



УДК 621.385.6

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-414-424>

## О нелинейной теории двухрезонаторного клистрона с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью

*А. А. Фунтов*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: aafuntov@mail.ru

*Поступила в редакцию 16.10.2019,  
принята к публикации 15.05.2020, опубликована 31.08.2020*

**Цель** настоящего исследования – построить приближенную нелинейную теорию клистрона-усилителя, в котором между входным и выходным резонатором вместо пространства дрейфа располагается среда с комплексной проводимостью или с метаматериалами с отрицательной диэлектрической проницаемостью. В рамках построенной теории рассчитать выходные характеристики (коэффициент усиления, выходную мощность и КПД) описываемого прибора и сравнить результаты с классическим двухрезонаторным клистроном. **Методы.** Поскольку в основе принципа работы резистивного усилителя и усилителя с комплексной проводимостью лежит именно волновой процесс, для построения нелинейной теории используется волновой метод Овcharова–Солнцева, основная идея которого в том, чтобы рассматривать переменную часть угла пролета электронов (периодическую функцию времени влета) с помощью ряда Фурье с небольшим количеством членов. Исследуется следующая модель: ионнокомпенсированный цилиндрический электронный поток пронизывает входной резонатор, модулируется по скорости и влетает в среду с комплексной диэлектрической проницаемостью и/или с произвольной комплексной проводимостью. Электронный поток описывается в рамках одномерной модели. Пронизывая сетки выходного резонатора, электронный поток наводит в нём высокочастотное поле. **Результаты и заключение.** Показано, что, если вместо пространства дрейфа между входным и выходным резонаторами располагается среда с комплексной диэлектрической проницаемостью, то расстояние между резонаторами можно уменьшить более чем вдвое с увеличением выходных характеристик.

*Ключевые слова:* резистивный усилитель, метаматериал, клистрон, нелинейная теория, метод Овcharова–Солнцева, волновой метод.

*Образец цитирования:* Фунтов А.А. О нелинейной теории двухрезонаторного клистрона с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 414–424. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-414-424>

*Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

*Финансовая поддержка.* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-02-00666.

## About nonlinear theory of two-cavity klystron with a drift space in the form of medium with complex permittivity

A. A. Funtov

Saratov State University  
83, Astrakhanskaya str., Saratov 410012, Russia  
E-mail: aafuntov@mail.ru

Received 16.10.2019, accepted 15.05.2020, published 31.08.2020

The **purpose** of this work is to construct an approximate nonlinear theory of a klystron amplifier in which a medium with complex conductivity or with metamaterials with negative permittivity is located between the input and output cavities instead of the drift space. Within the framework of the constructed theory, calculate the output characteristics (gain, output power and efficiency) of the described device and compare the results with the classic two-cavity klystron. **Methods.** Since the principle of operation of a resistive wall amplifier and an amplifier with complex conductivity is precisely the wave process, to construct a nonlinear theory, the Ovcharov–Solntsev wave method is used, the main idea of which is to consider the variable part of the electron passage angle (periodic function of the time of flight) using a series Fourier with few members. The following model is investigated: an ion-compensated cylindrical electron stream penetrates the input resonator, modulates in speed, and flies into a medium with complex permittivity and/or with arbitrary complex conductivity. The electron beam is described in terms of a one-dimensional model. Penetrating the grids of the output cavity, the electron beam induces a high-frequency field in it. **Results and conclusion.** It is shown that if instead of the drift space between the input and output resonators there is a medium with complex dielectric constant, then the distance between the resonators can be reduced by more than half with an increase in the output characteristics.

*Key words:* resistive wall amplifier, metamaterial, klystron, nonlinear theory, Ovcharov–Solntsev method, wave method.

*Reference:* Funtov A.A. About nonlinear theory of two-cavity klystron with a drift space in the form of medium with complex permittivity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 414–424.  
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-414-424>

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

*Acknowledgements.* This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-02-00666.

В настоящее время в СВЧ-электронике наблюдается определенный интерес к метаматериалам, о чем свидетельствует большое количество докладов на соответствующих конференциях. Как известно, метаматериалы можно описывать, используя математический аппарат, развитый для диэлектриков как для сред с комплексной диэлектрической проницаемостью. Однако прибор, в котором легко подобный подход воплотить – резистивный усилитель, долгое время был незаслуженно забыт. На фоне определенного интереса к этому прибору в настоящее время представляется важным создать нелинейную теорию резистивного усилителя с объемными резонаторами как модулирующим и съемным устройствами. Цель настоящей работы – построить приближенную нелинейную теорию клистрона-усилителя, в котором между входным и выходным резонаторами вместо пространства дрейфа располагается среда с комплексной проводимостью или метаматериалами с отрицательной диэлектрической проницаемостью, применение которых, возможно, увеличит коэффициент усиления.

Поскольку в основе принципа работы резистивного усилителя и усилителя с комплексной проводимостью лежит волновой процесс, логично использовать для построения нелинейной теории метод Овчарова–Солнцева, достоинство которого заключается в упрощении необходимых расчетов. Для этого описывающие поведение электронов усредненные переменные разлагают на конечное число сильно нелинейных волн, а именно переменную часть угла пролета электронов (периодическую функцию времени влета) представляют в виде ряда Фурье с небольшим количеством членов. Напомним, что этот метод применим к целому ряду приборов, таких как

клистроны и ЛБВ. Применительно к клистронам при рассмотрении ограничиваются только первой гармоникой.

Необходимо оговориться, что в данной работе используется модификация метода Овчарова-Солнцева, поскольку здесь фигурирует резистивная неустойчивость. Кроме того, в работе [1] в лекции «Волновой метод» в разделе «Приближенная нелинейная теория волн пространственного заряда» В.А. Солнцев пишет: «Приближенную нелинейную теорию, основанную на учёте лишь одной гармоники в разложении Фурье для фазы, можно построить и для других приборов типа О – ламп с бегущей волной и ламп с обратной волной. При некоторых дополнительных ограничениях здесь также удастся получить аналитические результаты. Несомненно, что волновой метод будет полезным и в теории других типов электронно-лучевых приборов СВЧ как для численного интегрирования уравнений, так и для приближенного анализа нелинейных явлений в этих приборах».

Будем в дальнейшем исследовать следующую модель: ионнокомпенсированный одномерный цилиндрический электронный поток пронизывает входной резонатор, модулируется по скорости и влетает в среду с комплексной диэлектрической проницаемостью и/или с произвольной комплексной проводимостью. Считаем, что на все электроны данного поперечного сечения пучка действует одинаковое усредненное по сечению электрическое поле, и что движение электронов однонаправленное. Кроме того, предполагается, что модуляция электронов по скорости мала, однако никаких ограничений на глубину модуляции потока электронов по току и плотности не накладываемся.

Следуя методике работы [2], в качестве исходных используем следующие уравнения в переменных Лагранжа с учетом метода фундаментальной частоты:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j \epsilon_0 p_n^2 \beta_p^2}{n \epsilon \left( 1 - \frac{j \sigma}{n \omega \epsilon} + \frac{j L}{n \omega \epsilon} \right)} I_n e^{jn(\omega t_0 + \theta)}, \quad (1)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn(\omega t_0 + \theta)} d(\omega t_0), \quad (2)$$

где  $\theta(x, t_0)$  – возмущение угла пролета электронов под действием поля;  $\omega$  – рабочая частота;  $p_n^2 = \frac{n^2}{n^2 + k^2}$ ,  $k = \frac{2}{\beta_e b}$ ,  $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$ ,  $v_0$  – средняя скорость потока,  $b$  – радиус пучка;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;  $\sigma + jL$  – комплексная проводимость среды;  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_p^2 = \frac{e I_0}{m \epsilon_0 \pi b^2 v_0}$ ,  $I_0$  – постоянная составляющая тока пучка;  $\frac{e}{m}$  – удельный заряд электрона;  $\beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}$ ;  $t_0$  – время влета электронов в пространство взаимодействия;  $I_n$  – нормированная на  $I_0$  амплитуда  $n$ -й гармоники тока.

Введем  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$ ,  $\xi = \beta_p x$ ,  $\sigma' + jL' = \frac{\sigma + jL}{\omega_p \epsilon_0}$ ,  $p'_n = \frac{n^2 (\Omega b')^2}{n^2 (\Omega b')^2 + 4}$ ,  $b' = \beta_p b$ ,  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ , в дальнейшем опуская штрихи. Не приводя выкладки, во многом повторяющие теорию Овчарова-Солнцева, получим

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Omega p_n \sigma J_n^2(nB)}{(\epsilon n \Omega + L)^2 + \sigma^2}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} - \frac{(C_1 - 2\mu)^2}{B^3} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Omega p_n (\epsilon n \Omega + L)}{(\epsilon n \Omega + L)^2 + \sigma^2} \frac{1}{n} \frac{dJ_n^2(nB)}{dB}, \quad (4)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования,  $\theta = \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{Re} \theta_1 e^{j\omega t_0} = \frac{\theta_0}{2} + B \cos(\omega t_0 + \varphi)$ ,  $\theta_1 = B e^{j\varphi}$ ,  $\mu = \frac{d\theta_0}{2d\xi}$ .

Таким образом, необходимо решить систему из двух дифференциальных уравнений (3) и (4), чтобы найти первую гармонику тока из соотношения

$$F = I_1 = 2J_1(B) e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\xi} \mu(\zeta)(1+B^{-2}(\zeta))d\zeta\right)}. \quad (5)$$

Следуя [3], можно разложить Бесселевы функции в (3) и (4) в ряды при  $B \ll 1$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = 2\Omega\sigma q = \sum_n \frac{\Omega\sigma}{(\epsilon n\Omega + L)^2 + \sigma^2} \frac{B^2}{1 + b^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{b^2 B^2}{2^2 + b^2} + \dots\right),$$

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} - \frac{(C_1 - 2\mu)^2}{B^3} = -\Omega Q = -\sum_n \frac{\Omega(\epsilon n\Omega + L)}{(\epsilon n\Omega + L)^2 + \sigma^2} B \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b^2 B^2}{2^2 + b^2} + \dots\right).$$

Очевидно, что, если линеаризовать систему из двух последних уравнений, то получим

$$\frac{d\mu}{d\xi} = 0,$$

а уравнение (4), при учете только первой гармоники, примет вид

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} + \frac{p_1 \Omega (\epsilon \Omega + L)}{(\epsilon n \Omega + L)^2 + \sigma^2} B = 0. \quad (6)$$

Если предположить, что  $B \sim e^{-j\beta\xi}$ , то из (6) следует, что корни характеристического уравнения будут  $\beta = \pm j \sqrt{\frac{p_1 \Omega (\epsilon \Omega + L)}{(\epsilon n \Omega + L)^2 + \sigma^2}}$ , что соответствует мнимым составляющим корней дисперсионного уравнения классического резистивного усилителя (в нормировке данной работы) при  $\sigma = 0$ .

В работе [4] был проведен приближенный учет нелинейности процессов группирования, а именно ищется первая гармоника тока в случае индуктивной проводимости среды. Укажем условия, при которых результаты работы [4] совпадают с результатами настоящей работы. Во-первых, должна отсутствовать начальная модуляция по току в [4]. Во-вторых, показатель экспоненты в (5) должен быть равен нулю, это значит, что не зависящая от времени компонента возмущенной фазы электрона  $\theta_0$  постоянна. Это, в частности, приводит к условию  $C_1 = \mu$ .

Будем исследовать гармоники тока при следующих начальных условиях:

$$\frac{dB}{d\xi} = \chi, \quad B(0) = 0, \quad \mu(0) = 0, \quad C_1 = 0,$$

где  $\chi$  – начальная модуляция скорости. Расчёты показывают, что зависимости первой гармоники тока вблизи первого максимума почти не меняются с ростом числа гармоник, учитываемых в решении уравнений, из чего следует, что для дальнейших расчетов можно ограничиться только первой гармоникой.

На рис. 1 представлены зависимости модуля первой безразмерной гармоники тока от длины пространства дрейфа при различных величинах начальной модуляции. Видно, что с увеличением  $\chi$  координата первых максимумов смещается влево.

Из расчётов следует, что при выбранных параметрах  $|F|$  слабо меняется при изменении толщины пучка, а также параметров  $\Omega$  и  $\sigma$  (при чисто активной проводимости). Кроме того, координаты первого максимума при чисто активной проводимости почти на порядок больше чем при чисто мнимой проводимости, а  $|F| < 1.16$ .

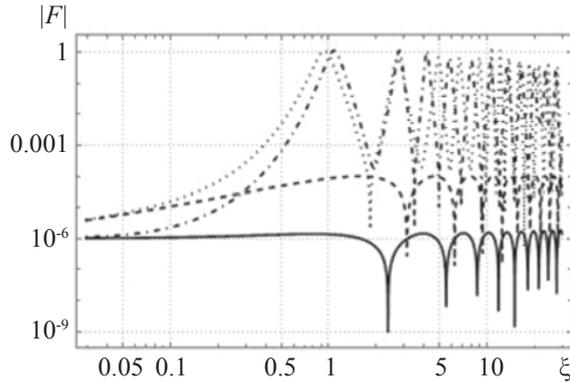


Рис. 1. Зависимости модуля первой гармоники безразмерного тока от нормированной координаты при  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  и различных  $\chi$  и  $L$ :  $L = 0$ ,  $\chi = 10^{-6}$  (сплошная линия);  $L = 0$ ,  $\chi = 10^{-4}$  (штриховая);  $L = -20.1$ ,  $\chi = 10^{-6}$  (штрихпунктирная);  $L = -20.1$ ,  $\chi = 10^{-4}$  (пунктирная линия)

Fig. 1. Dependences of the modulus of the first dimensionless harmonic of the current on the normalized coordinate at  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  and different  $\chi$  and  $L$ :  $L = 0$ ,  $\chi = 10^{-6}$  (solid line);  $L = 0$ ,  $\chi = 10^{-4}$  (dashed line);  $L = -20.1$ ,  $\chi = 10^{-6}$  (dash-and-dot line);  $L = -20.1$ ,  $\chi = 10^{-4}$  (dotted line)

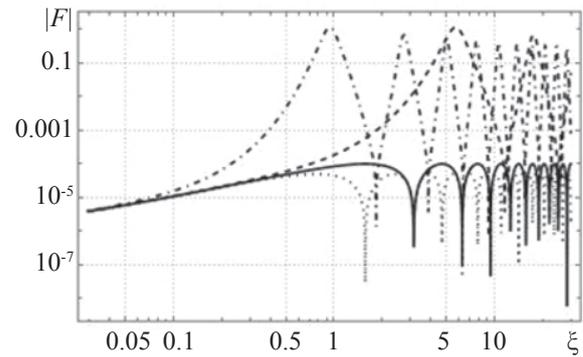


Рис. 2. Зависимости модуля первой гармоники безразмерного тока от нормированной координаты при  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\chi = 10^{-4}$  и различных  $L$ : 0 (сплошная линия); -25 (штриховая); -20.1 (штрихпунктирная); -15 (пунктирная линия)

Fig. 2. Dependences of the modulus of the first dimensionless harmonic of the current on the normalized coordinate at  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  and different  $L$ : 0 (solid line); -25 (dashed line); -20.1 (dash-and-dot line); -15 (dotted line)

Из рис. 2 видно, что первый максимум достигается при наименьшей длине пространства дрейфа вблизи  $L = -\varepsilon\Omega$ , а при  $L > -\varepsilon\Omega$  величина максимума становится меньше 1.

### Фазовый портрет

В рамках представлений волнового метода исследуем по хорошо известной из теории колебаний методике (см., например, [5]) особые точки в случае чисто индуктивной проводимости, учитывая только первую гармонику. Так как  $\sigma = 0$ , очевидно, что  $\mu = \text{const}$ , а (4) при указанных условиях примет вид

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} = -\frac{2\Omega p_1}{\varepsilon\Omega + L} J_1(B) (J_0(B) - J_2(B)). \quad (7)$$

Если разложить функции Бесселя в ряд при малых  $B$  и ограничиться первым членом разложения, считая поток бесконечно широким ( $p_1 \rightarrow 1$ ), то уравнение (7) примет вид

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} = -\frac{\Omega B}{\varepsilon\Omega + L}.$$

Считая  $B \sim e^{\lambda\xi}$ , получим

$$\lambda = \pm j \sqrt{\frac{\Omega}{\varepsilon\Omega + L}}.$$

Нетрудно видеть, что получилось уравнение линейного осциллятора, очевидно, имеющего одну особую точку при  $B = 0$ . Исследуем эту точку на устойчивость и влияние проводимости на тип особых точек. Если  $L < -\varepsilon\Omega$ , то  $\varepsilon\Omega + L < 0$ , а  $\lambda$  – чисто действительное и состояние

равновесия – седло. Если  $L > -\varepsilon\Omega$ , то  $\varepsilon\Omega + L > 0$ , а следовательно,  $\lambda$  – чисто мнимое и состояние равновесия – центр. Следует, однако, оговориться, что чисто мнимые собственные числа не являются достаточным условием того, что точка – центр, так как возможны ситуации, когда это не так [6].

Отметим, что к полученным результатам применима механическая аналогия: частица движется в потенциальной яме возле минимума, а если ей хватает энергии, то она может выбраться из этой ямы и пройти через другие.

Вернемся к особым точкам уравнения (7). В случае обычного клистрона (рис. 3 а, с) в точке  $B = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm j\lambda$ , где  $\lambda$  – чисто действительное, следовательно, состояние равновесия – центр; в точках  $B = \pm 1.84$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , а следовательно, состояние равновесия – седло. Что касается остальных экстремумов (не приведенных на рис. 3), то в максимумах также седла, а в минимумах – центры. Если проводимость индуктивная и  $L < -\varepsilon\Omega$ , то ситуация меняется: при  $B = 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , то есть состояние равновесия – седло (рис. 3 d), а при  $|B| \approx 1.8$   $\lambda_{1,2} = \pm j\lambda$ , то есть состояние равновесия – центр.

Физические процессы, отраженные на рис. 3 d, опишем согласно [4]. При  $\frac{L}{\omega\varepsilon} \geq -1$  напряженность электрического поля, создаваемого наведенным зарядом, складывается в фазе с силами пространственного заряда в пучке, в результате чего увеличивается продольное расталкивание электронов и усиление волн пространственного заряда оказывается невозможным. При  $\frac{L}{\omega\varepsilon} \leq -1$  силы пространственного заряда в пучке и силы, создаваемые наведенным зарядом, оказываются в противоположных фазах, что приводит к улучшению условий группировки электронов в пучке. При выполнении условия  $\frac{L}{\omega\varepsilon} = -1$  в среде наступает резонанс: токи смещения и индуктивные токи в среде становятся равными друг другу по величине, а наведенный заряд стремится к  $\infty$ .

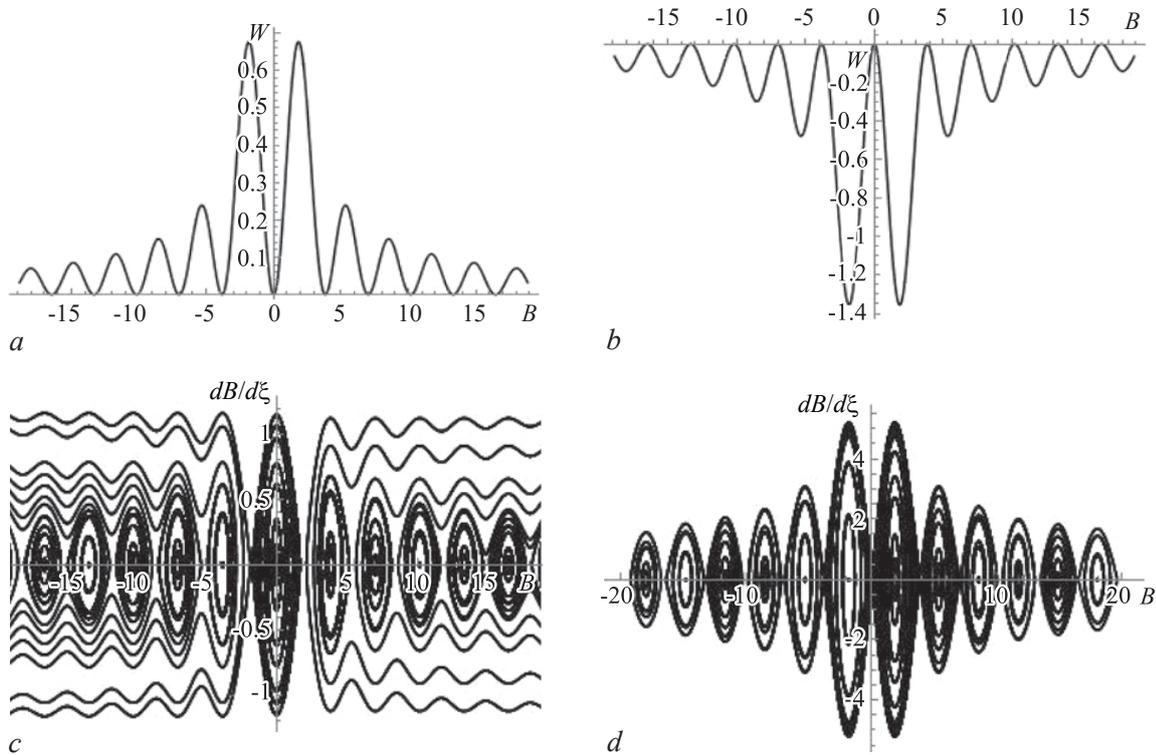


Рис. 3. Полная энергия и фазовый портрет уравнения (7) при  $\Omega = 20$ ,  $p_1 = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ;  $L = 0$  (a, c),  $L = -21$  (b, d)  
 Fig. 3. Total energy and phase portrait of equation (7) with  $\Omega = 20$ ,  $p_1 = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ;  $L = 0$  (a, c),  $L = -21$  (b, d)

Следует отметить, что, если в уравнении (7) при малых  $B$  разложить функции Бесселя в ряд Тейлора до третьего члена, то получим

$$\frac{d^2 B}{d\xi^2} = -\frac{p_1 \Omega B}{\epsilon \Omega + L} \left(1 - \frac{B^2}{2}\right),$$

которое при  $\epsilon \Omega + L > 0$  есть уравнение Дуффинга и при  $\epsilon \Omega + L < 0$  – кубический осциллятор с двумя ямами, а следовательно, при малых  $B$  фазовый портрет этого уравнение совпадет с рис. 3 *c, d* в зависимости от знака  $\epsilon \Omega + L$ . Однако, из-за условия малой скоростной модуляции на рис. 3 *d* отсутствуют огибающие – в механической аналогии частице не хватает энергии, чтобы перемещаться между ямами.

### Выходные характеристики резистивного клистрона

Для оценки коэффициента усиления по напряжению в рассматриваемой модели (рис. 4) воспользуемся формулой из монографии [7] (для случая резонатора, настроенного на частоту сигнала)

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{Y_e}{G_2},$$

где  $U_{1,2}$  – переменное напряжение во входном и выходном резонаторах, соответственно,  $G_2$  – активная параллельная проводимость выходного резонатора,  $Y_e = jI_0 \frac{F}{U_1}$  – электронная проводимость потока в выходном резонаторе.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{v^2(0)}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \eta U_1. \quad (8)$$

При условии малой модуляции

$$v \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = v_0 \left(1 - \frac{1}{\Omega} \left[\mu + \frac{dB}{d\xi} \cos(\omega t_0 + \varphi) + \frac{\mu}{B} \sin(\omega t_0 + \varphi)\right]\right).$$

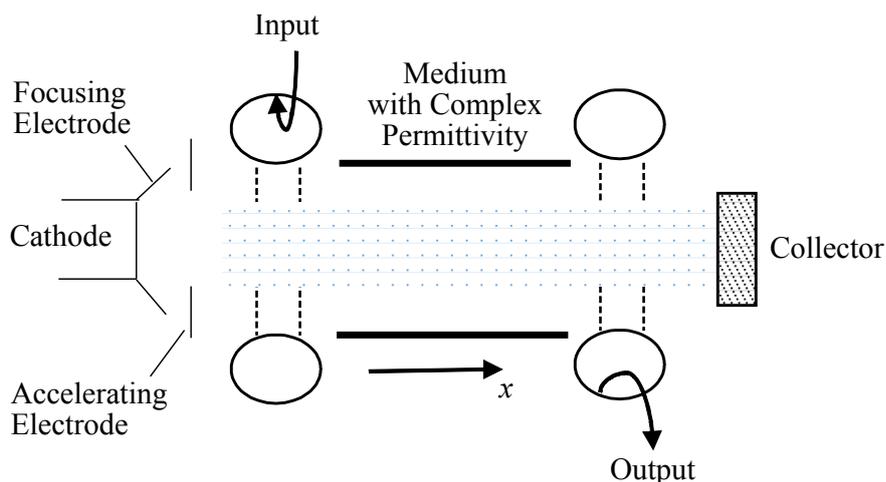


Рис. 4. Рассматриваемая модель двухрезонаторного клистрона с пространством дрейфа в виде среды с комплексной диэлектрической проницаемостью

Fig. 4. Considered model of a two-cavity klystron with a drift space in the form of a medium with complex permittivity

При  $\omega t_0 = 0$  квадрат последнего выражения с учетом выбранных начальных условий можно представить в виде

$$v^2(0) = v_0^2 \left( 1 - \frac{2\chi}{\Omega} + \frac{\chi^2}{\Omega^2} \right),$$

подставляя которое в (8), получаем

$$U_1 = \frac{v_0^2}{2\eta} \left( \frac{\chi^2}{\Omega^2} - \frac{2\chi}{\Omega} \right).$$

Тогда коэффициент усиления при учете только первой гармоники примет вид:

$$G = 20 \lg \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = 20 \lg \left| -j \frac{2CF}{\left( \frac{\chi^2}{\Omega^2} - \frac{2\chi}{\Omega} \right)} \right|,$$

где  $C = \frac{\eta I_0}{v_0^2 G_2} = \frac{I_0}{2U_0 G_2}$ ,  $U_0$  – потенциал пучка. Взяв, например, параметры из [7] для  $G_2 = 4 \cdot 10^{-4}$  1/Ом,  $U_0 = 1$  кВ,  $I_0 = 80$  мА, получим  $C = 0.1$ .

Выходная мощность и КПД при учете только первой гармоники рассчитываются по формулам

$$P_{out} = IU_2 = -j \frac{I_0^2 F}{G_2}, \quad \eta_e = \left| \frac{P_{out}}{I_0 U_0} \right| = \left| \frac{I_0 F}{U_0 G_2} \right|.$$

Как видно из рис. 5, наличие у пространства дрейфа проводимости действительно может позволить не только увеличить коэффициент усиления (что следует из линейной теории),

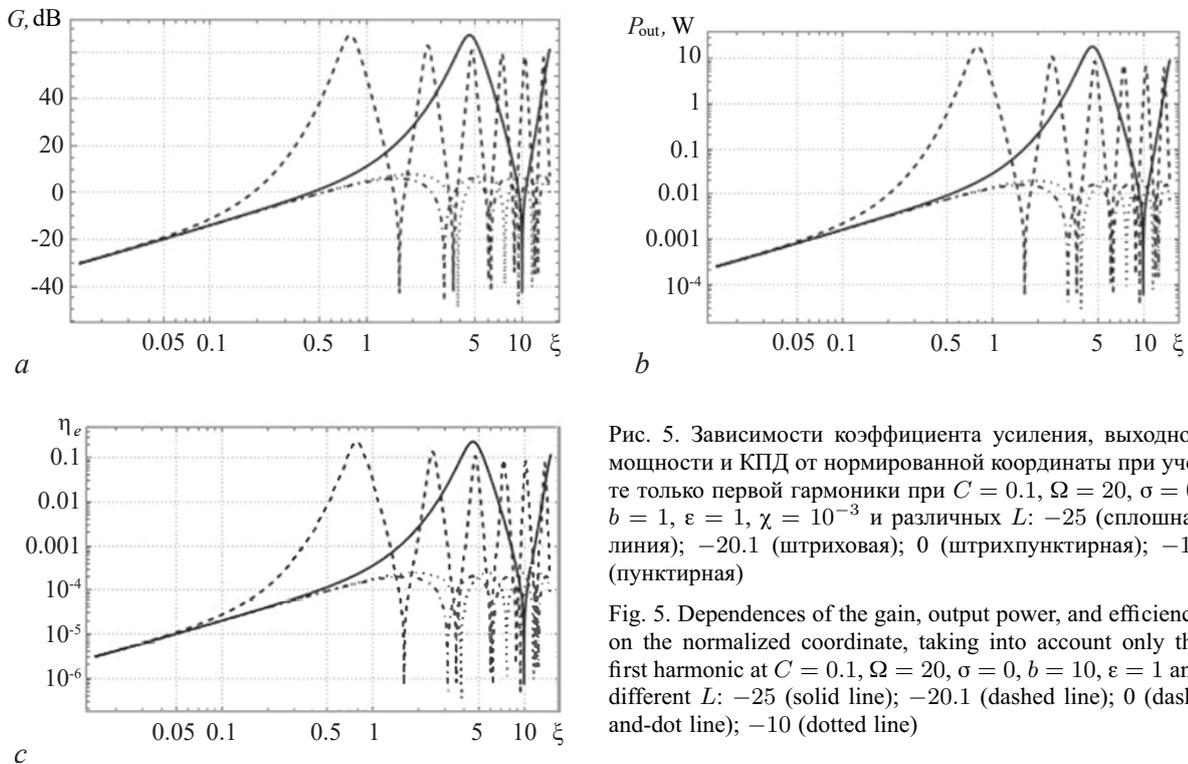


Рис. 5. Зависимости коэффициента усиления, выходной мощности и КПД от нормированной координаты при учете только первой гармоники при  $C = 0.1$ ,  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\chi = 10^{-3}$  и различных  $L$ :  $-25$  (сплошная линия);  $-20.1$  (штриховая);  $0$  (штрихпунктирная);  $-10$  (пунктирная)

Fig. 5. Dependences of the gain, output power, and efficiency on the normalized coordinate, taking into account only the first harmonic at  $C = 0.1$ ,  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  and different  $L$ :  $-25$  (solid line);  $-20.1$  (dashed line);  $0$  (dash-and-dot line);  $-10$  (dotted line)

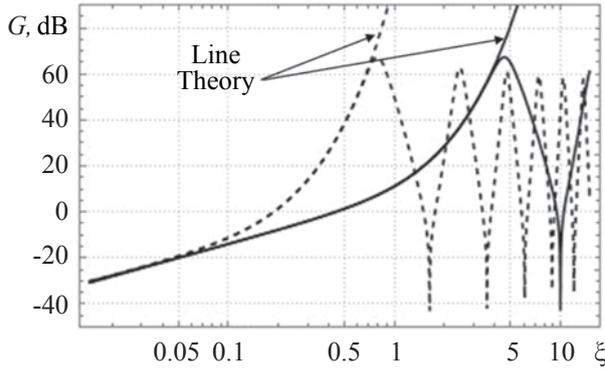


Рис. 6. Зависимости коэффициента усиления, полученного из линейной и нелинейной теорий, от нормированной координаты при учете только первой гармоники при  $C = 0.1$ ,  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\chi = 10^{-3}$  и различных  $L$ :  $-25$  (сплошная линия);  $-20.1$  (пунктирная линия)

Fig. 6. Dependences of the gain obtained from linear and nonlinear theories on the normalized coordinate, taking into account only the first harmonic at  $C = 0.1$ ,  $\Omega = 20$ ,  $\sigma = 0$ ,  $b = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  and different  $L$ :  $-25$  (solid line),  $-20.1$  (dotted line)

но уменьшить длину прибора. Укажем также на хорошее совпадение результатов линейной и нелинейной теории до первого максимума (рис. 6). Из расчётов следует, что при чисто активной проводимости первые максимумы коэффициента усиления, мощности и КПД сравнимы по величине с таковыми при индуктивной проводимости, но их координаты лежат правее.

Выбранные безразмерные параметры, при которых построен рис. 5, эквивалентные ускоряющему напряжению 1 кВ, току пучка 160 мА, плазменной частоте 100 МГц, рабочей частоте 2 ГГц, позволяют получить коэффициент усиления равный 66 дБ, выходную мощность 19 Вт, КПД 23%. Отметим, что в случае обычного клистрона (также показанном на рис. 5 при тех же параметрах) коэффициент усиления равен 6 дБ, выходная мощность 17 мВт, КПД – 0.02% и расстояние между резонаторами равно 2.39 мм; при подборе параметров среды с комплексной диэлектрической проницаемостью расстояние можно сократить до 1.19 мм.

### Некоторые модели метаматериалов

Исследуем влияние некоторых моделей метаматериалов. Для метаматериала с  $\varepsilon < 0$  часто справедлива простая формула, основанная на модели электронного газа (Друде):

$$\varepsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pM}^2}{\omega(\omega + j\gamma)},$$

где  $\varepsilon_D$  – относительная диэлектрическая проницаемость метаматериала,  $\omega_{pM}$  – плазменная частота метаматериала,  $\gamma$  – коэффициент затухания колебаний. Простейшим примером такого метаматериала является структура из проводящих стерженьков [8]. Кроме того, также часто используется модель Друде–Лоренца [8]:

$$\varepsilon_{DL}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pM}^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + j\omega\omega_c},$$

где  $\varepsilon_{DL}$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\omega_0$  – резонансная частота,  $\omega_c$  – частота столкновений. Примером такого метаматериала является структура из отрезков меандров [8]. Для удобства перейдем к безразмерным величинам

$$\varepsilon_D = 1 - \frac{\Omega_M^2}{\Omega(\Omega + j\Gamma)}, \quad \varepsilon_{DL} = 1 - \frac{\Omega_M^2 - \Omega_0^2}{\Omega^2 - \Omega_0^2 + j\Gamma\Omega},$$

где  $\Omega_M = \frac{\omega_{pM}}{\omega_p}$ ,  $\Omega_0 = \frac{\omega_0}{\omega_p}$ ,  $\Gamma = \frac{\gamma}{\omega_p}$  или  $\frac{\omega_c}{\omega_p}$  (в зависимости от выбранной модели).

Из расчётов следует, что аналогично рассмотренному случаю комплексной проводимости наименьшая координата первого максимума тока первой гармоники наблюдается при  $\Omega \approx \Omega_M$

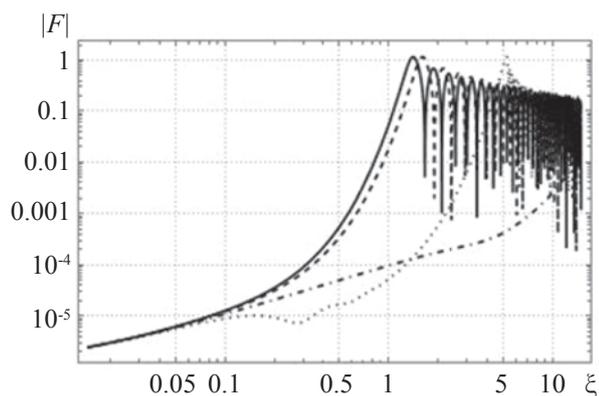


Рис. 7. Зависимости модуля гармоник безразмерного тока от нормированной координаты в модели Друде–Лоренца при  $\Omega = 20$ ,  $p_1 = 1$ ,  $\chi = 10^{-4}$ ,  $\Omega_M = 20.1$ ,  $\Gamma = 0.1$  при различных значениях  $\Omega_0$ : 1 (сплошная линия), 10 (штриховая линия), 20 (штрихпунктирная), 30 (пунктирная линия)

Fig. 7. Dependences of the modulus of dimensionless current harmonics on the normalized coordinate for various in the Drude–Lorentz model for  $\Omega = 20$ ,  $p_1 = 1$ ,  $\chi = 10^{-4}$ ,  $\Omega_M = 20.1$ ,  $\Gamma = 0.1$  at  $\Omega_0 = 1$  (solid line), 10 (dashed line), 20 (dash-and-dot line), 30 (dotted line)

и что с увеличением  $\Gamma$  координата первого максимума растет как в модели Друде, так и в модели Друде–Лоренца. Как видно из рис. 7, при увеличении  $\Omega_0$  координата первого максимума увеличивается.

Расчёты показывают, что выходные характеристики для рассмотренных моделей метаматериала слабо отличаются от рассмотренного выше случая с комплексной проводимостью, причем зависимости для модели Друде–Лоренца совпадут с аналогичными для модели Друде при малых  $\Omega_0$ .

### Заключение

В данной работе изложена приближенная нелинейная теория клистрона-усилителя, в котором между входным и выходным резонатором вместо пространства дрейфа располагается среда с комплексной проводимостью или метаматериалами, с помощью метода принудительной гармонизации. Показано, что подбором параметров указанной среды (или метаматериала) можно сократить расстояние между резонаторами более чем вдвое с увеличением выходных характеристик. При выбранных безразмерных параметрах, эквивалентных ускоряющему напряжению 1 кВ, току пучка 160 мА, плазменной частоте 100 МГц, рабочей частоте 2 ГГц, коэффициент усиления достигает 66 дБ, выходная мощность 19 Вт, КПД – 23%, причем, если для обычного клистрона (при прочих равных параметрах) коэффициент усиления равен 6 дБ, выходная мощность 17 мВт, КПД – 0.02% и расстояние между резонаторами равно 2.39 мм, то при подборе параметров расстояние можно сократить до 1.19 мм.

### Библиографический список

1. Солнцев В.А. Волновой метод // Лекции по электронике СВЧ. 2-я зимняя школа-семинар инженеров, книга 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972. С. 90.
2. Овчаров В.Т., Солнцев В. А. Упрощенные нелинейные уравнения лампы бегущей волны // Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7, № 11.
3. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
4. Касаткин Л.В. Об усилении волн пространственного заряда при прохождении пучков электронов в средах с индуктивной проводимостью // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6, № 2. С. 267–274.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания: Учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2002.

6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
7. Клистроны. М.: Сов. радио, 1952. 226 с.
8. Rowe T., Behdad N., Booske J. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2016. Vol. 44, № 10. С. 2476–2484.

## References

1. Solntsev V.A. Wave method. In: Lectures on microwave electronics, II Winter School-Seminar Workshop Engineers. Vol. 1. Saratov: Izd-vo SGU, 1972, pp. 90 (in Russian).
2. Ovcharov V.T., Solntsev V.A. Simplified nonlinear equations of a traveling wave lamp. *Radio Engineering and Electronic Physics*, 1962, vol. 7, no. 11.
3. Shevchik V.N., Trubetskov D.I. Analytic Methods of Calculation in Microwave Electronics. Moscow, Soviet Radio, 1970 (in Russian).
4. Kasatkin L.V. On amplification of space charge waves during the passage of electron beams in media with inductive conductivity. *Radio Engineering and Electronic Physics*, 1961, vol. 6, no. 2, pp. 267–274 (in Russian).
5. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Nonlinear Oscillations. Textbook. Moscow, Fizmatlit, 2002.
6. Trubetskov D.I., Rozhnev A.G. Linear Oscillations and Waves. Textbook. Moscow, Fizmatlit, 2001, 416 p.
7. Hamilton D.R., Knipp J.K., Horner Kuper J.B. Klystrons and Microwave Triodes (in the Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory series) First Edition. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company Inc, 1948.
8. Rowe T., Behdad N., Booske J. Metamaterial-enhanced resistive wall amplifier design using periodically spaced inductive meandered lines. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2016, vol. 44, no. 10, pp. 2476–2484.



*Фунтов Александр Андреевич* – родился в Балакове Саратовской области (1992). Окончил СГУ (2014). В настоящее время – ассистент кафедры электроники, колебаний и волн. Автор шести научных публикаций. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет  
 E-mail: aafuntov@mail.ru