоростью v . Соответственно, за время $T_D = N/v$ фазовый дефект совершает полный оборот вокруг кольца осцилляторов, реализуя тем самым режим квазипериодических колебаний. Последний характеризуется двумя периодами: автоколебаний генераторов T и вращения огибающей T_D .

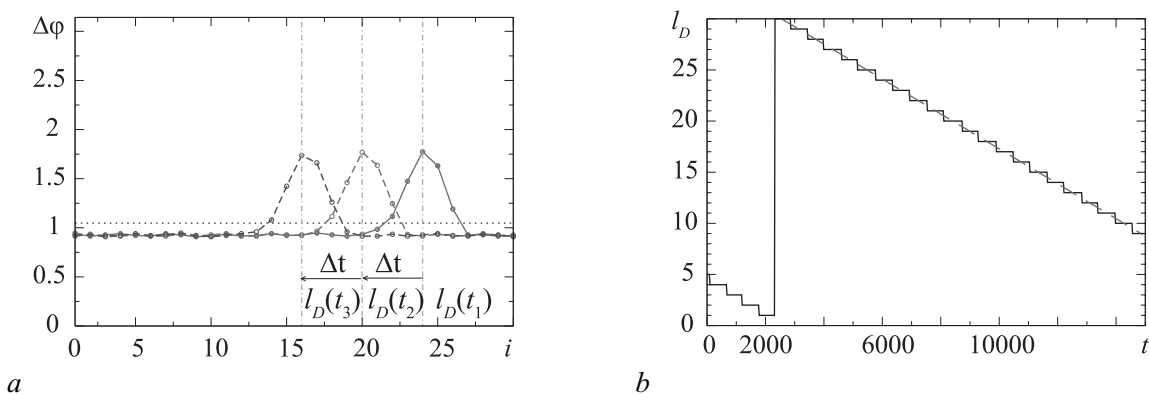


Рис. 4. Волна $C^{5,1}$: фазовый профиль в разные моменты времени (а) и положение фазового сбоя в зависимости от времени (б); значения параметров: $\varepsilon = 3.9, \gamma = 0.01$

Fig. 4. Wave $C^{5,1}$: phase profile at different moments of time (а) and time dependent location of its phase defect (б); parameter values: $\varepsilon = 3.9, \gamma = 0.01$

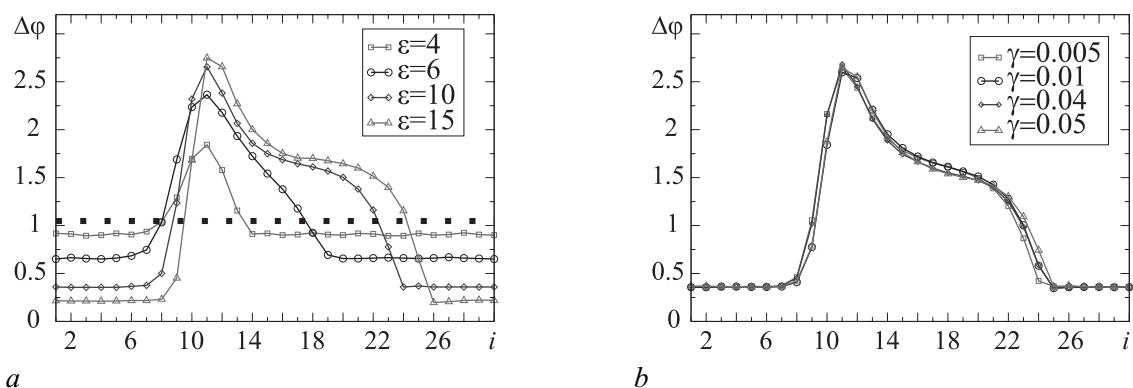


Рис. 5. Эволюция волны $C^{5,1}$ для разных значений ε при $\gamma = 0.05$ (a) и γ при $\varepsilon = 15$ (b)
 Fig. 5. Evolution of wave $C^{5,1}$ with change of ε value at $\gamma = 0.05$ (a); with change of γ value at $\varepsilon = 15$ (b)

Рассмотрим теперь, как волна $C^{5,1}$ меняется при изменении управляющих параметров. Как показывают исследования, с ростом ε происходит монотонное увеличение как амплитуды дефекта, так и его ширины. Соответствующие примеры приведены на рис. 5. Одновременно, величина фазового сдвига внутри постоянного кластера уменьшается (для сравнения на рис. 5, a приведено значение $\Delta\varphi$ для бегущей волны C^5 – черные квадратики). В результате, при очень больших значениях ε ансамбль разбивается на два почти равных по размеру кластера: однородный с $\Delta\varphi \rightarrow 0$ и неоднородный с $\Delta\varphi_{\max} \rightarrow \pi$. Исследование также выявило, что величина связи γ не оказывает на форму и размер дефекта существенного влияния, изменяя лишь скорость его вращения. В этом можно убедиться, построив фазовые профили для нескольких значений γ при фиксированном ε (рис. 5, b).

Указанные закономерности можно проиллюстрировать, построив экспериментальные зависимости характеристик фазовых дефектов от параметров. На рис. 6, a приведен график зависимости амплитуды фазового дефекта θ от ε , а на рис. 6, b – скорости дефекта ν от γ . Как видно из первого графика, в момент появления амплитуда дефекта равна $\pi/2$, а по мере возрастания параметра она монотонно возрастает, стремясь при больших ε к величине, немного меньшей π .

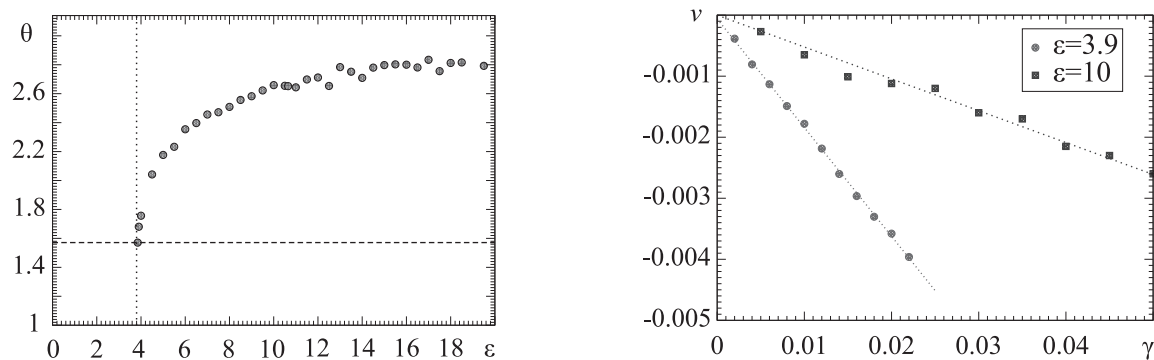


Рис. 6. Изменение характеристик волны $C^{5,1}$: зависимость амплитуды дефекта от ε при $\gamma = 0.002$ (a); зависимость скорости вращения дефекта от γ (b)
 Fig. 6. Change of the wave $C^{5,1}$ characteristics with parameters change: dependence of the defect amplitude on ε at $\gamma = 0.002$ (a); dependence of the defect rotation velocity on γ (b)

Так как величина максимального значения разностей фаз в режиме странной волны всегда превосходит значение $\pi/2$, для разделения однородных и неоднородных волн можно использовать пороговое значение $|\Delta\varphi_i| \in [2\pi K/N : \pi/2]$, что и было сделано выше, при построении области существования странных волн на рис. 2. Второй график (рис. 6, b) показывает, что скорость вращения (а) линейно растет с ростом параметра связи; (б) с ростом параметра возбуждения скорость вращения замедляется.

5.2. Волны с несколькими дефектами. В случае нескольких фазовых дефектов режим странной волны характеризуется как их числом N_d , так и взаимным расположением в ансамбле. Для режима с двумя дефектами это означает, что в фазовом пространстве может сосуществовать несколько волн $C^{5,2}$. Будет ли взаимное расположение дефектов меняться со временем? Поскольку фазовые дефекты вращаются, то расстояние между фазовыми сбоями Δ будет изменяться, если каждый из них вращается со своей индивидуальной скоростью. Для ответа на этот вопрос было проведено исследование положения дефектов волн $C^{5,2}$ со временем, результаты которого отображены на рис. 7 для $\Delta = 15$ (рис. 7) и $\Delta = 10$ (рис. 7). Из сопоставления рисунков видно, что (а) расстояние между фазовыми дефектами остается постоянным, и (б) скорость вращения дефектов не зависит от расстояния между ними. Данное свойство подтверждается и для волн с другими расстояниями между дефектами. Таким образом, режим с двумя дефектами, также как и $C^{5,1}$, характеризуется равномерным вращением фазовой огибающей, так что расстояние между сбоями фазы не меняется со временем. Исследование волн с другим числом фазовых сбоев также подтверждает этот результат. Отсюда можно сделать вывод, что независимо от числа фазовых сбоев автоколебания в режиме странных волн являются двухчастотными квазипериодическими колебаниями.

Рассмотрим теперь, как мода $C^{5,2}$ меняется с изменением параметров. На рис. 8 показано, как фазовый профиль меняется с ростом ε . Легко увидеть качественное сходство с соответствующей эволюцией волны $C^{5,1}$: с увеличением ε оба дефекта монотонно увеличиваются как по амплитуде, так и по ширине. Однако, в отличие от волны $C^{5,1}$, здесь увеличение ширины фазовых сбоев происходит медленнее и сами они остаются более узкими. Кроме того, с ростом ε дефекты немного «отодвигаются» друг от друга, что приводит к увеличению расстояния между ними. Такое поведение говорит о том, что фазовые сбои взаимодействуют друг с другом: они ведут себя подобно упругим телам, между которыми действует сила взаимного отталкивания.

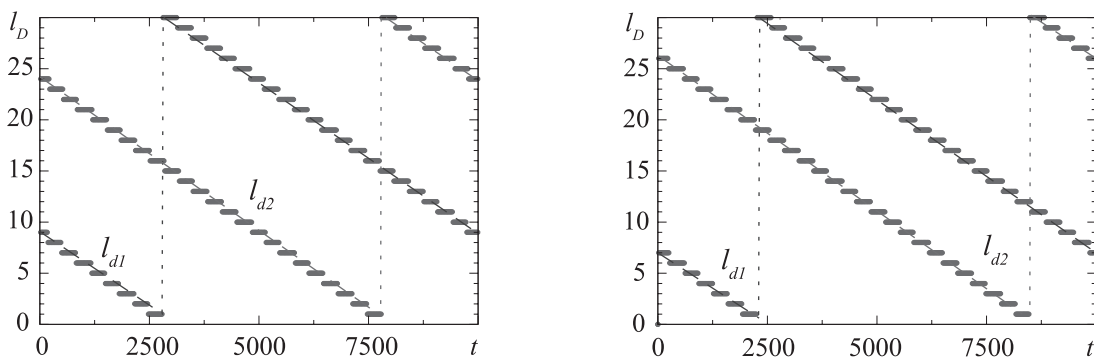


Рис. 7. Движение фазовых сбоев в волнах $C^{5,2}$ с разным расстоянием между дефектами Δ : $\Delta = 15$ (а) и $\Delta = 10$ (б); $\varepsilon = 4.2$, $\gamma = 0.02$

Fig. 7 Motion of phase defects of waves $C^{5,2}$ with different distances between defects Δ : $\Delta = 15$ (a) and $\Delta = 10$ (b); $\varepsilon = 4.2$, $\gamma = 0.02$

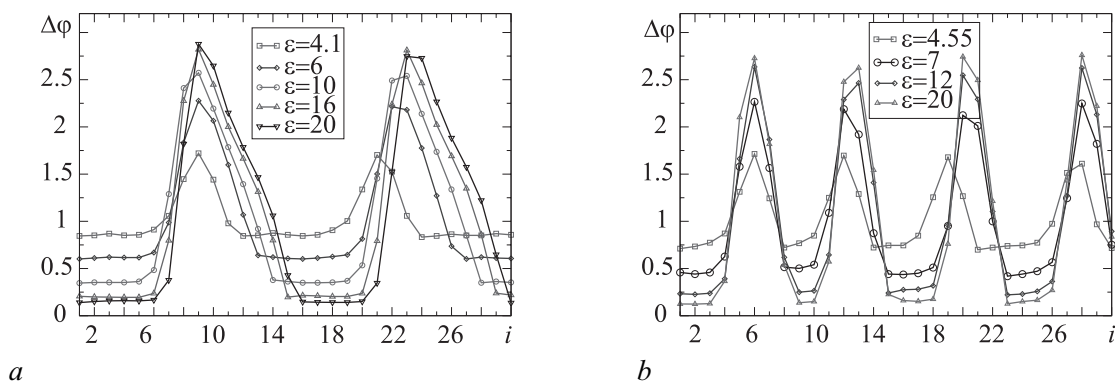


Рис. 8. Эволюция фазовых профилей волн $C^{5,2}$ (a) и $C^{5,4}$ (b) с ростом ε ; $\gamma = 0.002$

Fig. 8. Evolution of phase profiles of waves $C^{5,2}$ (a) and $C^{5,4}$ (b) with growth of ε at $\gamma = 0.002$

Наблюдение за динамикой странных волн с большим числом фазовых дефектов подтверждает выявленные закономерности. В этом случае «отталкивание» проявляется более выражено. В результате, в случае волны с большим числом дефектов вследствие взаимодействия, последние равномерно распределяются по длине цепочки и мы получаем волну с пространственно-периодической модуляцией фазы. Характерный пример приведен для моды $C^{5,4}$ на рис. 8.

6. Мультистабильность странных волн

Волны с разным числом и различным расположением фазовых дефектов могут сосуществовать при одних и тех же значениях управляющих параметров, формируя мультистабильность странных волн на базе моды с фиксированным K . Поэтому, в области релаксационных колебаний мультистабильность в ансамбле (2) существенно усиливается: на базе каждой пространственной моды C^K формируется свое семейство режимов $C^{K,1}$, $C^{K,2}$, ... Данный вид мультистабильности можно отнести к фазовой мультистабильности [18–22], поскольку сосуществующие режимы отличаются значениями разностей фаз между колебаниями в соседних точках дискретной среды.

Для того, чтобы исследовать мультистабильность таких режимов, в ходе настоящего исследования была построена карта странных волн моды C^5 с разным числом фазовых сбоев. Для этого определялась устойчивость оцениваемой волны C^{5,N_d} при выбранных значениях параметров ε и γ . Использовалась следующая методика:

- специальным образом выбирались начальные условия, создающие необходимый фазовый профиль волны с заданным полным набегом фазы $\Phi^{(i)} = 10\pi$ и заданным числом дефектов $N_d^{(i)}$;
- уравнения (2) численно интегрировались на большом временном интервале;
- по результирующим данным строилось распределение разностей фаз, определялись полный набег фазы $\Phi^{(e)}$ и число фазовых сбоев $N_d^{(e)}$;
- при одновременном выполнении условий $\Phi^{(e)} = \Phi^{(i)}$ и $N_d^{(e)} = N_d^{(i)}$ оцениваемая мода полагалась устойчивой, в противном случае – неустойчивой.

Результаты численных исследований представлены в виде карты режимов на рис. 9. На ней показаны области существования странных волн с числом фазовых сбоев от одного до пяти. Волн с большим числом дефектов в рассматриваемой системе обнаружить не удалось.

По-видимому это определяется тем, что в силу взаимного отталкивания, большее число дефектов «не помещается» в ансамбль заданного размера.

Анализ данных, представленных на рис. 9, позволяет заключить, что странные волны с разным числом дефектов располагаются в области больших значений параметра нелинейности ε и небольших значений параметра связи γ . При этом, интервал связи увеличивается с ростом ε . Каждая из волн $C^{5,1}, \dots, C^{5,5}$ характеризуется своим граничным значением ε_{\min} , которое растет с числом фазовых сбоек: $\varepsilon_{\min}^{(1)} < \varepsilon_{\min}^{(2)} < \dots < \varepsilon_{\min}^{(5)}$. Наличие верхней границы по параметру ε , вплоть до значений $\varepsilon = 20$ выявлено не было. Как видно из рисунка, области существования разных волн накладываются друг на друга. Границы зон устойчивости для волн $C^{5,2}, C^{5,3}$ и $C^{5,4}$ качественно подобны друг другу. Однако, границы для волн $C^{5,1}$ и $C^{5,5}$ выбиваются из общей закономерности. Выявление причин такого отклонения требует дальнейшего исследования, однако можно предположить, что в первом случае (волна $C^{5,1}$) отсутствует взаимодействие между несколькими фазовыми сбоями, в последнем (волна $C^{5,5}$) – наоборот, фазовых сбоек слишком много, соответственно, они оказываются расположенными слишком близко друг к другу.

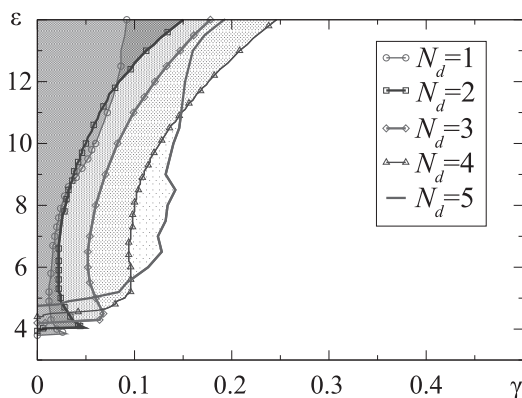


Рис. 9. Мультистабильность странных волн моды C^5 с разным числом фазовых дефектов

Fig. 9. Multistability of strange waves C^5 with different numbers of phase defects

Заключение

В ходе исследования обнаружено, что помимо мультистабильности регулярных бегущих волн в ансамбле генераторов ван дер Поля присутствует мультистабильность пространственно нерегулярных волн. Последние, по своим свойствам подобны т.н. «странным волнам», отмеченным в исследовании Х. Даидо [15]. Также как и странные волны Х. Даидо, рассматриваемые нерегулярные волны представляют собой бегущие волны при наличии локальных сбоек фазы, возникающих в разных точках дискретной среды. Фазовые сбои вращаются вдоль дискретной среды с постоянной скоростью. В результате сочетания двух типов движения: автоколебаний со своим характерным периодом и вращения фазовой огибающей в ансамбле реализуется регулярный тип временной динамики – двухчастотные квазипериодические колебания, который, однако, сочетается с нерегулярным пространственным распределением фазы колебаний вдоль среды. С ростом негармоничности колебаний неравномерность в распределении фазы усиливается. В результате, при сильной негармоничности дискретная среда разбивается на множество кластеров с почти синфазными колебаниями, перемежающимися кластерами, колебания в которых становятся почти противофазными.

Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
2. Blekhnman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl. Mech. Rev. 1995. Vol. 11. P. 733–752.

3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 133–165.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
5. Мынбаев Д.К., Шиленков М.И. Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 2. С. 361.
6. Мальцев А.А., Силаев А.М. Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // Известия вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22. С. 826.
7. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23. P. 55.
8. Ermentrout G.B., Kopell N. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators // Comm. Pure Appl. Math. 1986. Vol. 49. P. 623–660.
9. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамика систем: Динамика и управление. Межвузовский тематический сборник научных трудов. Изд. Нижегородского университета, 1991. С. 84.
10. Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 219–222.
11. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 2000. Vol. 128. P. 224–235.
12. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12. P. 1895–1908.
13. Shabunin A., Astakhov V.V., Feudel U. Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. P. 026211.
14. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1845.
15. Daido H. Strange waves in coupled-oscillator arrays: Mapping approach // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 1683–1686.
16. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. ПНД. 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
17. Шабунин А.В. Мультистабильность бегущих волн в ансамбле гармонических генераторов с дальнедействующими связями // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 1. С. 48–63.
18. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
19. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // Радиотехника и Электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2167–2172.
20. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Известия вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 1. С. 35–38.
21. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 056212.

22. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 15. P. 695–711.

References

1. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
2. Blekhnman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems *Appl. Mech. Rev.*, 1995, vol. 11, pp. 733–752.
3. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E. Synchronization of self-oscillations and noise-induced oscillations. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2002, vol. 47, no. 2, pp. 117–148.
4. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2003.
5. Mynbaev D.K., Shilenkov M.I. Mutual phase synchronization of generators coupled to ring. *Radiotekhnika i elektronika*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 361–370.
6. Maltzev A.A., Silaev A.M. Regimes in chain of generators with «hard» limit cycles, coupled by reactive elements. *Izvestiya VUZ. Radiofizika*, 1979, vol. 22, no. 7, pp. 826–833.
7. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 23, pp. 55.
8. Ermentrout G.B., Kopell N. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1986, vol. 49, pp. 623–660.
9. Gurtovnik A.S., Neimark Y.I. Synchronization in a ring of weakly coupled oscillators. *Dynamics of systems: Dynamics and control. Mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov*, 1991, pp. 84–97.
10. Matias M.A., Gomez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, pp. 219–222.
11. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells. *Physica D*, 2000, vol. 128, pp. 224–235.
12. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2002, vol. 12, pp. 1895–1908.
13. Shabunin A., Astakhov V.V., Feudel U. Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators. *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 80, 026211.
14. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1996, vol. 6, pp. 1845.
15. Daido H. Strange waves in coupled-oscillator arrays: Mapping approach. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, pp. 1683–1686.
16. Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E. Running waves in a discrete anharmonic medium. *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 4, pp. 37–54.
17. Shabunin A.V. Multistability of traveling waves in an ensemble of harmonic oscillators with long-range couplings. *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 48–63.
18. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Gulyaev Y.V., Seleznev E.P. Multistable states in dissipative coupled Feigenbaum's systems. *Technical Physics Letters*, 1989, vol. 15, no. 3, pp. 60–65.
19. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Ponomarenko V.I., Seleznev E.P. Multistability in a system of radiogenerators with capacity coupling. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1991, vol. 36, no. 11, pp. 2167–2172.

20. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Ponomarenko V.I. Multistability formation, classification of isomers and their evolution in coupled Feigenbaum's systems. *Izvestiya VUZ. Radiofizika*, 1991, vol. 34, no. 1, pp. 35–38.
21. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, pp. 056212.
22. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symetrically coupled period-doubling systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, vol. 15, pp. 695–711.



Шабунин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Синхронизация и управление хаосом в связанных колебательных системах» по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук на тему «Синхронизация и формирование мультистабильности в связанных системах с локальными связями» по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре «Радиофизики и нелинейной динамики» Саратовского государственного университета в разных должностях, с 2010 года – в должности профессора. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и мультистабильность, методы обработки сигналов, клеточные автоматы, нейронные сети. Является автором 85 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru