



Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов

А. В. Бух, Е. В. Рыбалова, В. С. Анищенко

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: buh.andrey@yandex.ru, rybalovaev@gmail.com, wadim@info.sgu.ru

Автор для переписки Вадим Семенович Анищенко, wadim@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 16.02.2020, принята к публикации 15.04.2020, опубликована 30.06.2020

Цель настоящего исследования заключается в сравнении динамики спиральных и концентрических структур, в том числе химерных, в ансамблях с различающимися парциальными элементами. Для этого выполняется численное моделирование автоволновых структур в двумерных ансамблях связанных генераторов ван дер Поля и отображений Рутькова. Рассмотрены случаи локальной и нелокальной связи между индивидуальными осцилляторами ансамблей. **Методы.** Эволюция динамики решетки отображений Рутькова в численном эксперименте напрямую определяется соответствующими рекуррентными соотношениями. Ансамбль осцилляторов ван дер Поля интегрируется методом Гюна. По результатам расчетов в обоих случаях строятся мгновенные значения амплитуд для всех элементов решетки, пространственно-временные диаграммы для её сечения, фазовые портреты и временные реализации для отдельных элементов решетки. Кроме того, вычисляются средние значения частот для всех парциальных элементов и зависимости мгновенных частот от времени для выбранных отображений или осцилляторов. Результаты сравниваются. **Результаты.** Показано, что при локальной связи в ансамблях реализуются режимы классических спиральных и концентрических волн. С введением нелокальной связи при вариации радиуса связи получены более сложные структуры, включая химерные. Описаны спирально-волновые химерные структуры с одним и более ядрами некогерентности. Показана возможность реализации нового типа химерной структуры на основе концентрических волн – концентрических химер. Представлены результаты анализа свойств ядер некогерентности для спиральных и концентрических химерных структур. Обсуждаются результаты реакции динамики ансамблей на изменения силы нелокальной связи и внешнее шумовое воздействие. **Заключение.** В обоих ансамблях для концентрических химер средние значения частот почти одинаковы для всех элементов. В случае спиральных химер средние значения частот в ядре отличаются от средних значений в когерентной области. В решетке генераторов ван дер Поля возможен переход от концентрических волн к спиральным при воздействии шумом достаточно большой интенсивности. В ансамбле отображений Рутькова реализуется индуцированный шумом переход от спиральной волны к концентрической волне.

Ключевые слова: двумерный ансамбль, нелокальная связь, спирально-волновая химера, концентрическая химера.

Образец цитирования: Бух А.В., Рыбалова Е.В., Анищенко В.С. Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 299–323.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке Немецкого Физического Общества (проект SFB 910). Е.В.Р. и В.С.А. благодарят за финансовую поддержку РФФИ и DFG в рамках исследовательского проекта №20-52-12004 (получение результатов, написание текста), А.В.Б. благодарит за финансовую поддержку РФФИ в рамках научного проекта № 19-32-90005 (анализ результатов).

Autowave structures in two-dimensional lattices of nonlocally coupled oscillators

A. V. Bukh, E. V. Rybalova, V. S. Anishchenko

Saratov State University

83 Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russia

E-mail: buh.andrey@yandex.ru, rybalovaev@gmail.com, wadim@info.sgu.ru

Correspondence should be addressed to Vadim S. Anishchenko, wadim@info.sgu.ru

Received 16.02.2020, accepted 15.04.2020, published 30.06.2020

Objective. The aim of the research was to compare the dynamics of spiral and target structures including the dynamics of chimera states in ensembles with different nodes. Numeric simulations for autowave structures in two-dimensional ensembles of coupled van der Pol oscillators and Rulkov's maps were performed. Cases of local and nonlocal coupling between ensemble nodes were considered. **Methods.** The evolution dynamics of Rulkov's map lattice is strictly defined with corresponding recurrent formulae. The ensemble of van der Pol oscillators was integrated using the Heun's method. Snapshots of amplitude values, spatio-temporal diagrams for corresponding sections, phase portraits and time series for single elements were constructed. Moreover, mean values of frequencies of all nodes, and dependencies of instantaneous frequencies on time for selected maps and oscillators. Results were compared. **Results.** It is shown that classical spiral and target wave regimes were realized at local coupling. More complex structures including chimera states were obtained when a nonlocal coupling was included. Spiral wave chimera structures with single and several incoherent cores were described. A new chimera structure based on target waves (target wave chimera) was shown to be possible. The analysis of features of incoherent cores for both spiral wave chimera and target wave chimera were presented. The results of coupling parameter effect and external noise influence on the dynamics of the ensembles were discussed. **Conclusion.** Mean values of frequencies were almost the same for all the elements in both ensembles at target wave chimera regimes. The mean values in the incoherent core differed from the ones in coherent area at spiral wave chimera regimes. A transition from target waves to spiral waves was possible when a noise with sufficiently large intensity was introduced. Noise-induced transition from spiral waves to target waves took place in the ensemble of Rulkov's maps.

Key words: two-dimensional ensemble, nonlocal coupling, spiral wave chimera, target wave chimera.

Reference: Bukh A.V., Rybalova E.V., Anishchenko V.S. Autowave structures in two-dimensional lattices of nonlocally coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 299–323. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) – Projektnummer. 163436311-SFB 910. E.V.R. and V.S.A. thank for the financial support provided by RFBR and DFG according to the research project #20-52-12004 (obtaining results, writing the manuscript), A.V.B. thanks for the financial support provided by RFBR, project number 19-32-90005 (analysis the results).

Введение

Одним из актуальных направлений исследований в нелинейной физике является анализ автоволновых структур в нелинейных средах и их моделях. Под автоволнами понимают самоподдерживающийся волновой процесс в неравновесной среде, остающийся неизменным при достаточно малых изменениях как начальных, так и граничных условий. Математическим аппаратом для описания автоволн чаще всего служат уравнения диффузионного типа с активной нелинейностью [1–11]. Понятие «автоволны» впервые было введено в научную лексику академиком Р.В. Хохловым и затем активно использовалось в исследованиях ученых Института Биофизики АН СССР (г. Пущино) применительно к задачам кардиологии. Оно явилось обобщением определения автоколебаний на случай пространственно распределенных активных нелинейных сред и систем [12, 13]. Исследования автоволновых структур были начаты во второй половине

двадцатого века и активно продолжаются в настоящее время [1–42]. Интерес к исследованиям автоволновых процессов в различных моделях активных сред резко возрос в начале двухтысячных годов. Во многом это связано с введением в рассмотрение так называемых химерных структур. Анализ волновых структур проводился, как правило, с использованием математических моделей нелинейной среды в виде уравнений типа реакция – диффузия. Такой подход соответствует моделированию среды в виде ансамблей взаимодействующих активных осцилляторов с локальной связью. Каждый осциллятор связан только с ближайшими соседями в ансамбле. При анализе химерных структур использовалась более сложная, нелокальная связь. При нелокальной топологии связи каждый индивидуальный осциллятор симметрично связывается с различным числом соседних осцилляторов, которое определяется радиусом связи [43]. Использование нелокальной связи позволило найти ряд более сложных пространственно-временных структур, которые не наблюдались при локальной связи [10, 32, 44–48]. Так, в пионерских работах [24, 26] при численном моделировании динамики двумерного ансамбля нелокально связанных фазовых осцилляторов впервые была обнаружена структура, впоследствии названная спирально-волновой химерой (spiral wave chimerа, SWC). Важно отметить, что этот результат был получен раньше, чем в работе [46] было дано определение химерной структуры. В настоящей работе предметом изучения выбраны автоволновые структуры в виде спиральных и концентрических волн. Названные структуры были получены методом численного моделирования динамики двумерных решеток нелокально связанных осцилляторов, в качестве которых использовались осцилляторы ван дер Поля и отображения Рулькова [49, 50]. Подробно анализируются случаи локальной и нелокальной связи между осцилляторами решеток. Показано, что при локальной связи в решетках при вариации параметров реализуются только «классические» спиральные или концентрические волны. Увеличение радиуса нелокальной связи порождает более сложные автоволновые структуры, включая химерные. Представлены результаты по SWC с одним и несколькими ядрами некогерентности, а также новый тип химерной структуры, которая рождается на основе концентрической волны при увеличении радиуса нелокальной связи, концентрическая химера (target wave chimerа, TWC) [49]. Детально анализируются свойства некогерентных кластеров найденных типов химерных структур (SWC и TWC). Рассматриваются свойства реализуемых автоволновых структур при вариации силы нелокальной связи и воздействии внешнего шума.

1. Исследуемые модели

Рассмотрим динамику двумерных решеток связанных динамических подсистем с $N \times N$ элементами, которые описываются следующими уравнениями:

$$\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}^t) + \frac{1}{B_i} \sum_{k=1}^N \sigma_{ik} \frac{1}{B_j} \sum_{l=1}^N \sigma_{jl} \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t), \quad (1)$$

где $B_i \times B_j$ – количество связей в матрицах $\sigma_{i,k}, \sigma_{j,l}$ для данного элемента; $\mathbf{u}_{i,j}^t$ – переменные, отражающие динамику отдельных осцилляторов; $i, j = 1, 2, \dots, N$ – индексы этих осцилляторов в квадратной решетке по соответствующим направлениям; $N \times N$ – количество осцилляторов в решетке; $\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \mathbf{u}_{i,j}^{t+1}$, $t = 1, 2, \dots, T$ в случае отображения, и $\hat{\mathbf{u}}_{i,j} = \dot{\mathbf{u}}_{i,j}$, $t \in [0; T]$ в случае, когда осциллятор задается системой ОДУ; T – время, на котором рассматривается поведение системы; $\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}^t)$ определяет динамику отдельного элемента $\mathbf{u}_{i,j}^t$; $\mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t)$ определяет связь между элементами с индексами (k, l) и (i, j) , $\mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t) = (\mathbf{u}_{k,l}^t - \mathbf{u}_{i,j}^t)$ в случае диффузионной

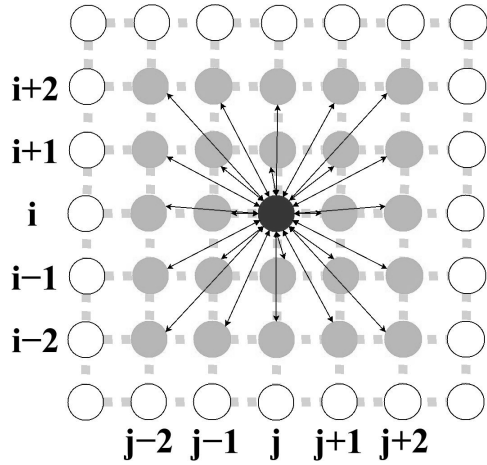


Рис. 1. Топологическая схема связей ансамбля (1) в нелокальном случае при $R = 2$

Fig. 1. Scheme of the coupling topology for the ensemble (1) in a nonlocal case with $R = 2$

$= 100 \times 100$ нелокально связанных осцилляторов ван дер Поля и задается следующими соотношениями в (1):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i,j} &= \dot{\mathbf{u}}_{i,j}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}) = \begin{pmatrix} f_x(x_{i,j}, y_{i,j}) \\ f_y(x_{i,j}, y_{i,j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i,j} \\ \varepsilon(1 - x_{i,j}^2) \cdot y_{i,j} - \omega^2 x_{i,j} \end{pmatrix}, \\ t \in [0; T], \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t) &= \begin{pmatrix} x_{k,l} - x_{i,j} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

где ε и ω – параметры нелинейности и частоты отдельных осцилляторов, соответственно. Вторая решетка состоит из $N \times N = 200 \times 200$ отображений Рутькова, описывающих динамику нейронов. В этом случае соотношения в (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{i,j} &= \mathbf{u}_{i,j}^{t+1}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}^t) = \begin{pmatrix} f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) \\ f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) \end{pmatrix}, \\ f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) &= \begin{cases} \alpha/(1 - x_{i,j}^t) + y_{i,j}^t, & x_{i,j}^t \leq 0 \\ \alpha + y_{i,j}^t, & 0 < x_{i,j}^t < \alpha + y_{i,j}^t \\ -1, & x_{i,j}^t \geq \alpha + y_{i,j}^t \end{cases}, \quad f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) = y_{i,j}^t - \mu(x_{i,j}^t + 1) + \mu\gamma, \\ t = 1, 2, \dots, T, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ f_y(x_{k,l}^t, y_{k,l}^t) - f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция $f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)$ описывает процесс генерации спайка, а уравнение $f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)$ отвечает за относительно медленное изменение режима. Увеличение параметров γ и α ведет к увеличению частоты колебаний в отдельном отображении Рутькова.

связи, и $\mathbf{G}(\mathbf{u}_{k,l}^t, \mathbf{u}_{i,j}^t) = (\mathbf{F}(\mathbf{u}_{k,l}^t) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i,j}^t))$ в случае инерционной связи. Для нелокальной связи матрицы связи со свободными граничными условиями определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \begin{cases} 1 & \text{при } \max(1, i - R) \leq k \leq \min(i + R, N) \\ 0 & \text{для остальных } k; \end{cases} \\ \sigma_{jl} &= \begin{cases} 1 & \text{при } \max(1, j - R) \leq l \leq \min(j + R, N) \\ 0 & \text{для остальных } l; \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где R – параметр нелокальности связи, определяющий количество связей отдельного элемента $B_i \times B_j$ в решетке. Графическое представление связей в случае нелокальной связи приведено на рис. 1.

В рамках работы рассматриваются решетки с разными типами парциальных элементов. Первая решетка представляет собой систему $N \times N =$

2. Автоволновые структуры в решетках

В настоящем разделе рассмотрим автоволновые динамические структуры, возникающие в решетках нелокально связанных элементов в зависимости от параметров системы. В зависимости от выбора парциального элемента спектр наблюдаемых пространственно-временных структур изменяется, но химерные автоволновые структуры возникают в случае нелокальной связи, в том числе новый тип химерной структуры на основе концентрической волны, как в решетке осцилляторов ван дер Поля с близкими к гармоническим колебаниями, так и в решетке отображений Рутькова, моделирующих динамику нейронов в спайковом режиме колебаний.

2.1. Автоволновые структуры в решетке связанных осцилляторов ван дер Поля.

Рассмотрим поведение решетки нелокально связанных осцилляторов ван дер Поля (3). В исследуемом ансамбле возможно наблюдение спиральных и концентрических структур при локальной и близкой к локальной связях, и возможно наблюдение химерных структур как на основе спиральной, так и на основе концентрической структуры.

Автоволновые структуры, наблюдаемые при локальной связи. Как показали результаты численного моделирования, в зависимости от величины управляющих параметров ε и ω при постоянном значении радиуса связи $R = 1$, в исследуемом ансамбле возможна реализация как спиральных, так и концентрических волновых структур. Исследование решетки (3) в случае локальной связи проводилось с использованием случайных начальных условий для $x_{i,j}^0, y_{i,j}^0 \in [-0.9 : 0.9]$. Карта режимов (рис. 2, а) иллюстрирует, что для каждого режима можно

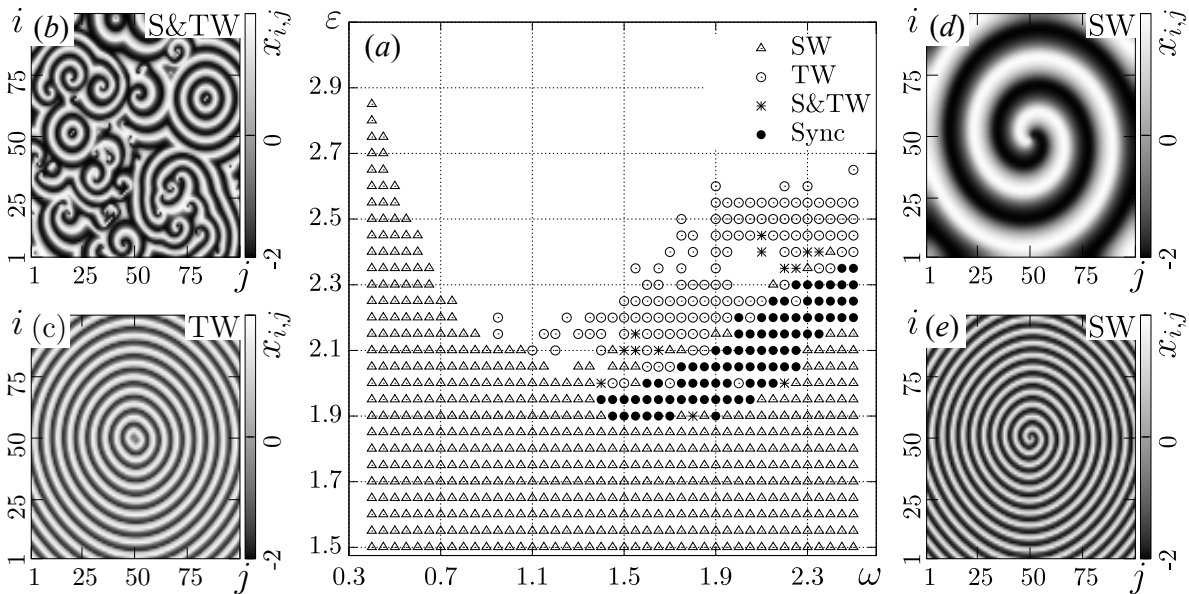


Рис. 2. Карта режимов поведения системы (3) в случае локальной связи ($R = 1, \sigma = 0.7$) (а). На карте отмечены области синхронных колебаний (Sync); области существования концентрических волн (TW, мгновенный снимок при $\omega = 0.9, \varepsilon = 2.15$ приведен на фрагменте (с)) и спиральных волн (SW, приведены мгновенные снимки при $\omega = 0.9, \varepsilon = 0.5$ (d) и $\varepsilon = 2.15$ (e)); точки, в которых возможно наблюдение обоих типов волн в одной структуре (S&TW, мгновенный снимок при $\omega = 1.65, \varepsilon = 2.1$ приведен на фрагменте (b))

Fig. 2. Regime map of system (3) behaviour for local coupling case ($R = 1, \sigma = 0.7$) (a). Synchronous oscillations (Sync); target waves (TW, snapshot is shown in (c) at $\omega = 0.9, \varepsilon = 2.15$); spiral waves (SW, snapshots are shown in (d) $\omega = 0.9, \varepsilon = 0.5$ and in (e) at $\omega = 0.9, \varepsilon = 2.15$); and structures consisting of both spiral and target waves (S&TW, snapshot is shown in (b) at $\omega = 1.65, \varepsilon = 2.1$) are depicted on the map

выделить конечную область его существования. При малых значениях параметра ω возможно наблюдение только спиральных волн (рис. 2, *d, e*) и некогерентных режимов. Когда параметр ω увеличивается, возникают концентрические волны (рис. 2, *c*) при достаточно больших ε . Изучение поведения системы на плоскости параметров (ε, ω) показывает, что существует возможность наблюдения спиральных и концентрических волн в одной пространственно-временной структуре. Один из таких режимов приведен на рис. 2, *b*.

Рассмотрение режимов, наблюдаемых при фиксированном значении параметра $\omega = 0.9$ и изменении ε , позволяет обнаружить, что параметр ε управляет длиной волны как в случае спиральных, так и в случае концентрических волн. На рис. 2, *d, e* приведены мгновенные снимки спирально-волновых структур, рассчитанных для различных значений параметра возбуждения генератора. Как видно из рис. 2, *d, e*, увеличение значения параметра ε приводит к уменьшению длины спиральной волны. Дальнейшее увеличение параметра $\varepsilon \geq 2.2$ приводит к разрушению спиральной волны и переходу к режиму некогерентности. При уменьшении параметра $\varepsilon < 1.65$ спиральные волны в решетке сохраняются, и их длина волны продолжает увеличиваться. Пример концентрической волны при $\varepsilon = 2.15$ приведен на рис. 2, *c*. Если уменьшать параметр ε для этой структуры, её длина волны будет увеличиваться, так же, как длина спиральной волны при уменьшении параметра ε . Затем концентрические волны переходят в профиль, отвечающий режиму синхронизации, при $\varepsilon \leq 1.6$. При увеличении параметра ε концентрические волны разрушаются при $\varepsilon \geq 2.4$. Таким образом, параметр ε позволяет управлять длиной волны обеих структур: длины как спиральной, так и концентрической волн обратно пропорциональны значению этого параметра.

Исследования показали наличие мультистабильности в системе (3). Этот эффект проявляется в том, что при вариации начальных условий или смене направления движения по параметру можно для одних и тех же фиксированных значений управляющих параметров получать различные пространственно-временные структуры. В рамках исследования сначала были получены спиральная и концентрическая структуры при $\varepsilon = 2$, а затем параметр ε изменялся с сохранением начальных условий. В результате было выяснено, что в диапазоне $\varepsilon \in [1.65; 2.2]$ в решетке наблюдаются как спиральные, так и концентрические волны, то есть мультистабильность сохраняется в некотором конечном интервале по параметру ε . На рис. 2 показано, что при одних и тех же значениях параметров $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $R = 1$, $\varepsilon = 2.15$ реализуются как спиральная (рис. 2, *e*), так и концентрическая (рис. 2, *c*) волны. Таким образом, в исследуемом ансамбле (3) в силу мультистабильности могут быть реализованы как спиральные, так и концентрические волновые структуры. Отметим, что приведенные результаты получены для случая локальной связи ($R = 1$) и для этого случая были описаны в работе [49].

Появление химерных автоволновых структур при введении нелокальности. Как показали исследования многих авторов, введение нелокальной связи в двумерных ансамблях из различных нелинейных осцилляторов приводит к усложнению структур и появлению спирально-волновых химерных состояний [24, 26, 29, 30, 36, 42, 43, 49, 51–53]. Рассмотрим усложнение пространственно-временных структур, которое имеет место с введением нелокальной связи и зависит от величины радиуса связи в ансамбле (3). На рис. 3, *a* приведена бифуркационная диаграмма для этой системы на плоскости параметров нелокальности связи R и параметра возбуждения ε . В зависимости от величины параметра ε , при увеличении радиуса нелокальной связи R , могут возникать или спирально-волновые химеры, или концентрические химеры.

На рис. 3, *d, e* представлены результаты расчетов влияния радиуса связи на спирально-волновую структуру в системе (3). С ростом $R > 1$ вначале увеличивается длина волны, а затем, при $R = 16$, рождается спирально-волновая химерная структура (появляется ядро некогерентности в окрестности центра возбуждения волны (рис. 3, *e*)). Качественно сходные с рис. 3, *d, e*

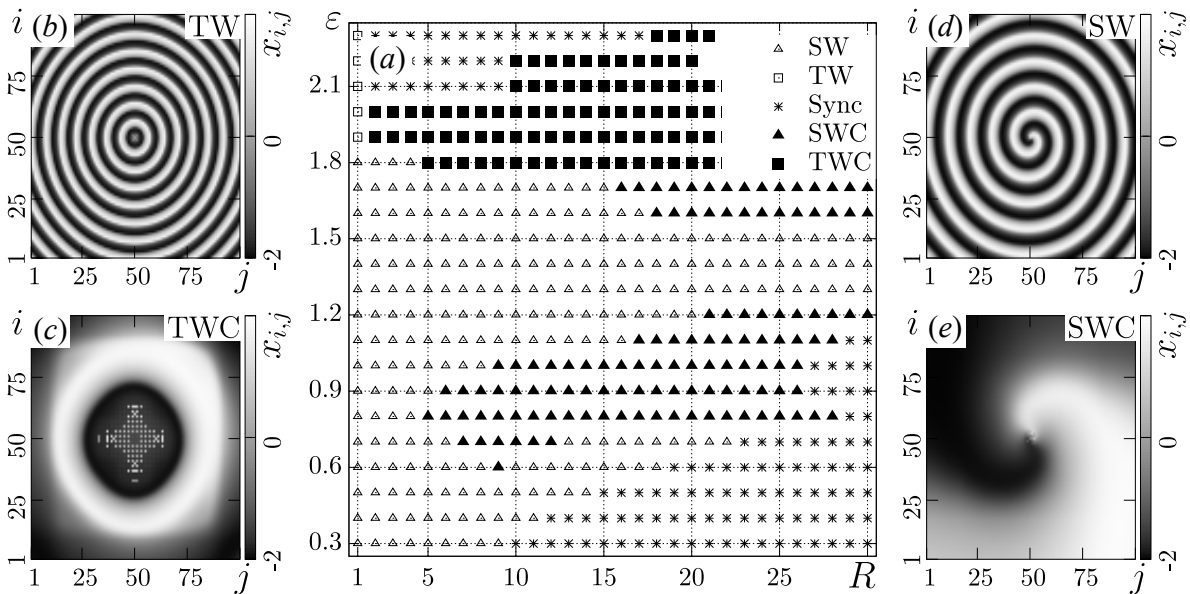


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма режимов поведения системы (3) при введении нелокальной ($R \geq 1$) связи при $\omega = 0.9$, $\sigma = 0.7$ (a). На карте отмечены области существования: синхронных колебаний (Sync); концентрических и спиральных волн (TW, SW, мгновенные профили приведены на фрагментах (b) при $\varepsilon = 2$, $R = 1$ и (d) при $\varepsilon = 1$, $R = 1$, соответственно); концентрических и спирально-волновых химерных состояний (TWC, SWC, мгновенные профили приведены на фрагментах (c) при $\varepsilon = 2$, $R = 8$ и (e) при $\varepsilon = 1$, $R = 16$, соответственно)

Fig. 3. Bifurcations diagram of behaviour regimes of system (3) when the nonlocal coupling is introduced ($R \geq 1$) at $\omega = 0.9$, $\sigma = 0.7$ (a). The areas depicted on the diagram: synchronous oscillations (Sync); target and spiral waves (TW, SW snapshots are shown in (b) at $\varepsilon = 2$, $R = 1$ and in (d) at $\varepsilon = 1$, $R = 1$ correspondingly); target and spiral wave chimera states (TWC, SWC, snapshots are shown in (c) at $\varepsilon = 2$, $R = 8$ and in (e) at $\varepsilon = 1$, $R = 16$ correspondingly)

результаты представлены и на рис. 4. Эти данные иллюстрируют тот факт, что с увеличением радиуса нелокальной связи R спирально-волновые структуры усложняются и в итоге рождается режим спирально-волновой химеры.

Рассмотрим влияние радиуса нелокальной связи на режим концентрических волн. Можно ожидать, что с введением нелокальной связи в решетке в режиме концентрических волн структуры будут усложняться и, возможно, возникнет новая химерная структура на основе концентрической волны. Эксперименты это подтвердили, о чем свидетельствуют результаты, представленные на рис. 3, b, c. Эти результаты иллюстрируют эволюцию концентрической волны при увеличении радиуса связи R . Уже при $R = 4$ в центре концентрической волны возникает ядро некогерент-

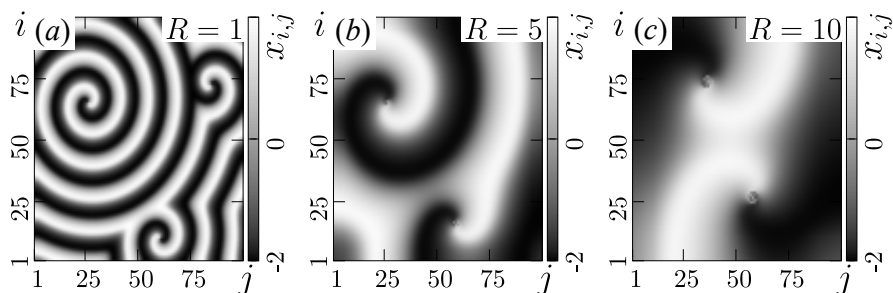


Рис. 4. Переход в режим спирально-волновой химеры для (3) с увеличением радиуса связи R . Мгновенные снимки амплитуд решетки $x_{i,j}$ при $R = 1$ (a); $R = 5$ (b) и $R = 10$ (c). Остальные параметры: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 0.8$

Fig. 4. Transition to the spiral wave chimera for (3) when nonlocal coupling range R increases. Snapshots $x_{i,j}$ at $R = 1$ (a); $R = 5$ (b); and $R = 10$ (c). Other parameters: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 0.8$

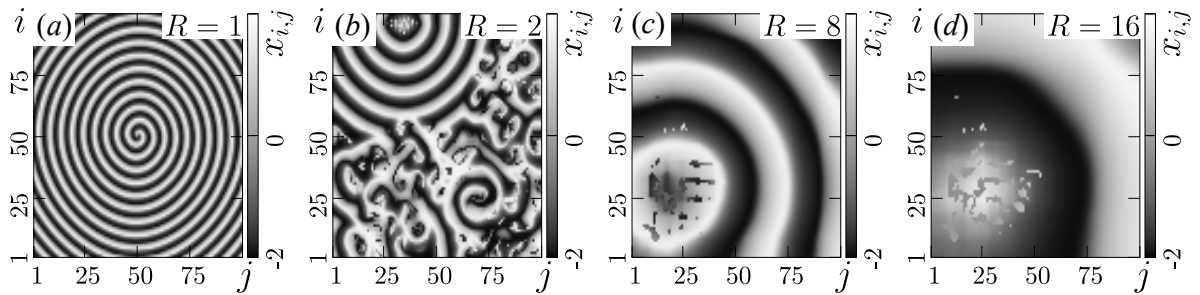


Рис. 5. Переход от спиральной волны к химере на основе концентрической волны. Мгновенные снимки амплитуд решетки x_{ij} при $R = 1$ (a); $R = 2$ (b); $R = 8$ (c) и $R = 16$ (d). Остальные параметры: $\sigma = 0.7, \omega = 0.9, \varepsilon = 2$

Fig. 5. Transition from the spiral wave to the target wave chimera. Snapshots x_{ij} at $R = 1$ (a); $R = 2$ (b); $R = 8$ (c); and $R = 16$ (d). Other parameters: $\sigma = 0.7, \omega = 0.9, \varepsilon = 2$

ности, которое увеличивается вместе со значением параметра R . На рис. 3, с приведена новая химерная структура при значении параметра $R = 8$, которую мы назвали концентрической химерой [49]. Как и в случае спирально-волновой химеры, в окрестности источника концентрической волны (рис. 3, b–e) формируется кластер осцилляторов (ядро) с некогерентной динамикой. Концентрические химерные структуры также могут быть получены на основе спиральной волновой структуры (рис. 5). При этом область некогерентности топологически отличается от области некогерентности TWC, полученной из концентрической волны.

Влияние параметра силы связи на пространственно-временные структуры. Исследовалось также влияние параметра силы связи на динамическое поведение решетки (3). С этой целью выбиралась волновая структура при $\sigma = 0.7$. Далее плавно изменялось значение параметра σ в сторону увеличения или уменьшения. Расчеты показали, что, в основном, влияние силы связи ведет к изменениям длин волн как спиральных, так и концентрических. При этом для тех и других волновых структур длина волны возрастала с увеличением параметра связи. Расчеты показали, что области существования этих режимов по параметру силы связи σ различаются. Спиральная волна существует при $\sigma \in [0.65; 1]$, а концентрическая волна – при $\sigma \in [0.59; 0.83]$. В расчетах значения величины параметра связи σ изменялись в пределах от 0 до 1.

2.2. Автоволновые структуры в решетке связанных отображений Рутькова. В предыдущем разделе рассматривалась решетка связанных парциальных элементов с непрерывным временем, теперь перейдем к рассмотрению решетки элементов с дискретным временем. В качестве индивидуальных элементов сети были выбраны отображения Рутькова, описывающие динамику нейронов (4). В статье Рутькова [50] описана динамика данного отображения. Мы выбрали значения параметров парциальных элементов, отвечающие режиму спайковой динамики индивидуального осциллятора: $\alpha=4.0, \mu=0.001, \sigma=0.2$. Данные параметры находятся недалеко от границ отсутствия динамики (silence) и берст-спайковой динамики (bursts of spikes) по α и σ [50].

Разнообразие режимов, возникающих в решетке отображений Рутькова при введении нелокальности. При указанных значениях параметров в решетке были найдены режимы спирально-волновых химер. В зависимости от силы связи между элементами и радиуса связи в решетке могут наблюдаться одно-, четырех- и девятиядерные спиральные химеры. Число ядер соответствует числу областей (кластеров) с некогерентной динамикой элементов. На рис. 6, a показаны области существования спиральных химер с различным количеством ядер. Количество ядер обозначено буквой S . Стоит отметить, что при фиксированных значениях радиуса связи увеличение силы связи ведет к уменьшению размера некогерентного ядра. Тот же эффект наблюдается при увеличении радиуса связи и фиксированном значении силы связи. Как видно из

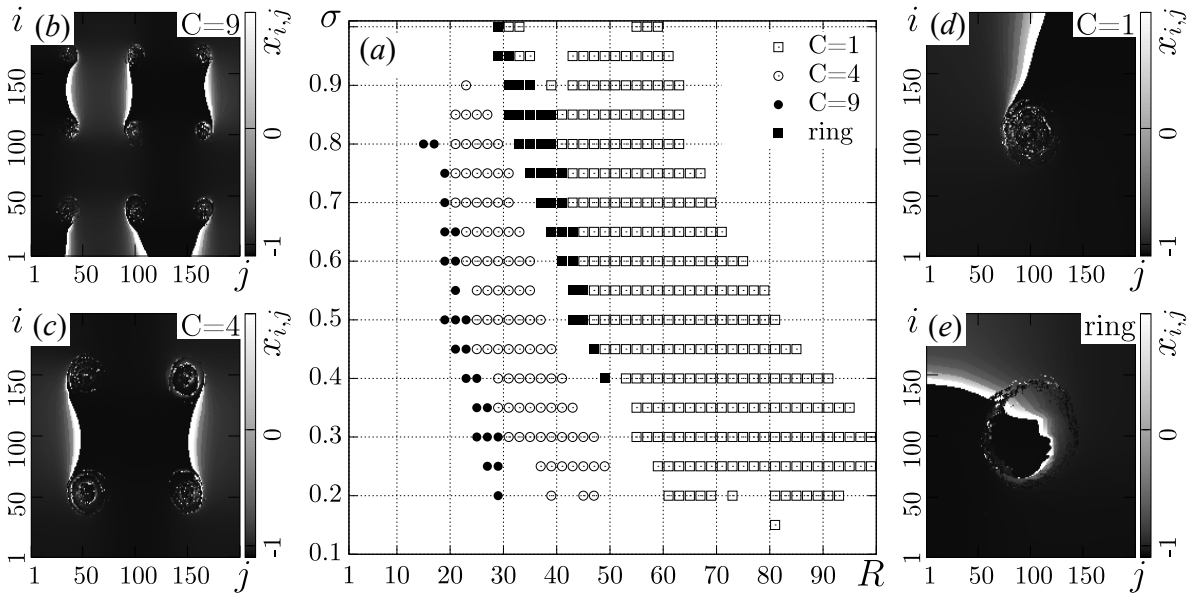


Рис. 6. Спирально-волновые химеры в сети нелокально связанных отображений Рулкова (а). $C=9$ – девятиядерная спирально-волновая химера при $\sigma = 0.65$, $R = 19$ (b); $C=4$ – четырехядерная спирально-волновая химера при $\sigma = 0.70$, $R = 23$ (c); $C=1$ – одноядерная спирально-волновая химера при $\sigma = 0.65$, $R = 53$ (d); ring – спирально-волновая химера с ядром в виде кольца при $\sigma = 0.85$, $R = 33$ (e). Собственные параметры отображений: $\alpha = 4.0$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$. Время установления режимов $t = 20000 + 1000$

Fig. 6. Spiral wave chimera states in the network of nonlocally coupled Rulkov maps (a). $C=9$ is a 9-core spiral wave chimera at $\sigma = 0.65$, $R = 19$ (b); $C=4$ is a 4-core spiral wave chimera at $\sigma = 0.7$, $R = 23$ (c); $C=1$ is a single-core spiral wave chimera at $\sigma = 0.65$, $R = 53$ (d); ring is a spiral wave chimera with core in a ring shape at $\sigma = 0.85$, $R = 33$ (e). Local map parameters are $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$. Transition time is $t = 20000 + 1000$

рис. 6, а, спирально-волновые химеры появляются только в случаях нелокального и глобального характера связи.

Кроме многоядерных химер в решетке могут наблюдаться одноядерные спирально-волновые химеры, у которых некогерентная часть представляет собой кольцо (рис. 6, d). Ранее другие авторы показали существования химерных структур с кольцевым ядром [54], но в работе [55] впервые показана возможность реализации такой структуры ядра у спирально-волновой химеры. Кроме основного некогерентного кольца в центре, могут наблюдаться малые островки некогерентной динамики по всей решетке.

Таким образом, в двумерной решетке нелокально связанных отображений Рулкова при вариации параметров нелокальной связи и радиуса связи реализуются все типичные спирально-волновые химерные состояния, исследованные ранее во многих работах.

Переход от спиральных химер к концентрическим волнам. При вариации параметров и начальных условий в области, находящейся слева от границы существования режимов 9-ядерной спирально-волновой химеры (см. рис. 6, а), были обнаружены режимы концентрических волн. Наблюдаются как классические (регулярные) концентрические волны, так и концентрические химеры, содержащие одно некогерентное ядро. Выделить область параметров существования концентрических волн и ТВС затруднительно, так как их установление сильно зависит от начальных условий, и они наблюдаются в узкой области параметров. Пример реализации классического режима концентрической волны приведен на рис. 7, который иллюстрирует переключение системы с режима спирально-волновой химеры на режим концентрических волн при протягивании радиуса нелокальной связи от $R = 19$ до $R = 11$ с шагом $\Delta R = -1$, первоначальная

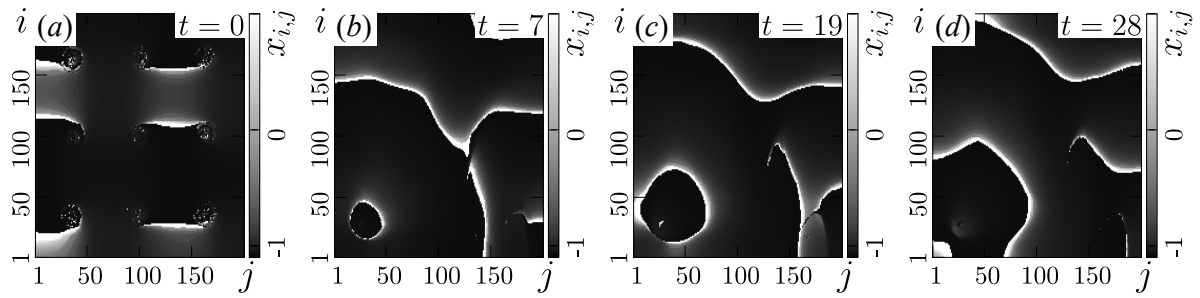


Рис. 7. Переход от спирально-волновых химер к концентрическим волнам при уменьшении радиуса связи в сети нелокально связанных отображений Рулькова (4). Первоначальная структура в слое при $R = 19$ (a). Динамика новой установившейся структуры при $R = 11$ и $t = 7$ (b), $t = 19$ (c), $t = 28$ (d). Остальные параметры: $\alpha = 4$, $\gamma = 0.2$, $\mu = 0.001$, $\sigma = 0.65$

Fig. 7. Transition from spiral wave chimeras to target waves when nonlocal coupling range decreases in the network of coupled Rulkov maps (4). Initial structure in the layer taken with $R = 19$ (a). The dynamics of newly given structure at $R = 11$ and $t = 7$ (b), $t = 19$ (c), $t = 28$ (d). Other parameters: $\alpha = 4$, $\gamma = 0.2$, $\mu = 0.001$, $\sigma = 0.65$

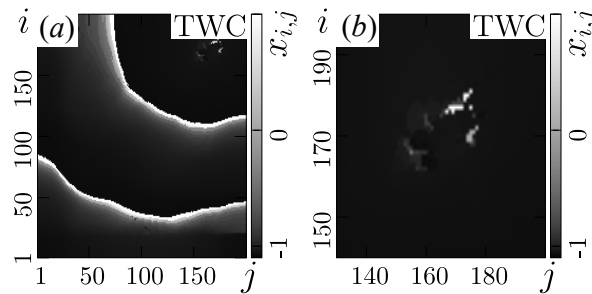


Рис. 8. Концентрическая волновая химера (a) и увеличенный фрагмент некогерентного кластера (b) в решетке нелокально связанных отображений Рулькова. Мгновенный пространственный профиль амплитуд решетки. Параметры: $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.45$, $R = 15$

Fig. 8. Target wave chimera (a) and the enlarged fragment of incoherent cluster (b) in the lattice of nonlocally coupled Rulkov maps. Snapshot of amplitudes in the lattice. Parameters: $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.45$, $R = 15$

структура в сети представлена на рис. 7, a. На рис. 8 представлен пример химерной структуры на основе концентрической волны. Кластер осцилляторов с некогерентной динамикой находится в области $155 < i < 185$, $145 < j < 180$.

2.3. Сравнение динамики решеток связанных осцилляторов ван дер Поля и связанных отображений Рулькова. Таким образом, показано, что в обоих решетках, одна из которых представляет собой решетку нелокально связанных нелинейных осцилляторов, а другая – решетку нелокально связанных отображений, моделирующих нейронную динамику, наблюдаются как спиральные и концентрические волны, так и спиральные и концентрические химерные состояния. При этом способы получения указанных структур различаются. В решетке осцилляторов ван дер Поля при локальной связи можно получить как спиральные, так и концентрические волны с использованием случайных реализаций начальных условий $x_{i,j}^0$ и $y_{i,j}^0$. Области их существования как по параметру ε , так и по параметру силы связи σ , либо близко расположены, либо пересекаются. Было обнаружено, что при значениях параметра $\varepsilon < 2$ наиболее вероятно получить спиральные волны, а при значениях $\varepsilon > 2$ – концентрические волны. В окрестности значения параметра $\varepsilon \sim 2$ наблюдается мультистабильность: в зависимости от выбора реализации начальных условий можно наблюдать или спиральные волны, или концентрические волны.

Для получения химерных состояний на основе спиральных и концентрических волн выбирались начальные структуры, полученные при локальной связи, и вводилась нелокальная связь с плавным увеличением параметра нелокальности R . Таким образом, возможен переход от спиральных волн к спирально-волновым химерам, от концентрических волн к концентрическим химерным состояниям и от спиральных волн к концентрическим химерным состояниям.

В то же время в рассматриваемой области параметров в решетке связанных отображений Рутькова спиральные волны не были найдены ни в области локальной связи, ни при введении нелокальности. Концентрические волны же наблюдаются в малой области изменения параметров R и σ , вероятность их наблюдения сильно зависит от начальных условий, и они не являются долгоживущими (живут лишь ограниченное время). Те же замечания относятся и к химерным структурам на основе концентрических волн в решетке отображений Рутькова, в то время как в решетке осцилляторов ван дер Поля эти структуры являются долгоживущими. Что касается спирально-волновых химер, в обоих случаях они являются долгоживущими структурами (в пределах выбранного нами времени численного счета) и наблюдаются в достаточно большой области параметров. Кроме классических спирально-волновых химер, в решетке нелокально связанных отображений Рутькова при переходе к одноядерным спирально-волновым химерам наблюдается новый тип химер – SWC с ядром в виде кольца.

3. Сравнение динамики химерных автоволновых структур в решетках осцилляторов ван дер Поля и отображений Рутькова

В предыдущем разделе проведено сравнение наблюдаемых режимов в решетках нелокально связанных генераторов различного типа в общих чертах. В этом разделе мы сравниваем динамику химерных состояний на основе как спиральной, так и концентрической волн в решетках осцилляторов ван дер Поля и отображений Рутькова более детально.

3.1. Спиральная волновая химера. Характер некогерентной динамики спирально-волновой химеры в решетке связанных осцилляторов ван дер Поля иллюстрирует рис. 9, а в решетке связанных отображений Рутькова – рис. 10. На фрагментах *a, c, d* рис. 9 и 10 приведены результаты расчета мгновенных амплитуд, сечение мгновенных амплитуд по ядру некогерентности и пространственно-временная диаграмма этого сечения, соответственно. По перечисленным характеристикам визуально можно обнаружить наличие кластера некогерентности в середине решетки, который характеризуется нерегулярным распределением амплитуд соседних элементов как в случае ансамбля ван дер Поля, так и в случае ансамбля Рутькова. Расчет средних значений частот парциальных элементов обнаруживает следующее различие в их поведении: средние значения частот осцилляторов в некогерентном кластере решетки ван дер Поля уменьшаются по сравнению с осцилляторами из когерентного кластера (см. рис. 9, *b*), тогда как средние значения частот отображений некогерентного кластера решетки Рутькова увеличиваются по сравнению с отображениями некогерентного кластера (см. рис. 10, *b*).

Рассмотрим взаимное поведение отдельно взятых соседних осцилляторов из когерентного кластера и из некогерентного кластера. На рис. 9, 10 для каждой выбранной пары осцилляторов были рассчитаны фазовые портреты (фрагменты *e, f*), мгновенные значения частот в зависимости от времени (фрагменты *g, h*) и временные реализации (фрагменты *i, j*). Мгновенные значения частот вычислялись как величина, обратная длительности одного прошедшего колебания. Соседние осцилляторы, взятые из когерентного кластера, ведут себя одинаково как в случае решетки осцилляторов ван дер Поля (см. рис. 9, *e, g, i*), так и в случае решетки отображений Рутькова (см. рис. 10, *e, g, i*). При этом их поведение почти эквивалентно поведению соответствующего осциллятора, взятого отдельно – без ансамбля. В поведении соседних осцилляторов из ядра химерных

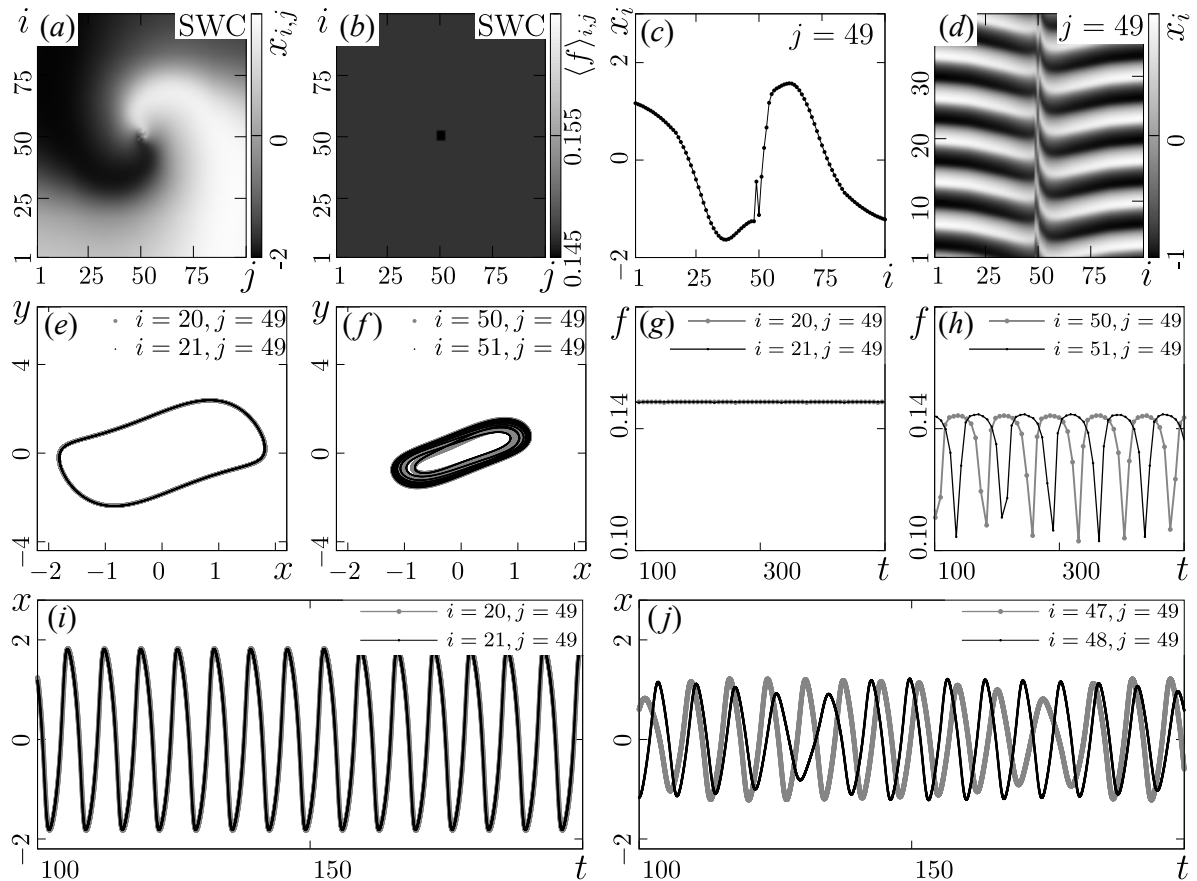


Рис. 9. Описание динамики SWC в случае $R = 16$ в решетке (3). Мгновенный снимок амплитуд решетки x_{ij} (a); средние значения частот осцилляторов (b); сечение мгновенного снимка амплитуд $j = 49$ (c); пространственно-временная диаграмма этого сечения (d); фазовые портреты (e, f), зависимости мгновенных частот от времени (g, h) и временные реализации (i, j) соседних осцилляторов из когерентной области (e, g, i) и некогерентной области (f, h, j). Остальные параметры: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 1$

Fig. 9. Description of the SWC dynamics for $R = 16$ in lattice (3). Snapshot x_{ij} of the lattice (a); mean values of oscillators frequencies (b); cut of the snapshot at $j = 49$ (c); spatio-temporal diagram of the cut (d); phase portraits (e, f), dependencies of instantaneous frequencies on time (g, h), and time series (i, j) of neighbouring oscillators from the coherent region (e, g, i) and from the incoherent region (f, h, j). Other parameters: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 1$

состояний наблюдаются отличия: в обоих случаях изменяется фазовый портрет (см. рис. 9, f, 10, f); временные реализации осцилляторов ядра химеры в решетке (3) представляют собой смещенные друг относительно друга амплитудно-модулированные колебания (см. рис. 9, j), временные зависимости отображений ядра некогерентности химеры в решетке (4) представляют собой не отличающиеся по форме от колебаний отдельного осциллятора некогерентные друг с другом спайковые колебания (см. рис. 10, j); зависимость мгновенных значений частот от времени в решетке (3) свидетельствует также о наличии частотной модуляции колебаний внутри кластера некогерентности (см. рис. 9, h), мгновенные частоты соседних осцилляторов в ядре некогерентности решетки (4) меняются для каждого отображения нерегулярно во времени и несвязанно между собой (см. рис. 10, h).

3.2. Концентрическая волновая химера. По аналогии с разделом 3.1 рассмотрим поведение решеток в режиме концентрических химерных состояний. Характер некогерентной динамики ядра структур для этого случая в решетке связанных осцилляторов ван дер Поля иллю-

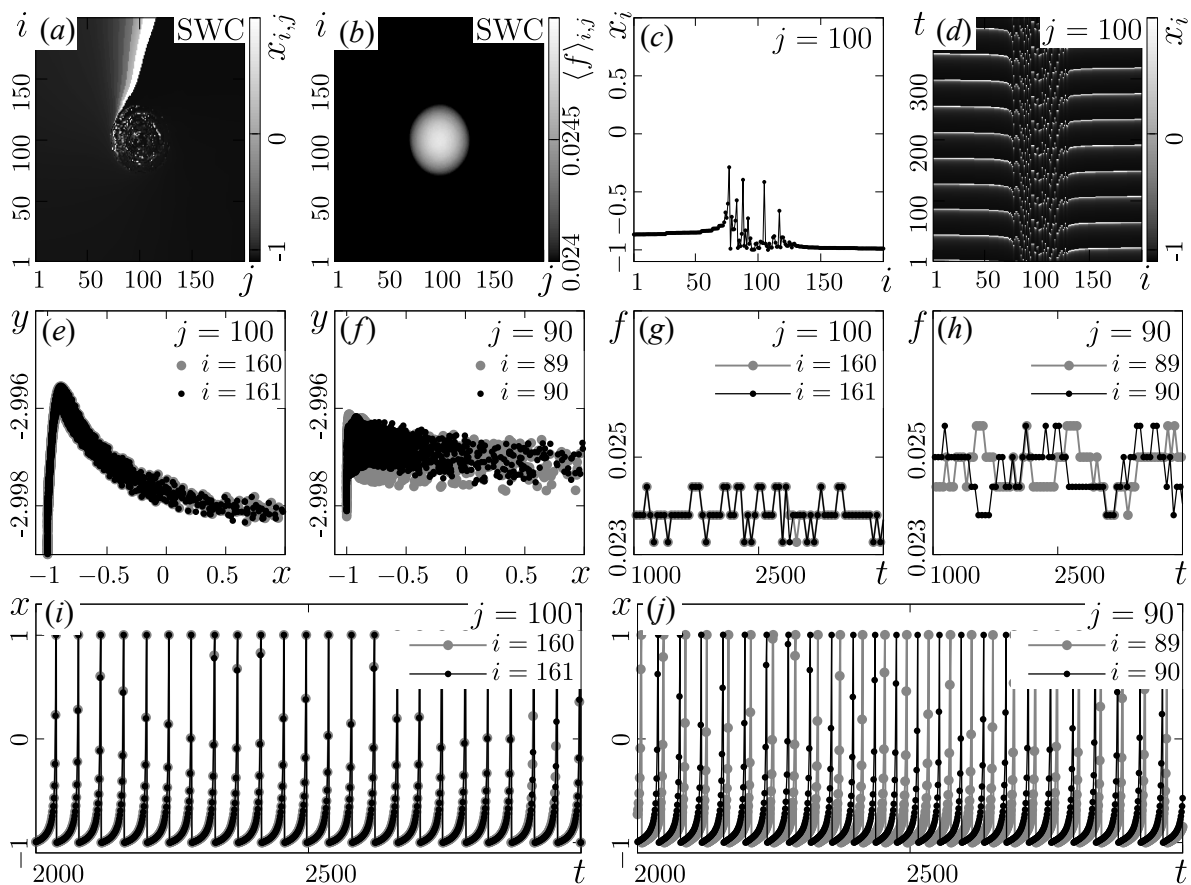


Рис. 10. Описание динамики SWC в случае $R = 53$ в решетке (4). Мгновенный снимок амплитуд решетки x_{ij} (a); средние значения частот осцилляторов (b); сечение мгновенного снимка амплитуд $j = 100$ (c); пространственно-временная диаграмма этого сечения (d); фазовые портреты (e, f), зависимости мгновенных частот от времени (g, h) и временные реализации (i, j) соседних осцилляторов из когерентной области (e, g, i) и некогерентной области (f, h, j). Остальные параметры: $\sigma = 0.65$, $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$

Fig. 10. Description of the SWC dynamics for $R = 53$ in lattice (4). Snapshot x_{ij} of the lattice (a); mean values of oscillator frequencies (b); cut of the snapshot at $j = 100$ (c); spatio-temporal diagram of the cut (d); phase portraits (e, f), dependencies of instantaneous frequencies on time (g, h), and time series (i, j) of neighbouring oscillators from the coherent region (e, g, i) and from the incoherent region (f, h, j). Other parameters: $\sigma = 0.65$, $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$

стрирует рис. 11, а в решетке связанных отображений Рутькова – рис. 12. На фрагментах a, c, d рис. 11 и 12 приведены результаты расчета мгновенных амплитуд, сечение мгновенных амплитуд по ядру некогерентности и пространственно-временная диаграмма этого сечения, соответственно. Эти графики позволяют обнаружить кластер некогерентности в середине концентрической волны, характеризующийся некоторым негладким распределением амплитуд соседних генераторов как в случае связанных осцилляторов ван дер Поля, так и в случае отображений Рутькова. Расчет средних значений частот генераторов решеток в обоих случаях говорит об отсутствии заметных различий с точки зрения распределения величин средней частоты (см. рис. 9, b, 10, b).

Различия в поведении в выбранном режиме становятся заметными при рассмотрении взаимного поведения отдельно взятых соседних осцилляторов из когерентного кластера и из некогерентного кластера. На рис. 11, 12 для каждой выбранной пары осцилляторов были рассчитаны фазовые портреты (фрагменты e, f), мгновенные значения частот в зависимости от времени (фрагменты g, h) и временные реализации (фрагменты i, j). Мгновенные значения частот вычислялись как величина, обратная длительности одного прошедшего колебания. Соседние осцилля-

торы, взятые из когерентного кластера, ведут себя одинаково как в случае решетки осцилляторов ван дер Поля (рис. 11, *e, g, i*), так и в случае решетки отображений Рутькова (рис. 12, *e, g, i*). Стоит отметить, что поведение отображений Рутькова в когерентном кластере почти идентично поведению отдельного автономного отображения, но осциллятор ван дер Поля демонстрирует несвойственное ему поведение даже в когерентной области: его колебания становятся модулированными как по амплитуде (рис. 11, *i*), так и по частоте (рис. 11, *g*). В поведении соседних осцилляторов из ядра химерных состояний также наблюдаются различия: в обоих случаях изменяется фазовый портрет (рис. 11, *f, 12, f*). Временные реализации элементов из ядра химеры в решетке (3) представляют собой смещенные друг относительно друга амплитудно-модулированные, но почти гармонические и противофазные колебания (рис. 11, *j*), временные зависимости элементов из ядра некогерентности химеры в решетке (4) представляют собой колебания, не отличающиеся по форме от колебаний отдельного осциллятора. При этом колебания соседних элементов некогерентны (рис. 12, *j*). Зависимость мгновенных значений частот от времени в решетке (3) свидетельствует также об уменьшении коэффициента частотной модуляции колебаний внутри

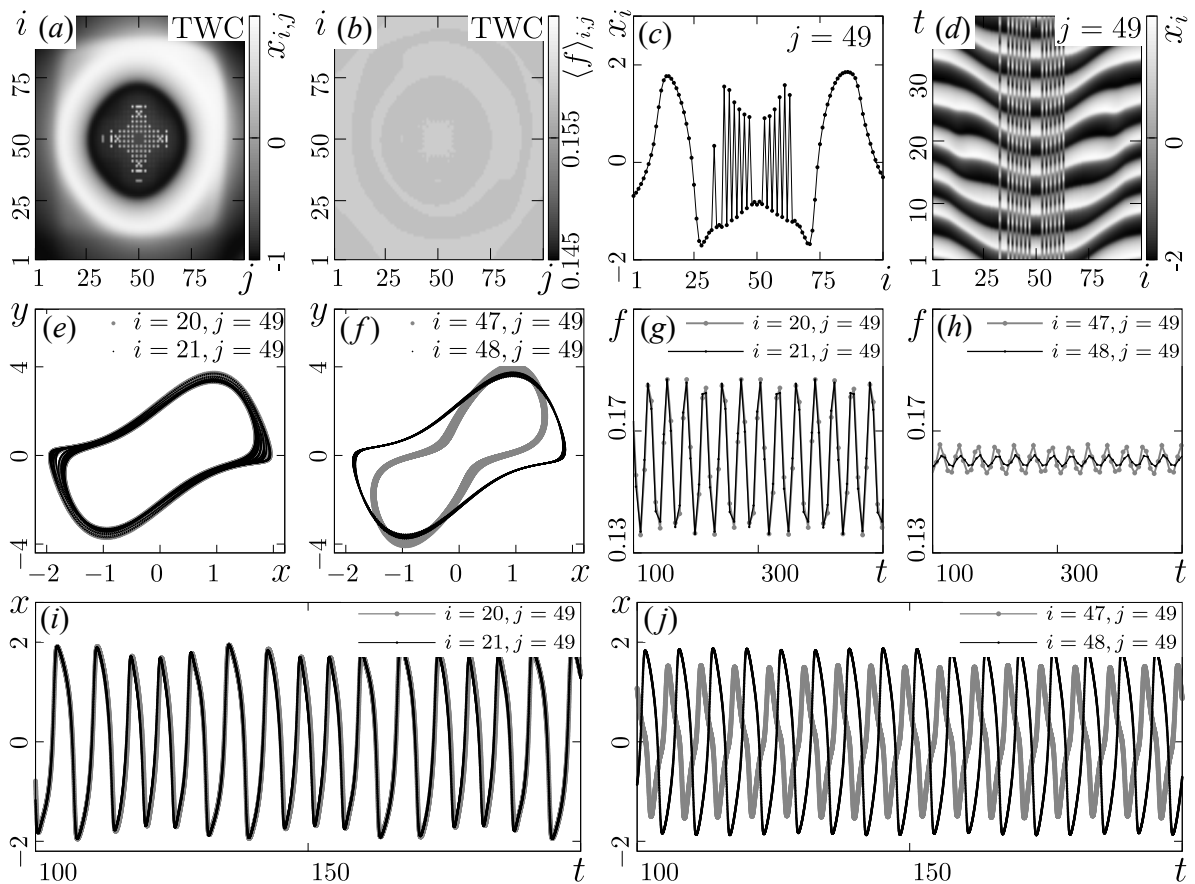


Рис. 11. Описание динамики TWC в случае $R = 8$ в решетке (3). Мгновенный снимок амплитуд решетки x_{ij} (a); средние значения частот осцилляторов (b); сечение мгновенного снимка амплитуд $j = 49$ (c); пространственно-временная диаграмма этого сечения (d); фазовые портреты (e, f), зависимости мгновенных частот от времени (g, h) и временные реализации (i, j) соседних осцилляторов из когерентной области (e, g, i) и некогерентной области (f, h, j). Остальные параметры: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 2$

Fig. 11. Description of the TWC dynamics for $R = 8$ in lattice (3). Snapshot x_{ij} of the lattice (a); mean values of oscillators frequencies (b); cut of the snapshot at $j = 49$ (c); spatio-temporal diagram of the cut (d); phase portraits (e, f), dependencies of instantaneous frequencies on time (g, h) and time series (i, j) of neighbouring oscillators from the coherent region (e, g, i) and from the incoherent region (f, h, j). Other parameters: $\sigma = 0.7$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 2$

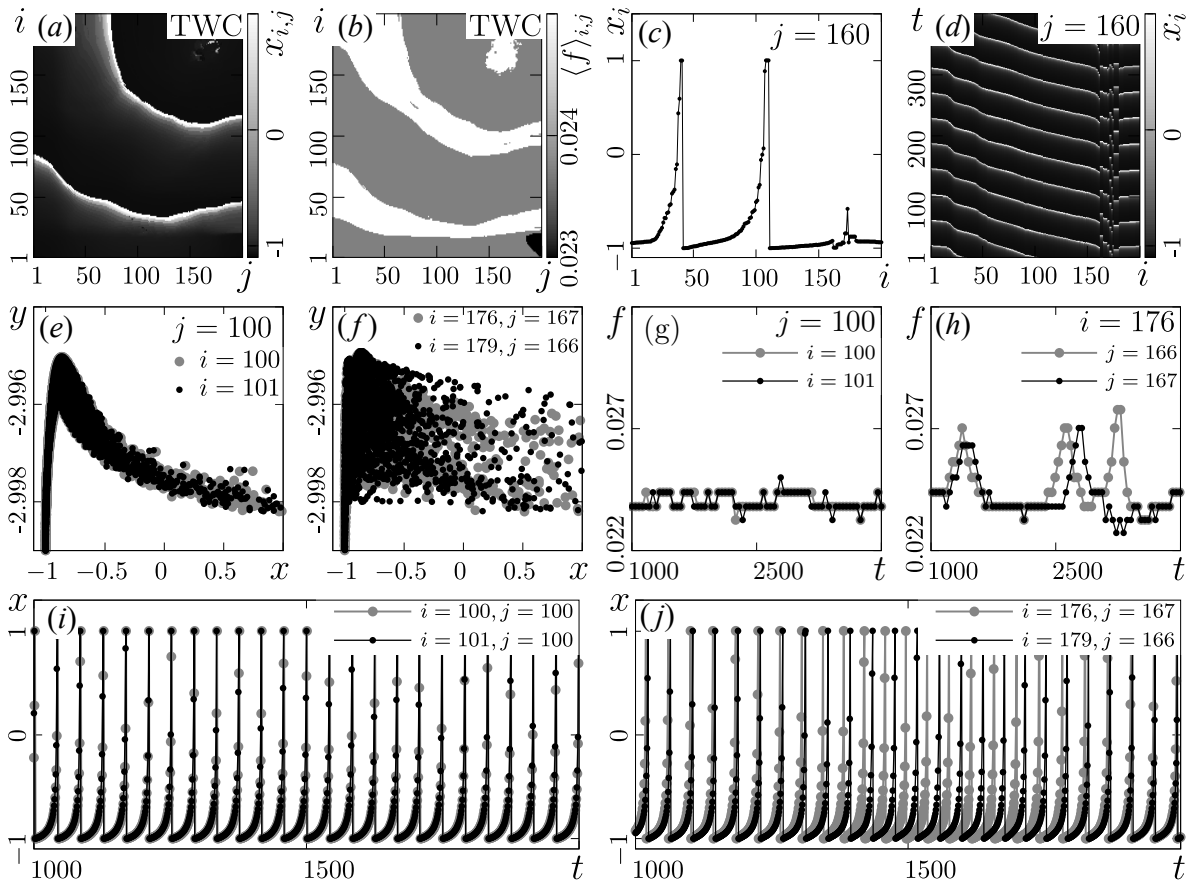


Рис. 12. Описание динамики ТWC в случае $R = 15$ в решетке (4). Мгновенный снимок амплитуд решетки x_{ij} (a); средние значения частот осцилляторов (b); сечение мгновенного снимка амплитуд $j = 160$ (c); пространственно-временная диаграмма этого сечения (d); фазовые портреты (e, f), зависимости мгновенных частот от времени (g, h) и временные реализации (i, j) соседних осцилляторов из когерентной области (e, g, i) и некогерентной области (f, h, j). Остальные параметры: $\sigma = 0.45$, $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$

Fig. 12. Description of the TWC dynamics for $R = 15$ in lattice (4). Snapshot x_{ij} of the lattice (a); mean values of oscillators frequencies (b); cut of the snapshot at $j = 160$ (c); spatio-temporal diagram of the cut (d); phase portraits (e, f), dependencies of instantaneous frequencies on time (g, h), and time series (i, j) of neighbouring oscillators from the coherent region (e, g, i) and from the incoherent region (f, h, j). Other parameters: $\sigma = 0.45$, $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$

кластера некогерентности (рис. 11, h). Мгновенные частоты соседних отображений в ядре некогерентности решетки (4) меняются для каждого отображения нерегулярно во времени и несвязанно между собой, довольно значительно отклоняясь от среднего значения частоты (рис. 12, h).

3.3. Сравнение спиральной волновой и концентрической волновой химер. Отметим различия между структурой некогерентных ядер химерных структур TWC и SWC. В случае связанных отображений Рутькова ядро TWC (рис. 12) имеет более сложную структуру в отличие от ядра SWC (рис. 10). Временная динамика элементов из ядер обоих типов химерных структур практически одинакова. В обоих случаях наблюдается изменение частоты колебаний во времени, что приводит к асинхронной динамике соседних элементов (сравните рис. 10, g, h и 12, g, h). Другое отличие SWC и TWC в решетке связанных отображений Рутькова состоит в том, что распределение средних частот в случае SWC имеет пик в некогерентном ядре. В случае же TWC заметного изменения средних частот при приближении к ядру некогерентности не наблюдается (сравните рис. 10, b и 12, b). В случае решетки осцилляторов ван дер Поля зависимости мгновенных частот от времени периодически или почти периодически изменяются внутри ядра

некогерентности как для SWC, так и для TWC (сравните рис. 9, *h* и 11, *h*). Есть особенность, свойственная только для TWC в (3), заключающаяся в том, что колебания даже в когерентном кластере становятся модулированными по частоте (рис. 11, *g*). Распределение средних частот для SWC в решетке (3) отличается от случая SWC в решетке (4) тем, что её значения к центру некогерентного кластера уменьшаются (рис. 9, *b*), а не увеличиваются (рис. 10, *b*). Распределение средних частот для TWC в решетке (3) по характеру идентично распределению частот для TWC в решетке (4) и заметно не изменяется в некогерентном кластере (сравните рис. 11, *b* и 12, *b*). Из вышесказанного можно заключить, что колебания в некогерентном кластере TWC характеризуются большей регулярностью, чем колебания в некогерентном кластере SWC вне зависимости от выбора парциального элемента.

4. Влияние внешнего шумового воздействия на автоволны в исследуемых решетках

Рассматривается влияние внешнего шумового воздействия на различные автоволновые структуры, наблюдаемые в исследуемых ансамблях, и проводится сравнение результатов этого воздействия. Как показали проведенные исследования, в обеих решетках возможна реализация двух типов волновых структур: спиральных и концентрических волн. Эти структуры важны не только с чисто научной точки зрения, но и в приложениях. Известно, например, что режим концентрических волн в сердечной мышце отвечает нормальному функционированию сердца, а спиральные волны отвечают возникновению патологии, связанной с фибрилляцией, аритмией и тахикардией [56, 57]. В связи с этим возникает вопрос о возможности подавления режима спиральных волн с переходом к концентрическим волнам с целью избежать патологий в работе сердца. Подобный вопрос исследовался ранее в работах [58–60], где авторы реализовали указанный переход путем воздействия периодического сигнала на одиночный элемент ансамбля. В нашей работе внешнее воздействие вводится в виде аддитивного белого Гауссова шума с интенсивностью D в уравнение f_x в (3) и (4), то есть добавляется слагаемое $\sqrt{2D}\xi_{i,j}^t$, где ξ – источник шума. Наши исследования показали, что переход от спиральной волны к концентрической в решетке локально связанных отображений Рутькова может быть реализован при воздействии шумового возмущения на конечный кластер осцилляторов ансамбля. В решетке связанных осцилляторов ван дер Поля как спиральные, так и концентрические волны оказываются устойчивыми к небольшому шумовому воздействию, но при увеличении шумового воздействия спиральная волна с одним источником перестраивается в спиральную волну с несколькими источниками, а концентрическая переходит в спиральную волну.

4.1. Результаты воздействия шума на решетку связанных осцилляторов ван дер Поля. Рассмотрим влияние внешнего шумового воздействия одинаковой интенсивности D на все элементы решетки одновременно. С этой целью мы устанавливаем интенсивность шума на некотором значении $D = D_0$ и интегрируем уравнения (3) 10000 единиц дискретного времени. Затем при нулевом значении $D = 0$ проводим вычисления в течение такого же времени. Мгновенный снимок амплитуд x_{ij} осцилляторов после 20000 итераций рассматриваем как результат. На рис. 13 приведены данные расчетов влияния шумового воздействия для спиральной (рис. 13, *a*) и концентрической (рис. 13, *d*) волн, соответственно. При $D_0 < 0.01$ обе структуры устойчивы к шуму (рис. 13, *a, d*). При $D_0 \geq 0.01$ спиральная волна разрушается и осуществляется переход к спиральным волнам с множеством ведущих центров (рис. 13, *b, c*). Иначе ведет себя решетка в режиме концентрической волны: под действием шума интенсивности $D_0 \geq 0.01$ реализуется индуцированный шумом переход к режиму спиральной волны с множеством ведущих центров (рис. 13, *e, f*).

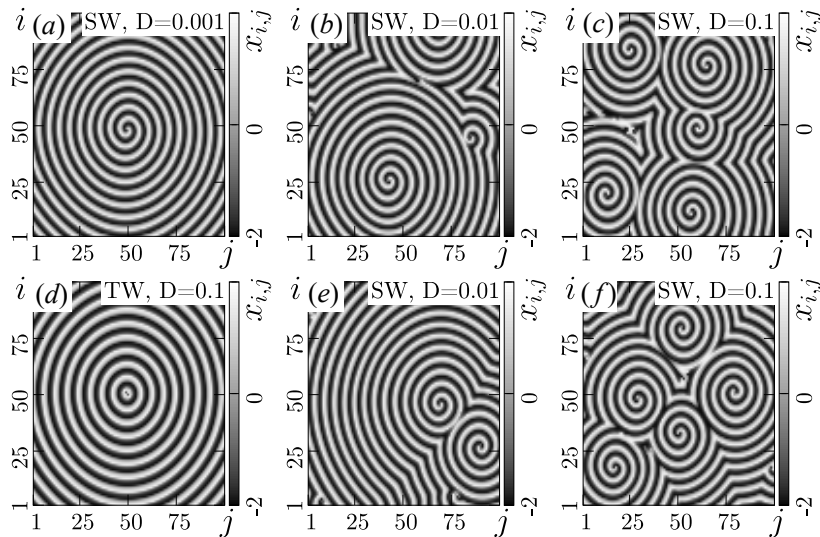


Рис. 13. Сравнение результатов воздействия шума на ансамбль в режимах спиральных (*a-c*) и концентрических (*d-f*) волн. Мгновенные снимки амплитуд x_{ij} решетки (3) при $D_0 = 0.001$ (*a, d*); $D_0 = 0.01$ (*b, e*); $D_0 = 0.1$ (*c, f*). Остальные параметры: $R = 1$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 2$, $\sigma = 0.7$

Fig. 13. Comparison of noise influence results on the ensemble in the spiral wave regime (*a-c*) and in the target wave regime (*d-f*). Snapshots x_{ij} of lattice (3) at $D_0 = 0.001$ (*a, d*); $D_0 = 0.01$ (*b, e*); $D_0 = 0.1$ (*c, f*). Other parameters: $R = 1$, $\omega = 0.9$, $\varepsilon = 2$, $\sigma = 0.7$

4.2. Индуцированный шумом переход от режима спиральной волны к концентрической. В решетке локально связанных отображений Рутькова для разрушения спиральных волн источник шума интенсивности D вводится только в конечную область пространства, а не во всю решетку. Воздействие вводилось в систему после переходного периода установления спиральной волны $t_0 = 100000$. При добавлении шума в область центра спиральной волны она не разрушается. Чтобы разрушить спиральные волны и перейти от них к концентрическим, необходимо подавать внешнее воздействие в осцилляторы, не принадлежащие центру спиральной волны. Установлено, что важен размер области воздействия шума. Если она мала, то спиральная химера не разрушается, но изменяется месторасположение её центра. Результаты вычислений по воздействию шума на спиральную волну приведены на рис. 14. На рис. 14, *a* изображена спиральная волна в отсутствие шумового воздействия. Рис. 14, *b* демонстрируют изменение профиля при

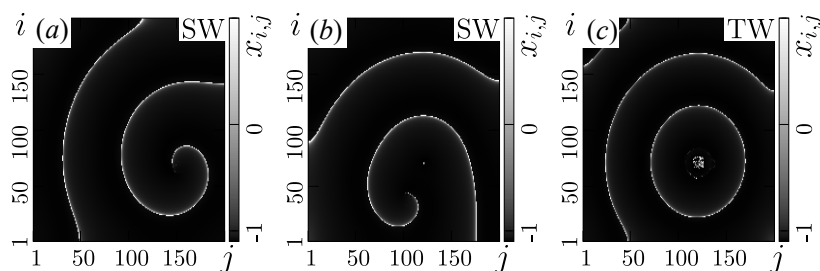


Рис. 14. Воздействие аддитивного белого Гауссова шума на спиральные волны. *a* – Спиральная волна, устанавливающаяся в системе (4). *b* – Установившаяся структура $t = 199970$ после воздействия шума на квадратную область 2×2 ($69 \leq i \leq 70$, $120 \leq j \leq 121$). *c* – Индуцированная концентрическая волна при воздействии шума на квадратную область 11×11 ($65 \leq i \leq 75$, $115 \leq j \leq 125$), $t = 199950$. Параметры: $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.8$, $R = 1$, $D = 0.5$

Fig. 14. Effect of additive white Gaussian noise on spiral waves. *a* – Initial spiral wave regime in the lattice (4). *b* – Steady-state structure at $t = 199970$ after the noise effect on a square of 2×2 elements ($69 \leq i \leq 70$, $120 \leq j \leq 121$), *c* – induced target wave under the influence of noise on a square region of 11×11 elements ($65 \leq i \leq 75$, $115 \leq j \leq 125$) at time $t = 199950$. Parameters: $\alpha = 4$, $\mu = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $\sigma = 0.8$, $R = 1$, $D = 0.5$

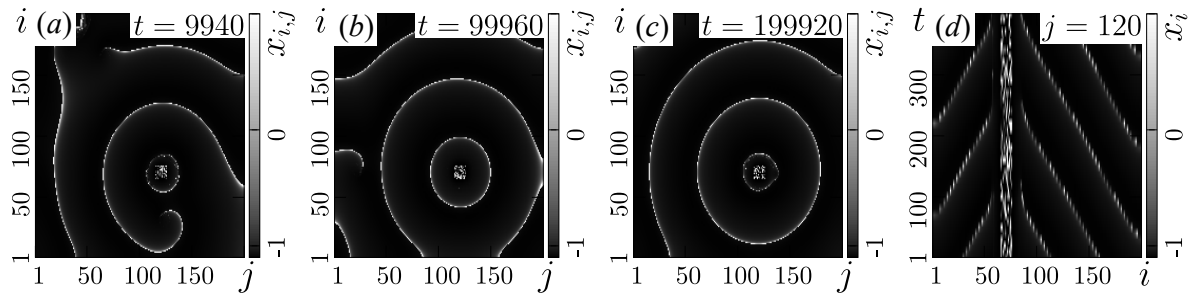


Рис. 15. Установление концентрических волн во времени при воздействии шумом на спиральную волну в решетке Руйкова (4) (см. рис. 14, a) для различных моментов времени: $t = 9940$ (a), $t = 99960$ (b), $t = 199920$ (c). d – Пространственно-временная диаграмма сечения $j = 120$ после полного установления концентрических волн в системе. Параметры, как на рис. 14

Fig. 15. Target wave formation with the noise presence in the Rulkov lattice (4) (fig. 14, a) for different time: $t = 9940$ (a), $t = 99960$ (b), $t = 199920$ (c). d – Spatio-temporal diagram for the cross section $j = 120$ for the steady-state regime of target wave. Parameters are as in Fig. 14

воздействии шума на малый квадрат размером 2×2 элемента ($69 \leq i \leq 70$, $120 \leq j \leq 121$). Малой области воздействия шума не достаточно, чтобы разрушить спиральную волну, но это воздействие перемещает ядро спиральной волны (сравн. рис. 14, a и 14, b). Увеличение области воздействия шума приводит к разрушению спиральной волны и установлению концентрической волны (см. рис. 14, b). В данном случае область воздействия шума представляет собой квадрат размером 11×11 элементов ($65 \leq i \leq 75$, $115 \leq j \leq 125$).

Отметим, что концентрические волны наблюдаются в системе только при воздействии шума. Если убрать шумовое воздействие ($D_{x,y} = 0$), то система возвращается к спиральным волнам или переходит в когерентный режим. Рис. 15 демонстрирует становление в системе концентрических волн при воздействии шума на спиральную волну. Как можно видеть, спиральная волна разрушается постепенно, и со временем вокруг области воздействия устанавливаются новые кольца концентрической волны, пока они полностью не вытеснят спирально-волновую структуру из среды. На рис. 15, d показана динамика во времени сечения $j = 120$ после полного установления концентрических волн в системе. Данная концентрическая волна распространяется в направлении к ядру (области, на которую мы воздействуем шумом).

Заключение

Обнаружение нового типа автоволновой структуры – химерного состояния на основе концентрической волны – породило интерес к более детальному исследованию этого явления и сравнению его с широко известной спирально-волновой химерной структурой. В работе представлены результаты моделирования динамики двумерного ансамбля в случаях нелокально связанных осцилляторов ван дер Поля и отображений Руйкова. Индивидуальные осцилляторы ван дер Поля рассматривались в режиме релаксационных колебаний, а индивидуальные отображения Руйкова – в режиме генерации спайков. Проведено исследование зависимости разнообразия наблюдаемых структур от выбора парциального элемента. Показано, что в обоих ансамблях возможно наблюдение как классических спиральных и концентрических волн, так и химерных структур на их основе. Последние обнаруживаются при введении нелокальной связи при достаточно больших значениях параметра нелокальности. Для обоих ансамблей представлены соответствующие бифуркационные диаграммы на плоскости управляющих параметров. Спиральные и концентрические химеры были детально исследованы с точки зрения сравнения усредненных и мгновенных частотных характеристик отдельных элементов ансамблей, реализующих эти ре-

жимы. Результаты численных экспериментов показали, что для обеих ансамблей в случае TWC средние значения частот в ансамбле распределяются равномерно, тогда как в случае SWC средние значения частот в некогерентном кластере отличаются от значений в когерентных областях. Отсюда следует, что для двух ансамблей с различными динамическими элементами колебания в некогерентном кластере TWC характеризуются большей регулярностью, чем колебания в некогерентном кластере SWC. Результаты по влиянию внешнего шумового воздействия на классические спиральные и концентрические структуры показали, что в ансамбле осцилляторов ван дер Поля становится возможным индуцированный шумом переход от концентрических волн к спиральным. В ансамбле связанных отображений Рутькова была получена концентрическая структура, которая существует только при наличии постоянного шумового воздействия. Учитывая, что спиральные и концентрические волны широко используются при анализе динамики сердечной мышцы [7, 18, 20, 22, 25], результаты настоящей работы могут быть полезны в приложениях к задачам кардиологии.

Библиографический список

1. *Winfrey A.T.* Rotating chemical reaction // *Scientific American*. 1974. Vol. 230, no. 6. P. 82–95.
2. *Vasiliev V.A., Romanovskii Yu.M., Chernavskii D.S., Yakhno V.G.* *Autowave Processes in Kinetic Systems*. Springer, Netherlands, 1987.
3. *Kopell N., Howard L.N.* Plane wave solutions to reaction–diffusion equations // *Studies in Applied Mathematics*. 1973. Vol. 52, no. 4. P. 291–328.
4. *Howard L.N., Kopell N.* Slowly varying waves and shock structures in reaction–diffusion equations // *Studies in Applied Mathematics*. 1977. Vol. 56, no. 2. P. 95–145.
5. *Hagan P.S.* Spiral waves in reaction-diffusion equations // *SIAM J. Appl. Math.* 1982. Vol. 42, no. 4. P. 762–786.
6. *Keener J.P., Tyson J.J.* Spiral waves in the Belousov–Zhabotinskii reaction // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1986. Vol. 21, no. 2. P. 307–324.
7. *Tyson J.J., Keener J.P.* Spiral waves in a model of myocardium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1987. Vol. 29, no. 1. P. 215–222.
8. *Biktashev V.N.* Diffusion of autowaves: Evolution equation for slowly varying autowaves // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989. Vol. 40, no. 1. P. 83–90.
9. *Barkley D., Kness M., Tuckerman L.S.* Spiral-wave dynamics in a simple model of excitable media: The transition from simple to compound rotation // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 42, no. 4. P. 2489–2492.
10. *Castelpoggi F., Wio H.S.* Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57, no. 5. P. 5112–5121.
11. *Ermakova E.A., Panteleev M.A., Shnol E.E.* Blood coagulation and propagation of autowaves in flow // *Pathophysiology of Haemostasis and Thrombosis*. 2005. Vol. 34, no. 2–3. P. 135–142.
12. *Krinsky V.I.* *Autowaves: Results, Problems, Outlooks*. Springer Series in Synergetics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984.
13. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* От беспорядка к упорядоченности на примере движения микроорганизмов // *Успехи физических наук*. 1991. Т. 161, № 4. С. 13–71.
14. *Zaikin A.N., Zhabotinsky A.M.* Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system // *Nature*. 1970. Vol. 225, no. 5232. P. 535–537.
15. *Zhabotinsky A., Zaikin A.* Autowave processes in a distributed chemical system // *Journal of Theoretical Biology*. 1973. Vol. 40, no. 1. P. 45–61.

16. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах // Успехи физических наук. 1979. Т. 128, № 8. С. 625–666.
17. Krinsky V., Biktashev V., Efimov I. Autowave principles for parallel image processing // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1991. Vol. 49, no. 1. P. 247–253.
18. Davidenko J.M., Pertsov A.V., Salomonsz R., Baxter W., Jalife J. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle // *Nature*. 1992. Vol. 355, no. 6358. P. 349–351.
19. Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А. От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике // Успехи физических наук. 1994. Vol. 164, № 10. С. 1041–1072.
20. Winfree A.T. Electrical turbulence in three-dimensional heart muscle // *Science*. 1994. Vol. 266, no. 5187. P. 1003–1006.
21. Davydov V.A., Morozov V.G., Davydov N.V. Ring-shaped autowaves on curved surfaces // *Physics Letters A*. 2000. Vol. 267, no. 5–6. P. 326–330.
22. Fenton F.H., Cherry E.M., Hastings H.M., Evans S.J. Multiple mechanisms of spiral wave breakup in a model of cardiac electrical activity // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2002. Vol. 12, no. 3. P. 852–892.
23. Hildebrand M., Cui J., Mihaliuk E., Wang J., Showalter K. Synchronization of spatiotemporal patterns in locally coupled excitable media // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 2. 026205.
24. Kuramoto Y., Shima S. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2003. Vol. 150. P. 115–125.
25. Zhang H., Ruan X.S., Hu B., Ouyang Q. Spiral breakup due to mechanical deformation in excitable media // *Physical Review E*. 2004. Vol. 70, no. 1. 016212.
26. Shima S., Kuramoto Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators // *Physical Review E*. 2004. Vol. 69, no. 3. 036213.
27. Kuramoto Y., Shima S.I., Battogtokh D., Shiogai Y. Mean-field theory revives in self-oscillatory fields with non-local coupling // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2006. Vol. 161. P. 127–143.
28. Shang L., Yi Z., Ji L. Binary image thinning using autowaves generated by PCNN // *Neural Processing Letters*. 2007. Vol. 25, no. 1. P. 49–62.
29. Laing C.R. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238, no. 16. P. 1569–1588.
30. Martens E.A., Laing C.R., Strogatz S.H. Solvable model of spiral wave chimeras // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 104, no. 4. 044101.
31. Кузьмин Ю.О. Деформационные автоволны в разломных зонах // *Физика Земли*. 2012. № 1. С. 3.
32. Nkomo S., Tinsley M.R., Showalter K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 24. 244102.
33. Gu C., St-Yves G., Davidsen J. Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 111, no. 13. 134101.
34. Tang X., Yang T., Epstein I.R., Liu Y., Zhao Y., Gao Q. Novel type of chimera spiral waves arising from decoupling of a diffusible component // *The Journal of Chemical Physics*. 2014. Vol. 141, no. 2. 024110.
35. Panaggio M.J., Abrams D.M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28, no. 3. R67.
36. Xie J., Knobloch E., Kao H.C. Twisted chimera states and multicore spiral chimera states on a two-dimensional torus // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92, no. 4. 042921.

37. *Li B.W., Dierckx H.* Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems // *Physical Review E*. 2016. Vol. 93, no. 2. 020202.
38. *Weiss S., Deegan R.D.* Weakly and strongly coupled Belousov-Zhabotinsky patterns // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95, no. 2. 022215.
39. *Totz J.F., Rode J., Tinsley M.R., Showalter K., Engel H.* Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators // *Nature Physics*. 2018. Vol. 14, no. 3. P. 282.
40. *Kundu S., Majhi S., Muruganandam P., Ghosh D.* Diffusion induced spiral wave chimeras in ecological system // *The European Physical Journal Special Topics*. 2018. Vol. 227, no. 7–9. P. 983–993.
41. *Guo S., Dai Q., Cheng H., Li H., Xie F., Yang J.* Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled Fitzhugh–Nagumo systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2018. Vol. 114. P. 394–399.
42. *Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V.* Spiral wave patterns in a two-dimensional lattice of nonlocally coupled maps modeling neural activity // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. Vol. 120. P. 75–82.
43. *Omel'chenko O.E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y.L., Sudakov O.* Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, no. 3. 036210.
44. *Tanaka D., Kuramoto Y.* Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 2. 026219.
45. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
46. *Abrams D.M., Strogatz S.H.* Chimera states for coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. 174102.
47. *Wolfrum M., Omel'chenko O.E., Yanchuk S., Maistrenko Y.L.* Spectral properties of chimera states // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21, no. 1. 013112.
48. *Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S.* Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 43. P. 25–36.
49. *Bukh A.V., Anishchenko V.S.* Spiral, target, and chimera wave structures in a two-dimensional ensemble of nonlocally coupled van der Pol oscillators // *Technical Physics Letters*. 2019. Vol. 45, no. 7. P. 675–678.
50. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65, no. 4. 041922.
51. *Panaggio M.J., Abrams D.M.* Chimera states on a flat torus // *Physical review letters*. 2013. Vol. 110, no. 9. 094102.
52. *Panaggio M.J.* Spot and spiral chimera states: Dynamical patterns in networks of coupled oscillators, Ph.D. thesis, Northwestern University, 2014.
53. *Maistrenko Y., Sudakov O., Osiv O., Maistrenko V.* Chimera states in three dimensions // *New Journal of Physics*. 2015. Vol 17, no. 7. 073037.
54. *Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P.* Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95, no. 3. 032224.
55. *Rybalova E., Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V.* Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 10. 101104.
56. *Winfree A.T.* Spiral waves of chemical activity // *Science*. 1972. Vol. 175, no. 4022. P. 634–636.

57. Fenton F.H., Cherry E.M., Glass L. Cardiac arrhythmia // *Scholarpedia*. 2008. Vol. 3, no. 7. P. 1665.
58. Zhang H., Hu B., Hu G. Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 2. 026134.
59. Yuan G., Wang G., Chen S. Control of spiral waves and spatiotemporal chaos by periodic perturbation near the boundary // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 72, no. 6. P. 908.
60. Yu L., Zhang G., Ma J., Chen Y. Control of spiral waves and spatiotemporal chaos with periodical subthreshold ordered wave perturbations // *International Journal of Modern Physics C*. 2009. Vol. 20, no. 1. P. 85–96.

References

1. Winfree A.T. Rotating chemical reaction. *Scientific American*, 1974, vol. 230, no. 6, pp. 82–95.
2. Vasiliev V.A., Romanovskii Yu.M., Chernavskii D.S., Yakhno V.G. *Autowave Processes in Kinetic Systems*. Springer, Netherlands, 1987.
3. Kopell N., Howard L.N. Plane wave solutions to reaction-diffusion equations. *Studies in Applied Mathematics*, 1973, vol. 52, no. 4, pp. 291–328.
4. Howard L.N., Kopell N. Slowly varying waves and shock structures in reaction-diffusion equation. *Studies in Applied Mathematics*, 1977, vol. 56, no. 2, pp. 95–145.
5. Hagan P.S. Spiral waves in reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 1982, vol. 42, no. 4, pp. 762–786.
6. Keener J.P., Tyson J.J. Spiral waves in the Belousov–Zhabotinskii reaction. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, vol. 21, no. 2, pp. 307–324.
7. Tyson J.J., Keener J.P. Spiral waves in a model of myocardium. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1987, vol. 29, no. 1, pp. 215–222.
8. Biktashev V.N. Diffusion of autowaves: Evolution equation for slowly varying autowaves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1989, vol. 40, no. 1, pp. 83–90.
9. Barkley D., Kness M., Tuckerman L.S. Spiral-wave dynamics in a simple model of excitable media: The transition from simple to compound rotation. *Phys. Rev. A*, 1990, vol. 42, no. 4, pp. 2489–2492.
10. Castelpoggi F., Wio H.S. Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 57, no. 5, pp. 5112–5121.
11. Ermakova E.A., Panteleev M.A., Shnol E.E. Blood coagulation and propagation of autowaves in flow. *Pathophysiology of Haemostasis and Thrombosis*, 2005, vol. 34, no. 2–3, pp. 135–142.
12. Krinsky V.I. *Autowaves: Results, Problems, Outlooks*. Springer Series in Synergetics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984.
13. Ivanitskiĭ G.R., Medvinskiĭ A.B., Tsyganov M.A. From disorder to order as applied to the movement of micro-organisms. *Soviet Physics Uspekhi*, 1991, vol. 34, no. 4, p. 289.
14. Zaikin A.N., Zhabotinsky A.M. Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system. *Nature*, 1970, vol. 225, no. 5232, pp. 535–537.
15. Zhabotinsky A., Zaikin A. Autowave processes in a distributed chemical system. *Journal of Theoretical Biology*, 1973, vol. 40, no. 1, pp. 45–61.
16. Vasil'ev V.A., Romanovskii Y.M., Yakhno V.G. Autowave processes in distributed kinetic systems. *Soviet Physics Uspekhi*, 1979, vol. 22, no. 8, p. 615.
17. Krinsky V., Biktashev V., Efimov I. Autowave principles for parallel image processing. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1991, vol. 49, no. 1, pp. 247–253.

18. Davidenko J.M., Pertsov A.V., Salomonsz R., Baxter W., Jalife J. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle. *Nature*, 1992, vol. 355, no. 6358, pp. 349–351.
19. Ivanitskii G.R., Medvinskii A.B., Tsyganov M.A. From the dynamics of population autowaves generated by living cells to neuroinformatics. *Physics-Uspeski*, 1994, vol. 37, no. 10, p. 961.
20. Winfree A.T. Electrical turbulence in three-dimensional heart muscle. *Science*, 1994, vol. 266, no. 5187, pp. 1003–1006.
21. Davydov V.A., Morozov V.G., Davydov N.V. Ring-shaped autowaves on curved surfaces. *Physics Letters A*, 2000, vol. 267, no. 5–6, pp. 326–330.
22. Fenton F.H., Cherry E.M., Hastings H.M., Evans S.J. Multiple mechanisms of spiral wave breakup in a model of cardiac electrical activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 852–892.
23. Hildebrand M., Cui J., Mihaliuk E., Wang J., Showalter K. Synchronization of spatiotemporal patterns in locally coupled excitable media. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 2, 026205.
24. Kuramoto Y., Shima S. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 2003, vol. 150, pp. 115–125.
25. Zhang H., Ruan X.S., Hu B., Ouyang Q. Spiral breakup due to mechanical deformation in excitable media. *Physical Review E*, 2004, vol. 70, no. 1, 016212.
26. Shima S., Kuramoto Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Physical Review E*, 2004, vol. 69, no. 3, 036213.
27. Kuramoto Y., Shima S.I., Battogtokh D., Shioyai Y. Mean-field theory revives in self-oscillatory fields with non-local coupling. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 2006, vol. 161, pp. 127–143.
28. Shang L., Yi Z., Ji L. Binary image thinning using autowaves generated by PCNN. *Neural Processing Letters*, 2007, vol. 25, no. 1, pp. 49–62.
29. Laing C.R. The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2009, vol. 238, no. 16, pp. 1569–1588.
30. Martens E.A., Laing C.R., Strogatz S.H. Solvable model of spiral wave chimeras. *Physical Review Letters*, 2010, vol. 104, no. 4, 044101.
31. Kuz'min Y.O. Deformation autowaves in fault zones. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 1–16.
32. Nkomo S., Tinsley M.R., Showalter K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Physical Review Letters*, 2013, vol. 110, no. 24, 244102.
33. Gu C., St-Yves G., Davidsen J. Spiral wave chimeras in complex oscillatory and chaotic systems. *Physical Review Letters*, 2013, vol. 111, no. 13, 134101.
34. Tang X., Yang T., Epstein I.R., Liu Y., Zhao Y., Gao Q. Novel type of chimera spiral waves arising from decoupling of a diffusible component. *The Journal of chemical physics*, 2014, vol. 141, no. 2, 024110.
35. Panaggio M.J., Abrams D.M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 3, R67.
36. Xie J., Knobloch E., Kao H.C. Twisted chimera states and multicore spiral chimera states on a two-dimensional torus. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, no. 4, 042921.
37. Li B.W., Dierckx H. Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, no. 2, 020202.
38. Weiss S., Deegan R.D. Weakly and strongly coupled Belousov–Zhabotinsky patterns. *Physical Review E*, 2017, vol. 95, no. 2, 022215.

39. Totz J.F., Rode J., Tinsley M.R., Showalter K., Engel H. Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics*, 2018, vol. 14, no. 3, p. 282.
40. Kundu S., Majhi S., Muruganandam P., Ghosh D. Diffusion induced spiral wave chimeras in ecological system. *The European Physical Journal Special Topics*, 2018, vol. 227, no. 7–9, pp. 983–993.
41. Guo S., Dai Q., Cheng H., Li H., Xie F., Yang J. Spiral wave chimera in two-dimensional nonlocally coupled Fitzhugh–Nagumo systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, vol. 114, pp. 394–399.
42. Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V. Spiral wave patterns in a two-dimensional lattice of nonlocally coupled maps modeling neural activity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, vol. 120, pp. 75–82.
43. Omel'chenko O.E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y.L., Sudakov O. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Physical Review E*, 2012, vol. 85, no. 3, 036210.
44. Tanaka D., Kuramoto Y. Complex Ginzburg–Landau equation with nonlocal coupling. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 2, 026219.
45. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2002, vol. 5, no. 4, p. 380–385.
46. Abrams D.M., Strogatz S.H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, no. 17, 174102.
47. Wolfrum M., Omel'chenko O.E., Yanchuk S., Maistrenko Y.L. Spectral properties of chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2011, vol. 21, no. 1, 013112.
48. Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, vol. 43, pp. 25–36.
49. Bukh A.V., Anishchenko V.S. Spiral, target, and chimera wave structures in a two-dimensional ensemble of nonlocally coupled van der Pol oscillators. *Technical Physics Letters*, 2019, vol. 45, no. 7, pp. 675–678.
50. Rulkov N.F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 2002, vol. 65, no. 4, 041922.
51. Panaggio M.J., Abrams D.M. Chimera states on a flat torus. *Physical Review Letters*, 2013, vol. 110, no. 9, 094102.
52. Panaggio M.J. Spot and spiral chimera states: Dynamical patterns in networks of coupled oscillators, Ph.D. thesis, Northwestern University, 2014.
53. Maistrenko Y., Sudakov O., Osiv O., Maistrenko V. Chimera states in three dimensions. *New Journal of Physics*, 2015, vol. 17, no. 7, 073037.
54. Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P. Chimera patterns in two-dimensional networks of coupled neurons. *Physical Review E*, 2017, vol. 95, no. 3, 032224.
55. Rybalova E., Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 10, 101104.
56. Winfree A.T. Spiral waves of chemical activity. *Science*, 1972, vol. 175, no. 4022, pp. 634–636.
57. Fenton F.H., Cherry E.M., Glass L. Cardiac arrhythmia. *Scholarpedia*, 2008, vol. 3, no. 7, p. 1665.

58. Zhang H., Hu B., Hu G. Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 2, 026134.
59. Yuan G., Wang G., Chen S. Control of spiral waves and spatiotemporal chaos by periodic perturbation near the boundary. *Europhysics Letters*, 2005, vol. 72, no. 6, p. 908.
60. Yu L., Zhang G., Ma J., Chen Y. Control of spiral waves and spatiotemporal chaos with periodical subthreshold ordered wave perturbations. *International Journal of Modern Physics C*, 2009, vol. 20, no. 1, pp. 85–96.



Бух Андрей Владимирович – родился в Палласовке, Волгоградской области (1993). Окончил с отличием бакалавриат на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика» (2015). Затем окончил с отличием магистратуру на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика» (2017). С 2015 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного технического университета в должности инженера. С 2017 года обучается в аспирантуре Саратовского государственного университета по направлению «Физика и астрономия», направленности «Радиофизика». Научные интересы – нелинейная динамика и теория колебаний, бифуркационный анализ, синхронизация, теория устойчивости, ансамбли связанных осцилляторов, химерные состояния. Опубликовал свыше 10 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Чернышевского Н.Г.
 E-mail: buh.andrey@yandex.ru



Рыбалова Елена Владиславовна – родилась в Энгельсе, Саратовской области (1996). Окончила с отличием бакалавриат на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика» (2018). Затем поступила в магистратуру на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика» (2018). С 2018 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного технического университета в должности инженера. Научные интересы – нелинейная динамика и теория колебаний, синхронизация, влияние флуктуаций, ансамбли связанных осцилляторов, химерные состояния. Опубликовала свыше 10 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Чернышевского Н.Г.
 E-mail: rybalovaev@gmail.com



Анищенко Вадим Семенович – родился в Саратове (1943). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1966). Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Шумовые свойства электронных потоков СВЧ-усилителей О-типа» под руководством Штырова А.И. (1970, СГУ). Защитил докторскую диссертацию на тему «Механизмы развития и свойства хаотических колебаний в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986, СГУ). С 1966 года работает инженером в НИИМФе СГУ. В 1970 году стал ассистентом на кафедре радиофизики СГУ, в 1972 году занял должность старшего преподавателя, в 1976 стал доцентом, в 1987 – профессором, а с 1998 года является заведующим кафедрой радиофизики СГУ. Научные интересы – теория нелинейных колебаний, статистическая радиофизика, нелинейная динамика сложных систем, динамический хаос и влияние флуктуаций, синхронизация и управление. Опубликовал свыше 430 научных статей и более 20 книг по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Чернышевского Н.Г.
 E-mail: wadim@info.sgu.ru