

УДК 517.933, 517.938

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-259-273>

## Мультистабильность и эффекты памяти в динамической системе с косимметричным потенциалом

В. Н. Говорухин<sup>1</sup>, В. Г. Цибулин<sup>1</sup>, М. Ю. Тяглов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет  
Россия, 344090 Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а

<sup>2</sup>Школа математических наук, Шанхайский университет транспорта  
КНР, 200240 Шанхай, ул. Дунчуань, 800

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru, tyaglov@sjtu.edu.cn

Автор для переписки Василий Николаевич Говорухин, vngovoruhin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 15.02.2020, принята к публикации 9.04.2020, опубликована 30.06.2020

**Цель** настоящего исследования – анализ сильной мультистабильности в динамической системе с косимметрией. Исследуется динамика и реализация стационарных состояний в механической системе с двумя степенями свободы. Минимум потенциальной энергии системы достигается на кривой в форме эллипса, что порождает континуальное семейство равновесий и сильную мультистабильность. Данная задача относится к классу динамических систем с косимметрией. **Методы.** Для анализа системы применялись методы вычислительного качественного анализа динамических систем и теории косимметрии. **Результаты.** Изучено поведение системы при изменении начальной потенциальной энергии, параметров эллипса и коэффициента трения. В консервативном косимметричном случае установлено существование в фазовом пространстве хаотических областей со сложной структурой. При наличии трения численно установлена сложная зависимость реализации равновесий семейства от начальных данных, что обусловлено эффектом памяти о консервативном хаосе. Представлены результаты анализа системы при нарушении косимметрии и продемонстрированы эффекты памяти о разрушенном семействе равновесий. **Заключение.** При сильной мультистабильности эффекты памяти о свойствах системы при их малом нарушении оказывают существенное влияние на динамику. Несмотря на полную определённую динамику при наличии трения (все траектории стремятся к равновесиям), наблюдается сильная зависимость реализации равновесий от начальных данных, что характерно для хаотической динамики. При малом нарушении косимметрии система демонстрирует также память об исчезнувшем континуальном семействе равновесий: из всех начальных данных траектории сначала стремятся к окрестности семейства, а затем медленно дрейфуют вдоль него к одному из сохранившихся равновесий.

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, дифференциальные уравнения, мультистабильность, косимметрия, хаос, селекция.

**Образец цитирования:** Говорухин В.Н., Цибулин В.Г., Тяглов М.Ю. Мультистабильность и эффекты памяти в динамической системе с косимметричным потенциалом // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 259–273. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-259-273>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

**Финансовая поддержка.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1928).

## Multistability and memory effects in dynamical system with cosymmetric potential

V. N. Govorukhin<sup>1</sup>, V. G. Tsybulin<sup>1</sup>, M. Yu. Tyaglov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University

8a, Milchakova str., Rostov on Don 344090, Russia

<sup>2</sup>School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University  
Shanghai 200240, China

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru, tyaglov@sjtu.edu.cn

Correspondence should be addressed to Vasily N. Govorukhin, vngovoruhin@sfedu.ru

Received 15.02.2020, accepted 9.04.2020, published 30.06.2020

**The purpose** of present study is the analysis of strong multistability in a dynamical system with cosymmetry. We study the dynamics and realization of steady-states in a mechanical system with two degrees of freedom. The minimum potential energy of the system is achieved on a curve in the form of an ellipse, which gives rise to a continuum family of equilibria and strong multistability. This problem belongs to the class of dynamical systems with cosymmetry. **Methods.** To analyze the system, we used methods of computational qualitative analysis of dynamical systems and cosymmetry theory. **Results.** The behavior of the system is studied for different values of the initial potential energy, semi-axes of the ellipse and the friction coefficient. In the conservative cosymmetric case, the existence of chaotic regions in the phase space is established. In the presence of friction, a complex dependence of the realization of equilibria on the family on the initial data was numerically found, which is due to the memory effect of conservative chaos. The results of the analysis of the system in case of violation of cosymmetry are presented and the memory effects of the destroyed family of equilibria are demonstrated. **Conclusion.** With strong multistability, the effects of memory about the properties of the system under a small violation of them have a significant effect on the dynamics. Despite the determinism in the presence of friction (all trajectories tend to equilibria), there is a strong dependence of the implementation of equilibria on the initial data, which is characteristic of chaos. With a small violation of cosymmetry, the system also demonstrates the memory of the disappeared continual family of equilibria: from all the initial data, the trajectories first tend to the neighborhood of the family, and then slowly drift along it to one of the remaining equilibria.

**Key words:** nonlinearity, nonlinear systems, differential equations, multistability, cosymmetry, chaos, selection.

**Reference:** Govorukhin V.N., Tsybulin V.G., Tyaglov M.Yu. Multistability and memory effects in dynamical system with cosymmetric potential. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 259–273.  
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-3-259-273>

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

**Acknowledgements.** Authors acknowledge the support of the Government of the Russian Federation (contract No. 075-15-2019-1928).

### Введение

В нелинейных задачах часто наблюдается мультистабильность – сосуществование нескольких устойчивых аттракторов [1–3]. Допускающие не единственность аттракторов системы характеризуются нетривиальными бифуркационными сценариями, сложной структурой фазового пространства. В некоторых случаях возникают семейства решений со скрытыми параметрами, когда существует бесконечное множество аттракторов [4–8]. Причинами возникновения семейства равновесий в динамических системах может быть группа симметрий [9] или косимметрия [10–12]. Понятие косимметрии введено В.И. Юдовичем [10] для объяснения нетривиальной динамики в задаче фильтрационной конвекции. Косимметрия обнаруживается также в задачах космологии [15], популяционной динамики [7, 16], радиофизики [8, 17, 18], нелинейной динамики [6, 19]. В [10] даны основные определения теории косимметрии.

В гильбертовом пространстве  $H$  для уравнения  $\dot{u} = \Phi(u)$  косимметрией является оператор  $L$ , который ортогонален  $\Phi$  в каждой точке  $u \in H$

$$(\Phi(u), L(u)) = 0,$$

Говорухин В.Н., Цибулин В.Г., Тяглов М.Ю.  
Известия вузов. ПНД, 2020, т. 28, № 3

где  $(\cdot, \cdot)$  есть скалярное произведение. Необходимым условием наличия семейства равновесий является существование, по крайней мере, одного равновесия  $u_*$ , на котором выполнено  $\Phi(u_*) = 0$  и  $L(u_*) \neq 0$  (см. [10, 11]). При отсутствии дополнительных вырождений точка  $u_*$  является членом семейства равновесий. Отличием семейства равновесий косимметричной динамической системы от орбиты действия группы симметрии является переменность спектра устойчивости равновесий вдоль семейства [11]. Наличие косимметрии приводит к ряду новых динамических эффектов: нетривиальная селекция [4], нестандартные бифуркационные переходы [20], специфическое возникновение автоколебаний [14, 21]. Результаты применения теории косимметрии для анализа разрушения семейств стационарных движений в задачах фильтрационной конвекции даны в работах [22, 23]. Мультистабильные сценарии конвективных движений в пористой среде при наличии косимметрии исследовались в работах [4, 11, 13], см. ссылки в [14]. Задачи селекции и реализации режимов из непрерывных семейств решений рассматривались в [4, 24, 25].

Целью данной работы является анализ нетривиальных мультистабильных эффектов на примере достаточно простой динамической системы. В зависимости от параметров эта система обладает различными свойствами: консервативностью, косимметрией, непрерывной и дискретными симметриями. Исследуется динамика системы, сценарии установления асимптотически устойчивых равновесий, эффекты памяти о свойствах системы. Разрушение семейства равновесий при нарушении косимметрии задачи анализируется при помощи аппарата селективной функции [12].

## 1. Динамическая система с косимметричным потенциалом

Рассматривается динамическая система с двумя степенями свободы и следующими выражениями для кинетической  $T$  и потенциальной  $V$  энергий:

$$T = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad u = \dot{x}, \quad v = \dot{y}, \quad (\dot{\phantom{x}}) = \frac{d}{dt}(\phantom{x}) \quad (1)$$

$$V = \frac{(1 - P)^2}{4} + \varepsilon f(x, y), \quad P = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (2)$$

Состояние системы описывается координатами  $x, y$  и скоростями  $u, v$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то минимум потенциальной энергии (2) достигается на эллипсе с полуосями  $a$  и  $b$ . Такую потенциальную энергию будем называть косимметричным потенциалом, поскольку соответствующая система дифференциальных уравнений обладает косимметрией. Кроме того, при  $a = b$  система инвариантна относительно группы вращений. Слагаемое  $\varepsilon f(x, y)$  описывает возмущение косимметричного потенциала. Порождаемая (1) и (2) система обыкновенных дифференциальных уравнений в случае линейного трения с коэффициентом  $\mu$  имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad (3)$$

$$\dot{y} = v, \quad (4)$$

$$\dot{u} = -\mu u - \frac{x}{a^2} (1 - P) + \varepsilon f_x, \quad (5)$$

$$\dot{v} = -\mu v - \frac{y}{b^2} (1 - P) + \varepsilon f_y. \quad (6)$$

Нижним индексом обозначено дифференцирование по координатам  $x$  и  $y$ . Рассматривается задача Коши, начальные условия ставятся для положений  $x, y$  и скоростей  $u, v$ .

Система (3)–(6) глобально устойчива при  $\mu > 0$ . Умножая уравнения (5), (6) на вектор скорости  $(u, v)$  и проведя необходимые преобразования, получаем

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -\mu(u^2 + v^2) = -2\mu T. \quad (7)$$

В случае  $\mu = 0$  выражение (7) означает существование интеграла энергии  $T + V$ . При  $\mu > 0$  из (7) следует, что все траектории стремятся к равновесиям, но механизмы реализации конкретных равновесий могут быть нетривиальными.

При  $a = b$ ,  $\varepsilon = 0$  и  $\mu = 0$  система (3)–(6) имеет интеграл момента вида

$$I = uy - vx. \quad (8)$$

Действительно, если  $a = b$  и  $\varepsilon = 0$ , то система (3)–(6) инвариантна относительно вращения вокруг начала координат, то есть относительно замены

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $\theta \in (-\pi, \pi]$  – полярный угол. По теореме Нётер это означает наличие интеграла момента. Дифференцированием по времени (8) и непосредственной подстановкой правых частей уравнений (3)–(6) устанавливается равенство  $\dot{I} = 0$ . То есть при  $a = b$  и  $\mu = 0$  система (3)–(6) является интегрируемой, так как существуют два независимых интеграла.

При  $\varepsilon = 0$  система (3)–(6) обладает линейной нетривиальной косимметрией

$$L = (\mu a^2 y, -\mu b^2 x, a^2 y, -b^2 x)^T \quad (10)$$

и имеет однопараметрическое семейство равновесий вида

$$\Omega = \{x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, u = v = 0, \theta \in (-\pi, \pi]\}. \quad (11)$$

Семейство равновесий (11) имеет форму эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  и превращается в окружность при  $a = b$ . При  $a = b$  семейство является результатом действия группы вращения (9), а при  $a \neq b$  его причиной является косимметрия (10).  $L$  не обращается в нуль на равновесиях семейства (11). Также имеется равновесие  $x = y = u = v = 0$ , на котором косимметрия аннулируется, то есть данное равновесие не принадлежит никакому семейству [11].

При  $\varepsilon = 0$  спектр устойчивости равновесий семейства  $\Omega$  дается явной формулой

$$\sigma = \left[ 0, -\mu, -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8 \left( \frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \right)} \right]. \quad (12)$$

Здесь  $\theta \in (-\pi, \pi]$  задает параметризацию на семействе, см. (11).

Очевидно, что при  $\mu > 0$  все равновесия устойчивы в трансверсальных к семейству направлениях, а при  $\mu = 0$  в спектре имеется двукратный нуль и пара чисто мнимых значений. Если точка попадает на семейство равновесий (11) с ненулевой касательной скоростью  $w_0$ , то ее динамика описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно угловой координаты  $\ddot{\theta} + \mu \dot{\theta} = 0$  с начальными условиями  $\theta(t_0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = w_0$ . Решением уравнения является  $\theta(t) = \theta_0 + (w_0/\mu)(1 - \exp(\mu(t - t_0)))$ , так что движение устанавливается к точке семейства, определяемой угловой координатой  $\theta_0 + w_0/\mu$ .

Устойчивость равновесий (11) при  $\mu > 0$  означает, что из различных начальных данных возможна реализация любого из бесконечного числа стационарных режимов. Это явление может быть интерпретировано как сильная мультистабильность.

## 2. Численное исследование

Целью исследования является анализ сильной мультистабильности в системе (3)–(6) при наличии трения ( $\mu > 0$ ) и  $\varepsilon = 0$ , что выражается в возможности реализации любого равновесия из семейства (11). Для этого проводился численный эксперимент, состоящий в многократном решении задачи Коши до реализации одного из равновесий.

Начальные положения выбирались при одинаковых значениях потенциальной энергии  $V = V_0$  и равной нулю кинетической энергии  $T$

$$x = a \rho_0 \cos \theta, \quad y = b \rho_0 \sin \theta, \quad u = v = 0, \quad \rho_0 = \sqrt{1 + \sqrt{4V_0}}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]. \quad (13)$$

При  $V_0 = 0$  и  $\varepsilon = 0$  начальные данные (13) соответствуют семейству равновесий (11). При  $V_0 > 0$  возникают движения, которые при  $\mu > 0$  приводят к одному из равновесий. Численным критерием реализации равновесия при вычислениях было выбрано выполнение условия

$$\max(\{\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{u}_i, \dot{v}_i\}) < \delta, \quad (14)$$

где  $\delta$  – относительная погрешность метода решения задачи Коши. Время  $t_r$ , необходимое для реализации условия (14), зависит от начальных данных и значений параметров; в представленных ниже расчетах  $t_r \in [300, 10000]$ .

Численный анализ динамических систем требует внимания к выбору интеграторов [19, 26] и точности расчета. Для решения задач Коши применялся метод Рунге–Кутты с порядком точности 7/8 и автоматическим выбором шага. Основные расчеты велись при  $\delta = 10^{-12}$ , а проверка результатов проводилась при  $\delta = 10^{-14}$ . Использование метода высокого порядка обеспечило сохранение интегралов и симметрий системы на больших временах.

В зависимости от значений  $\mu$ ,  $b$  и величины  $V_0$  процесс установления равновесий занимает разное время, а траектории имеют сложную форму. Геометрия траекторий при  $b \neq a$  и малых  $\mu$  во многом определяется структурой фазового пространства при  $\mu=0$ . Таким образом, анализ сильной мультистабильности необходимо начать с исследования консервативного случая при  $\mu = 0$ .

**2.1. Консервативная динамика.** При  $a = b$  динамика является интегрируемой и происходит на инвариантных гиперплоскостях  $\theta = \text{const}$  (рис. 1, а). За исключением равновесий движения являются периодическими. При косимметрии  $a \neq b$  динамика аналогична симметричному случаю только на инвариантных гиперплоскостях  $x = 0$  и  $y = 0$ . При иных начальных данных возникают квазипериодические или хаотические движения, которые состоят из комбинации перемещений, трансверсальных к семейству равновесий и вдоль него. При начальных данных вблизи гиперплоскости  $x = 0$  колебания вдоль семейства имеют малую амплитуду, см. проекции траекторий, изображенные на рис. 1, б. С ростом  $b$  динамика усложняется, хаотизируется для большинства начальных состояний, см. рис. 1, в, где даны траектории для  $b = 2.0$ .

Для исследования структуры фазового пространства в консервативном случае строилось отображение Пуанкаре, заданное гиперплоскостью  $u = 0$  для начальных точек вида (13) при  $\theta = i 2\pi/N$ ,  $i = 1, \dots, N$  и фиксированном значении  $V_0$ . В представленных ниже результатах использовалось  $N = 30$ , фиксировались все пересечения траекторий с секущей. На рис. 2 и 3 даны результаты вычислений сечений Пуанкаре в проекции на плоскость  $(x, y)$ . Семейство равновесий (11) обозначено толстой линией.

Влияние  $V_0$  в (13) при  $a = 1$ ,  $b = 1.4$  на динамику системы демонстрирует рис. 2. При малых  $V_0$  из всех рассмотренных начальных состояний реализуются квазипериодические движения (рис. 2, а). При увеличении  $V_0$  часть траекторий хаотизируется, уже при  $V_0 = 0.02$  образуется область хаотической динамики, которая расширяется при росте  $V_0$ . При  $V_0 = 0.2$  почти все траектории лежат в области хаоса (рис. 2, б). Дальнейший рост  $V_0$  приводит к возникновению

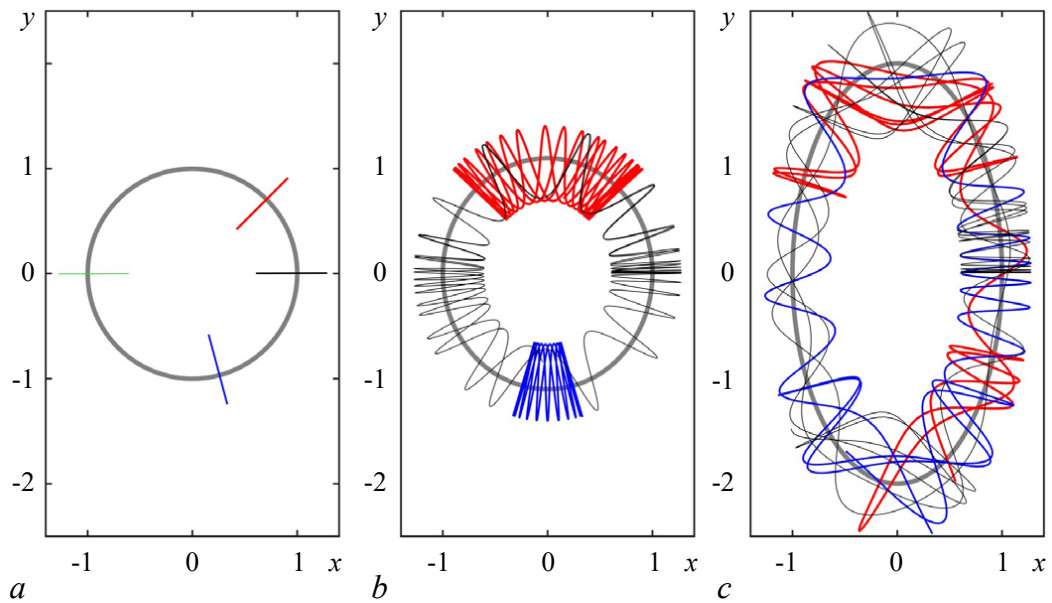


Рис. 1. Типичные траектории при консервативной динамике для трех значений параметра  $b$ : 1.0 (a), 1.1 (b), 2.0 (c); параметр  $a = 1$ . Эллипс соответствует семейству равновесий, а остальные кривые – траекториям, полученным из различных начальных положений с нулевой кинетической энергией и потенциальной энергией  $V_0 = 0.1$

Fig. 1. Typical trajectories for conservative dynamics at three values of the parameter  $b$ : 1.0 (a), 1.1 (b), 2.0 (c); parameter  $a = 1$ . The ellipse corresponds to the family of equilibria, and the remaining curves correspond to trajectories obtained from different initial positions with zero kinetic energy and potential energy  $V_0 = 0.1$

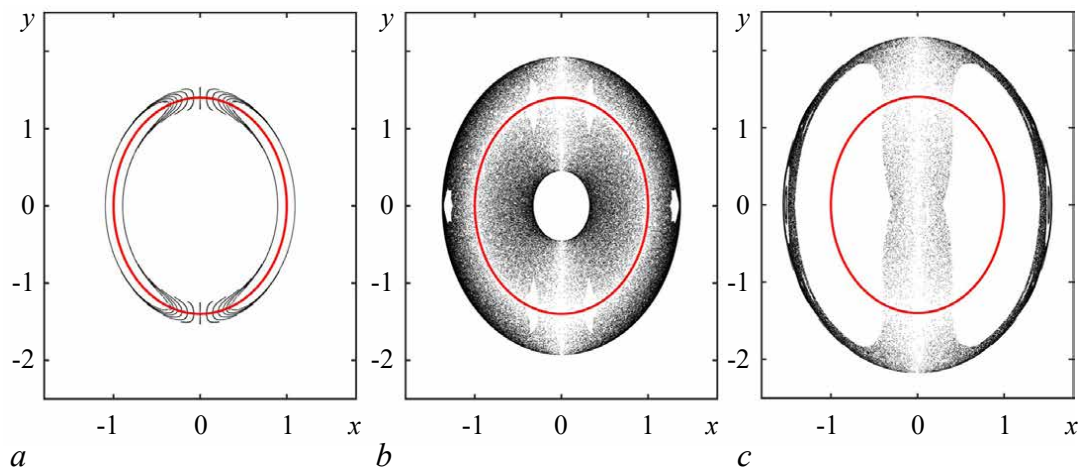


Рис. 2. Отображение Пуанкаре, заданное плоскостью  $u = 0$  для  $a = 1$ ,  $b = 1.4$  и трех значений  $V_0$ : 0.01 (a), 0.20 (b), 0.50 (c). Сплошной линией изображено семейство равновесий

Fig. 2. Poincaré map on the plane  $u = 0$  for  $a = 1$ ,  $b = 1.4$  and three values of  $V_0$ : 0.01 (a), 0.20 (b), 0.50 (c). The solid line corresponds to the family of equilibria



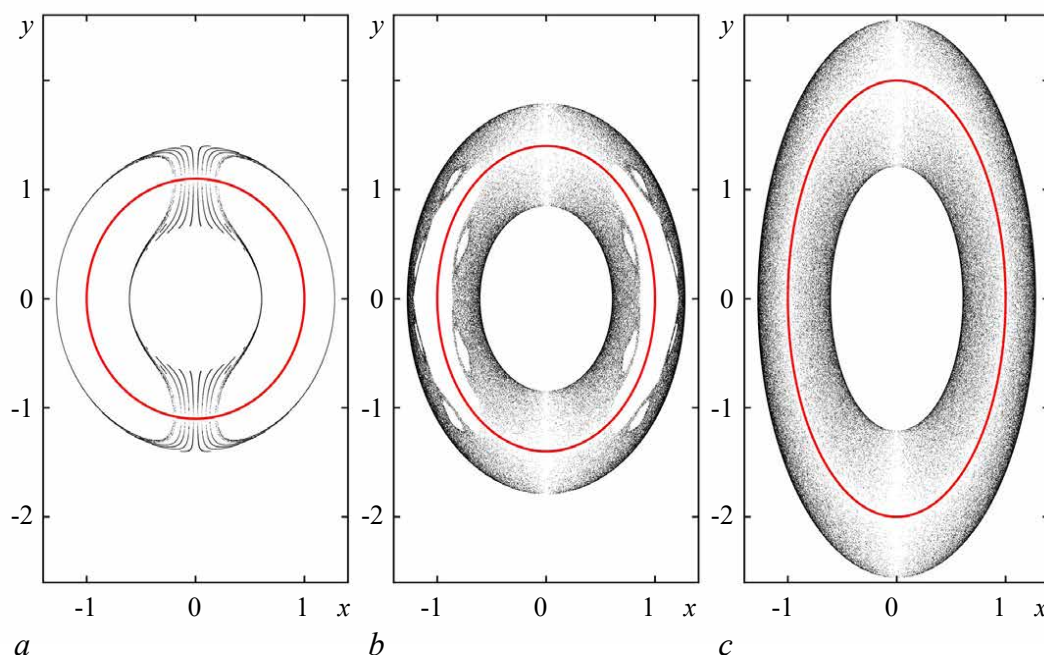


Рис. 3. Отображение Пуанкаре плоскостью  $u = 0$  для  $V_0 = 0.1$  и трех значений параметра  $b$ : 1.1 (a), 1.4 (b), 2.0 (c); параметр  $a = 1$ . Сплошной линией изображено семейство равновесий

Fig. 3. The Poincaré map defined by the plane  $u = 0$  for  $V_0 = 0.1$  and three values of the parameter  $b$ : 1.1 (a), 1.4 (b), 2.0 (c); parameter  $a = 1$ . The solid line corresponds to the family of equilibria

квазипериодических траекторий, трансформациям хаотических областей, которые существуют при всех значениях энергии (рис. 2, c).

На рис. 3 даны сечения Пуанкаре для трех значений параметра  $b$  и фиксированной потенциальной энергии  $V_0$ . Эти результаты демонстрируют тот факт, что при росте  $b > a$  процессы хаотизации усиливаются.

Таким образом, численный анализ продемонстрировал сложность фазового пространства в консервативном случае ( $\mu = 0$ ), наличие обширных хаотических областей в случае косимметрии. Память об этих свойствах является причиной нетривиальной селекции равновесий при наличии трения, что демонстрируют результаты следующего раздела.

**2.2. Селекция равновесий при диссипации энергии.** При  $\mu > 0$  в силу (7) траектории из всех начальных данных, за исключением принадлежащих устойчивому многообразию нулевого равновесия, стремятся к равновесиям семейства (11). Положение конечной точки на семействе характеризуется углом  $\theta_n$ , а соответствующей начальной точки вида (13) – величиной полярного радиуса  $\rho_0$  и углом  $\theta_0$ . Таким образом, можно ввести функцию зависимости угла реализующейся точки на семействе равновесий  $\theta_n$  от угла, соответствующего начальному положению  $\theta_0$ . Будем называть эту функцию результирующей и обозначать

$$\mathfrak{M} : \theta_0 \mapsto \theta_n.$$

Для численного построения графиков функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  были проведены вычислительные эксперименты для ряда значений  $\mu$  и отношения параметров  $b/a$ . В каждом эксперименте решались задачи Коши для  $N = 20000$  начальных значений вида (13) с параметризацией по углу  $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$  до выполнения условия (14).

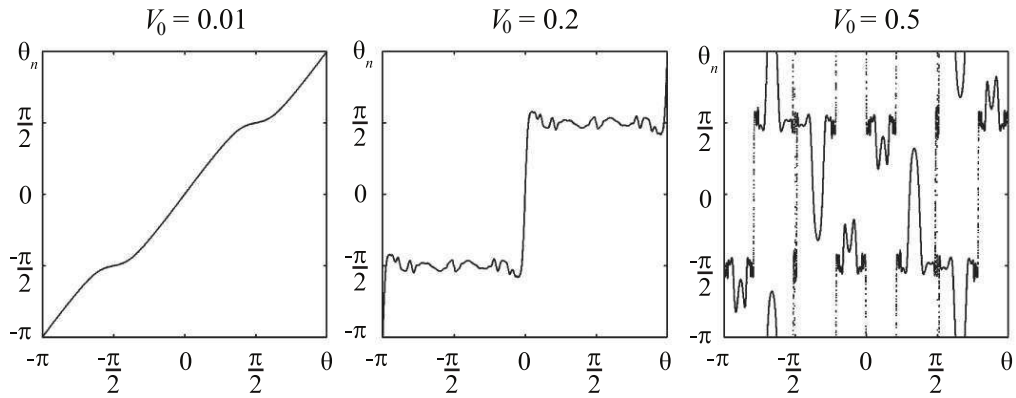


Рис. 4. Графики результирующей функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  для различных начальных значений потенциальной энергии  $V_0$ ;  $a = 1, b = 1.4, \mu = 0.1$

Fig. 4. Plots of the resulting function  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  for various initial values of the potential energy  $V_0$ ;  $a = 1, b = 1.4, \mu = 0.1$

В случае симметрии  $a = b$  и  $\mu > 0$  затухающие колебания происходят на плоскостях, ортогональных плоскости  $V_0 = 0$  и проходящих через начало координат. При малых начальных уровнях энергии величина угла  $\theta = \arctan(x/y)$ . Для значений энергии  $V_0 > V_* = 1/4$  возможна реализация либо равновесия, отвечающего углу  $\theta$ , либо равновесия по другую сторону от начала координат ( $\theta + \pi$ ). В случае симметрии  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  является линейной при малых  $V_0$  и становится кусочно-линейной при  $V_0 > V_*$ .

При  $a \neq b$  инвариантность относительно вращения отсутствует, что радикально меняет динамику системы даже при  $|b - a| \ll 1$ .

Результаты вычислительных экспериментов для  $a=1.0, b=1.4$  даны на рис. 4, 5. При малых значениях  $V_0$  результирующая функция  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  близка к линейной, см. рис. 4,  $V_0=0.01$ . С увеличением  $V_0$  происходит деформация кривой. При  $V_0 = 0.2$  формируются «полочки», отвечающие равновесиям  $x = 0, y = \pm b$  ( $\theta = \pm\pi/2$ ). Это означает, что из большинства начальных данных вида (13) при  $V_0 = 0.2$  реализуются окрестности этих двух равновесий. Рост  $V_0$  приводит к усложнению процесса установления и возникновению ситуации, когда из точек с углом  $\theta_0 \in [0, \pi]$  будут реализоваться равновесия с  $\theta_n \in [-\pi, 0]$ , и наоборот, см. рис. 4,  $V_0 = 0.5$ . Увеличение приводит к «размыванию» графика функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$ , что иллюстрирует рис. 4.

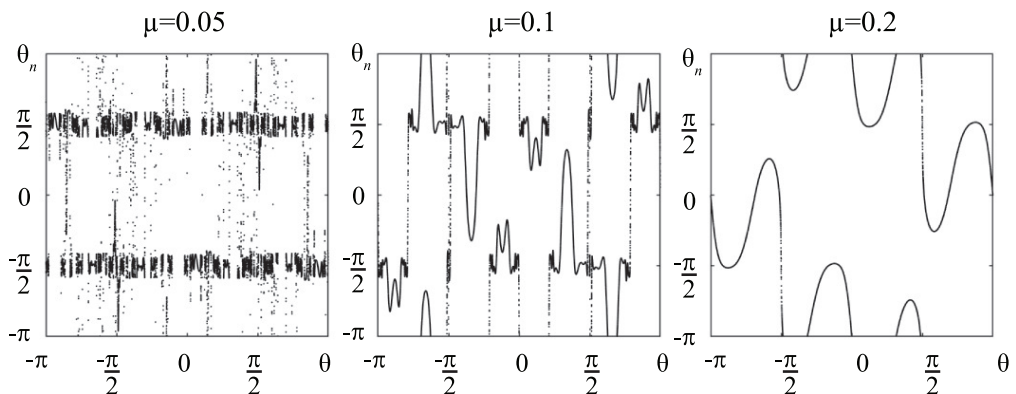


Рис. 5. Графики результирующей функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  для различных значений параметра  $\mu$ ;  $a = 1, b = 1.4, V_0 = 0.5$

Fig. 5. Plots of the resulting function  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  for various values of the parameter  $\mu$ ;  $a = 1, b = 1.4, V_0 = 0.5$



Сложность графиков результирующей функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  при больших  $V_0$  и достаточно малых  $\mu$  связана с эффектом памяти о хаотической консервативной динамике, описанной в предыдущем разделе. Процесс установления равновесий при перечисленных условиях достаточно длителен и траектории долгое время находятся в областях, соответствующих хаотической динамике в консервативном случае. Это приводит к сильной зависимости реализации точек семейства равновесий от начального положения, определяемого углом  $\theta_0$ .

При уменьшении коэффициента трения данные эффекты усиливаются, так как растет время установления. Это иллюстрируют расчеты для  $b = 1.4$ ,  $V_0 = 0.5$  при изменении  $\mu$ , приведенные на рис. 5. Видно усложнение графиков  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  для этого набора параметров по сравнению с рис. 4, в частности, рост числа локальных экстремумов.

Отметим, что помимо представленных результатов по селекции равновесий в случае начальных данных вида (13) проводились расчеты и при других начальных данных, в частности, при ненулевых начальных скоростях  $u, v$ . Результаты были качественно аналогичны: при малых начальных значениях энергии (старт около семейства равновесий) вид функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$  близок к линейной, а с ростом энергии  $V$  происходило усложнение функции  $\mathfrak{M}(\theta_0)$ .

### 3. Анализ разрушения косимметрии

Возмущение потенциальной энергии при  $\varepsilon \neq 0$  может привести к нарушению косимметрии и разрушению семейства. В результате из непрерывного семейства может остаться конечное число равновесий или их не будет вовсе. Динамика системы при  $0 < \varepsilon \ll 1$  обладает эффектом памяти об исчезнувшем семействе. Для исследования разрушения косимметрии используется аппарат, развитый в [12] и основанный на определении селективной функции и ее анализе.

Следуя работе [12], приведем определения косимметрического дефекта и селективной функции. Для дифференциального уравнения  $\dot{U} = F(U) + Q(U, v)$  в гильбертовом пространстве  $H$  косимметрический дефект определяется как  $D(U, v) = \langle Q(U, v), L(U) \rangle$ , где  $L$  есть косимметрия векторного поля  $F$  и возмущение дается оператором  $Q(U, v)$ , нарушающим косимметрию при  $v \neq 0$  и обращающимся в нуль при  $v = 0$ :  $Q(U, 0) = 0$ .

Для невозмущенного уравнения  $\dot{U} = F(U)$ , стационарные состояния формируют одномерное многообразие, то есть решения  $U_\theta$  с  $F(U_\theta) = 0$  зависят от вещественного параметра  $\theta$ . После подстановки  $U_\theta$  в косимметрический дефект получается селективная функция

$$S(\theta, v) = D(U_\theta, v). \quad (15)$$

Для анализа возмущенной системы рассматривается селективное уравнение  $S(\theta, v) = 0$ , которое автоматически удовлетворяется при  $v = 0$ . В [12] доказано, что невырожденное решение селективного уравнения означает существование ветви решений с параметром  $v$ .

Косимметрический дефект для системы (3)–(6) и косимметрии (10) содержит слагаемые, определяемые возмущением  $f(x, y)$ .

$$D(x, y, \varepsilon) = \varepsilon (a^2 y f_x - b^2 x f_y). \quad (16)$$

Селективная функция получается в результате подстановки семейства решений (11) в (16):

$$S(\theta) = \varepsilon a b [a \sin \theta f_x(a \cos \theta, b \sin \theta) - b \cos \theta f_y(a \cos \theta, b \sin \theta)]. \quad (17)$$

Например, для возмущения  $f(x, y) = 1 - \alpha x^2$  селективная функция (17) примет вид

$$S(\theta) = \varepsilon \alpha a^3 b \cos(2\theta). \quad (18)$$

Нулям функции (18) на интервале  $\theta \in (-\pi, \pi]$  отвечают точки семейства равновесий

$$x = \pm a, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (19)$$

$$x = 0, \quad y = \pm b, \quad u = 0, \quad v = 0. \quad (20)$$

Подстановка первого выражения в систему (3)–(6) показывает, что равновесие (19) сохраняется и при  $\varepsilon \neq 0$ , а ненулевая координата равновесия, соответствующего (20), зависит от параметров возмущения  $\varepsilon$  и  $\alpha$ :  $x = \pm a(1 + 2\varepsilon\alpha^2)$ . Анализ устойчивости равновесий (19) и (20) показывает, что при отрицательных  $\alpha$  устойчивы равновесия (19), а при положительных – устойчивы равновесия  $x = \pm a(1 + 2\varepsilon\alpha^2)$ ,  $x = 0$ .

При малом возмущении, нарушающем косимметрию, динамику во многом определяет эффект памяти о существовании семейства равновесий для невозмущенной системы. В этом случае движение материальной точки можно условно разделить на два этапа. Первый состоит в быстром стремлении точки в окрестность орбиты разрушенного семейства равновесий, а второй – в медленном перемещении около бывшего семейства к одному из устойчивых равновесий.

На рис. 6 и рис. 7 представлены результаты расчета динамики системы (3)–(6) при  $a = 1$ ,  $b = 1.4$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.1$  и разных  $\alpha$  из начальной точки  $x = 0.4$ ,  $y = 0.49$ ,  $u = v = 0$ . Расчеты проводились на интервале  $t$ , гарантирующем установление равновесий согласно условию (14). На рис. 6 даны проекции траекторий на плоскость  $x, y$ , а на рис. 7 – графики зависимости от времени переменной  $x$  (в логарифмическом масштабе по  $t$ ). Эллипс из равновесий при  $\varepsilon = 0$  на рис. 6 дан пунктиром, положение начальной точки отмечено звездочкой, а конечной – ромбом. Средний рисунок отвечает существованию семейства равновесий при  $\varepsilon = 0$ , рисунки слева и справа соответствуют значениям  $\alpha$  разных знаков.

Расчеты демонстрируют два этапа стремления траекторий к равновесиям при малом нарушении косимметрии. Видно, что на начальном этапе динамика во всех трех случаях близка, и траектории попадают в окрестности равновесий семейства. При  $\alpha = 0$  реализуется равновесие с  $x \neq y \neq 0$ , при нарушении косимметрии ( $\alpha \neq 0$ ) траектории также стремятся в окрестность этой точки, которая уже не является равновесием, и начинается второй этап динамики.

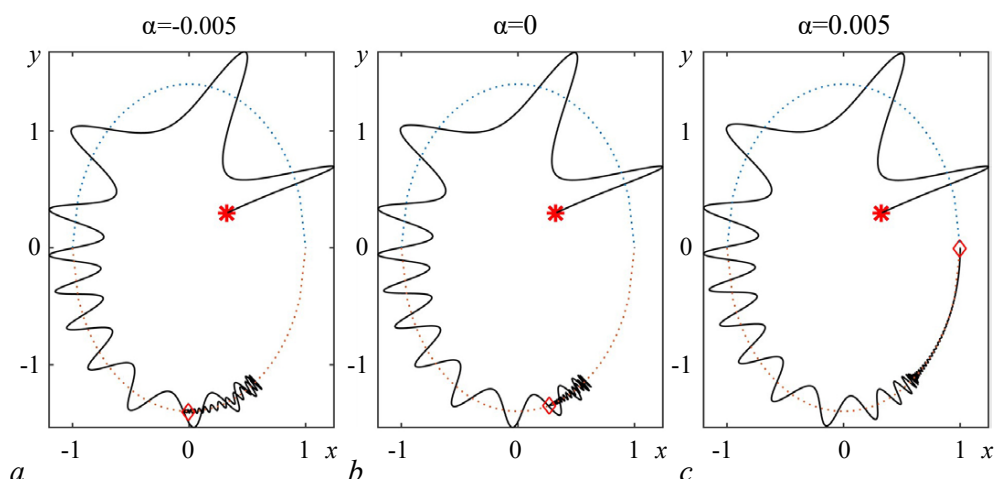


Рис. 6. Траектории с одинаковым начальным положением (звездочка) и трех значениях  $\alpha$ :  $-0.005$  (a),  $0.0$  – случай косимметрии (b),  $0.005$  (c);  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 1.4$

Fig. 6. Trajectories with the same initial position (star) for three values of  $\alpha$ :  $-0.005$  (a),  $0.0$  – case of cosymmetry (b),  $0.005$  (c);  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 1.4$

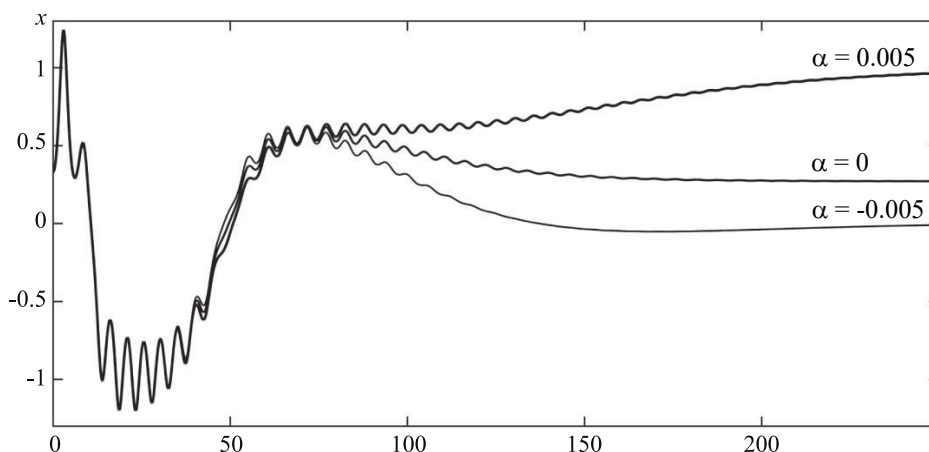


Рис. 7. Графики зависимости переменной  $x$  от времени  $t$  для трех значений  $\alpha$ ;  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 1.4$

Fig. 7. Plots of the variable  $x$  on time  $t$  for the three values of  $\alpha$ ;  $\varepsilon = 0.1$ ,  $b = 1.4$

В зависимости от знака  $\alpha \neq 0$  происходит выход к одному из асимптотически устойчивых равновесий (19) или (20). Это отражено на рис. 7, где приведены графики  $x(t)$  для косимметричного случая ( $\alpha = 0$ ) и для возмущений различных знаков. На рисунках чётко прослеживается быстрый начальный этап динамики, приводящий в окрестность семейства равновесий, и медленное стремление к асимптотически устойчивым равновесиям вдоль орбиты исчезнувшего семейства.

### Заключение

В статье исследуется динамика системы с двумя степенями свободы и косимметричным потенциалом при отсутствии и наличии трения. Характерным свойством возникающих при этом систем дифференциальных уравнений является наличие континуальных семейств стационарных режимов. Проведен анализ модельной задачи, которая позволила сформулировать характерные эффекты для этого типа задач. Выявлена принципиальная разница динамики при симметричном и косимметричном потенциалах.

1. При симметрии семейство является окружностью и в консервативном случае система интегрируема в силу существования интеграла момента. В косимметричном консервативном случае система является неинтегрируемой, семейство становится эллипсом. В фазовом пространстве возникают области хаотической динамики.
2. Наличие диссипативных механизмов приводит к тому, что все движения стремятся к стационарным состояниям и реализуется сильная мультистабильность. В симметричном случае фазовое пространство расслаивается на гиперповерхности с идентичными фазовыми портретами на них. Спектр устойчивости у всех равновесий идентичен и их бассейны имеют одинаковую мощность. При этом результирующая функция  $\mathcal{M}(\theta_0)$  является линейной или кусочно-линейной. В косимметричном случае спектральные характеристики равновесий и их бассейны притяжения индивидуализируются. Функция  $\mathcal{M}(\theta_0)$  становится нелинейной, на ее графике возникают пологие участки, отвечающие наиболее реализуемым равновесиям.
3. В косимметричном диссипативном случае система демонстрирует динамику, характерную для хаотических систем. Это выражается в сильной чувствительности реализации равновесий семейства от начальных данных. Это свойство объясняется эффектом памяти о консервативном хаосе и проявляется при малом трении и начальных данных с достаточно большой потенциальной энергией.

4. При малых возмущениях, нарушающих симметрию и косимметрию, семейство равновесий разрушается и остаётся конечное их число, причём часть из равновесий устойчивы, а часть – неустойчивы. Система при этом сохраняет память об исчезнувшем семействе. Это выражается в разделении диссипативной динамики на два этапа: быстрые движения, приводящие в окрестность исчезнувшего семейства, и медленный дрейф вдоль него к одному из сохранившихся стационарных состояний. Такое поведение объектов в физических экспериментах может свидетельствовать о том, что соответствующая математическая модель должна принадлежать к классу косимметричных или симметричных задач.

## Библиографический список

1. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. P. 1607–1626.
2. *Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V.* Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014. Vol. 410. P. 561–557.
3. *Шабунин А.В.* Мультистабильность бегущих волн в ансамбле гармонических генераторов с дальнедействующими связями // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 1. С. 48–63.
4. *Govorukhin V.N., Yudovich V.I.* Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection // *Chaos*. 1999. Vol. 9. P. 403–412.
5. *Gotthans T., Petrzela J.* New class of chaotic systems with circular equilibrium // *Nonlinear Dyn.* 2015. Vol. 81. P. 1143–1149.
6. *Li C., Sprott J.C., Hu W., Xu Y.* Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system // *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 2017. Vol. 27, no. 10. 1750160.
7. *Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2019. Vol. 24. P. 547–561.
8. *Riaza R.* Transcritical bifurcation without parameters in memristive circuit // *SIAM J. Appl. Math.* 2018. Vol. 78, no. 1. P. 395–417.
9. *Golubitsky M., Swift J., Knobloch E.* Symmetries and pattern selection in Rayleigh–Benard convection // *Physica D*. 1984. Vol. 10. P. 249–276.
10. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // *Матем. заметки*. 1991. Т. 49, вып. 5. С. 142–148.
11. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 402–411.
12. *Юдович В.И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // *Докл. РАН*. 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.
13. *Bratsun D.A., Lyubimov D.V., Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // *Physica D*. 1995. Vol. 82. P. 398–417.
14. *Govorukhin V.N., Shevchenko I.V.* Multiple equilibria, bifurcations and selection scenarios in cosymmetric problem of thermal convection in porous medium // *Physica D*. 2017. Vol. 361. P. 2–58.
15. *Liebscher S., Harterich J., Webster K., Georgi M.* Ancient dynamics in Bianchi models: Approach to periodic cycles // *Commun. Math. Phys.* 2011. Vol. 305. P. 59–83.
16. *Frischmuth K., Kovaleva E.S., Tsybulin V.G.* Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse // *Nonlinear Analysis: Real World Applic.* 2011. Vol. 12. P. 146–155.

17. Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 89. P. 2829–2843.
18. *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*. Eds V.H. Pham, S. Vaidyanathan, C. Volos, T. Kapitaniak. Springer, New York, 2018.
19. Govorukhin V.N., Tsybulin V.G., Karasozen B. Dynamics of numerical methods for cosymmetric ordinary differential equations // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2001. Vol. 11. P. 2339–2357.
20. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // *Chaos*. 2000 Vol. 10. P. 311–330.
21. Юдович В.И. О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивание // *Прикладная математика и механика*. 1998. Т. 62, вып. 1. С. 22–34.
22. Karasozen B., Tsybulin V.G. Destruction of the family of steady states in the planar problem of Darcy convection // *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372. P. 5639–5643.
23. Говорухин В.Н. О воздействии внутренних источников тепла на конвективные движения в пористой среде, подогреваемой снизу // *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55, № 2 (324). С. 43–52.
24. Tsybulin V.G., Karasozen B., Ergenc T. Selection of steady states in planar Darcy convection // *Physics Letters A*. 2006. Vol. 356. P. 189–194.
25. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Селекция стационарных режимов однопараметрического семейства в задаче плоской фильтрационной конвекции // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2013. № 4. С. 117–127.
26. Hairer E., Lubich C., Wanner G. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, 2006.

## References

1. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1607–1626.
2. Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2014, vol. 410, pp. 561–557.
3. Shabunin A.V. Multistability of traveling waves in an ensemble of harmonic oscillators with long-range couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 1 pp. 48–63 (in Russian).
4. Govorukhin V., Yudovich V. Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection. *Chaos*, 1999, vol. 9, pp. 403–412.
5. Gotthans T., Petrzela J. New class of chaotic systems with circular equilibrium. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 81, pp. 1143–1149.
6. Li C., Sprott J.C., Hu W., Xu Y. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system. *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*, 2017, vol. 27(10), 1750160.
7. Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 2019, vol. 24, pp. 547–561.
8. Rianza R. Transcritical bifurcation without parameters in memristive circuit. *SIAM J. Appl. Math.*, 2018, vol. 78, no. 1, pp. 395–417.
9. Golubitsky M., Swift J., Knobloch E. Symmetries and pattern selection in Rayleigh–Benard convection. *Physica D*, 1984, vol. 10, pp. 249–276.
10. Yudovich V.I. Cosymmetry, degeneracy of the solutions of operator equations and the onset of filtrational convection. *Math. Notes*, 1991, vol. 49, pp. 540–545.

11. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*, 1995, vol. 5, no. 2, pp. 402–411.
12. Yudovich V.I. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry. *Physics-Doklady*, 2004, vol. 49, pp. 522–526.
13. Bratsun D.A., Lyubimov D.V., Roux B. Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium. *Physica D*, 1995, vol. 82, pp. 398–417.
14. Govorukhin V.N., Shevchenko I.V. Multiple equilibria, bifurcations and selection scenarios in cosymmetric problem of thermal convection in porous medium. *Physica D*, 2017, vol. 361, pp. 2–58.
15. Liebscher S., Harterich J., Webster K., Georgi M. Ancient dynamics in bianchi models: Approach to periodic cycles. *Commun. Math. Phys.*, 2011, vol. 305, pp. 59–83.
16. Frischmuth K., Kovaleva E.S., Tsybulin V.G. Family of equilibria in a population kinetics model and its collapse. *Nonlinear Analysis: Real World Applic.*, 2011, vol. 12, pp. 146–155.
17. Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, pp. 2829–2843.
18. Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors. Eds V.H. Pham, S. Vaidyanathan, C. Volos, T. Kapitaniak. Springer, New York, 2018.
19. Govorukhin V.N., Tsybulin V.G., Karasozen B. Dynamics of numerical methods for cosym-metric ordinary differential equations. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2001, vol. 11, pp. 2339–2357.
20. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system. *Chaos*, 2000, vol. 10, pp. 311–330.
21. Yudovich V.I. Cycle-creating bifurcation from a family of equilibria of a dynamical system and its delay. *J. Appl. Math. and Mech.*, 1998, vol. 62, no. 1, pp. 19–29.
22. Karasozen B., Tsybulin V.G. Destruction of the family of steady states in the planar problem of Darcy convection. *Physics Letters A*, 2008, vol. 372, pp. 5639–5643.
23. Govorukhin V.N. On the action of internal heat sources on convective motion in a porous medium heated from below. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, pp. 225–233.
24. Tsybulin V.G., Karasozen B., Ergenc T. Selection of steady states in planar Darcy convection. *Physics Letters A*, 2006, vol. 356, pp. 189–194.
25. Govorukhin V.N., Shevchenko I.V. Selection of steady regimes of a one-parameter family in the problem of plane convective flow through a porous medium. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, pp. 523–532.
26. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Springer, 2006.



Говорухин Василий Николаевич – родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил кандидатскую (1999) диссертацию в области исследования динамики жидкости. Опубликовал более 60 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает доцентом кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ  
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Говорухин В.Н., Цибулин В.Г., Тяглов М.Ю.  
Известия вузов. ПНД, 2020, т. 28, № 3





*Цибулин Вячеслав Георгиевич* – родился в Ростове-на-Дону (1956), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1978). Защитил кандидатскую (1990) и докторскую (2011) диссертации. Работает в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета. Заведует кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамики и др. В соавторстве с В.Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX»

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ  
E-mail: [vgcibulin@sfedu.ru](mailto:vgcibulin@sfedu.ru)



*Тяглов Михаил Юрьевич* – родился в 1977 году, окончил с отличием механико-математический факультет Ростовского государственного университета (2001). Защитил диссертацию на соискание учёной степени Doctor rearm naturalium по специальности «Классический анализ» в Берлинском техническом университете. С 2012 года работает в Школе математических наук Шанхайского транспортного университета на должности доцента. Научные интересы – классический и комплексный анализ, ортогональные многочлены, спектральная теория, теория устойчивости и моделирование СВЧ. Опубликовал свыше 20 работ по указанным направлениям.

КНР, 200240 Шанхай, ул. Дунчуань, 800  
Шанхайский Транспортный Университет  
E-mail: [tyaglov@sjtu.edu.cn](mailto:tyaglov@sjtu.edu.cn)