



УДК 535.015; 535.14; 535.530; 537.86

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360>

**Анализ устойчивости состояния равновесия
внутрирезонаторного оптического параметрического генератора:
Метод разложения по малому параметру**

Ю. А. Морозов

Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники имени В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
E-mail: yuri.mor@rambler.ru

*Поступила в редакцию 17.03.2020,
принята к публикации 29.04.2020, опубликована 31.08.2020*

Цель настоящего исследования – в модели динамической системы с запаздыванием определить в аналитическом виде характеристики линейной устойчивости стационарного состояния оптического параметрического генератора с внутрирезонаторной накачкой полупроводниковым дисковым лазером. **Методы.** Для построения аналитического решения задачи используется метод разложения по степеням одного из малых параметров, входящих в систему. Результаты аналитического решения сопоставляются с точными численными решениями. **Результаты.** Показано, что при интенсивности первичной накачки, не достигающей порогового значения параметрической генерации $\sigma_{\text{оро}}$, стационарное состояние всегда устойчиво, как в обычном полупроводниковом дисковом лазере. Малые отклонения релаксируют к стационарному состоянию в виде импульсной последовательности с периодом следования, равным времени обхода по резонатору. Представлены соотношения, определяющие декремент затухания и несущую частоту импульсной последовательности. Относительные изменения амплитуды импульсной последовательности за один обход по резонатору не зависят от времени этого обхода. Показано, что в постпороговом режиме существует такая величина накачки $\sigma_{\text{ан}} > \sigma_{\text{оро}}$, что устойчивость стационарного состояния нарушается в результате бифуркации Андронова–Хопфа. **Обсуждение.** Результаты проведенных исследований найдут применение при создании и анализе характеристик новых устройств оптического диапазона, построенных на принципе нелинейно-оптического взаимодействия.

Ключевые слова: трехволновое нелинейно-оптическое взаимодействие, полупроводниковый дисковый лазер, оптический параметрический генератор, динамическая система с запаздывающим аргументом.

Образец цитирования: Морозов Ю.А. Анализ устойчивости состояния равновесия внутрирезонаторного оптического параметрического генератора: Метод разложения по малому параметру // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 348–360. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Analysis of steady-state stability for intracavity optical parametric oscillator: Method of small-parameter expansion

Yu. A. Morozov

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS
38, Zelenaya str., Saratov 410019, Russia
E-mail: yuri.mor@rambler.ru

Received 17.03.2020, accepted 29.04.2020, published 31.08.2020

The aim of the study is to analytically determine the linear stability of a steady-state operation point for an optical parametric oscillator (OPO) intracavity pumped by a semiconductor disk laser (SDL). **Methods.** In order to build the analytic approximation to the characteristic equation roots, the method of small-parameter expansion is used. The results of analytic and numerical methods are compared with each other. **Results.** As the primary pump intensity does not exceed the threshold value of parametric generation σ_{OPO} , the steady-state operation point is shown to be stable, like that of an ordinary SDL does. Small deviations relax to the steady state in the form of a pulse sequence with a period that equals one round-trip time. Relations defining the attenuation decrement and the carrier frequency of the pulse sequence are presented. The relative changes in these deviations during one cavity round-trip are independent of this round-trip time. It is shown that in the above-threshold regime there is such a pump intensity $\sigma_{\text{AH}} > \sigma_{\text{OPO}}$ at which the steady state loses stability as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. **Discussion.** The results of the study could be applied for making and analysis of new optical devices based on nonlinear-optical interaction.

Key words: three-wave nonlinear-optical interaction, semiconductor disk laser, optical parametric oscillator, time-delayed dynamic system.

Reference: Morozov Yu.A. Analysis of steady-state stability for intracavity optical parametric oscillator: Method of small-parameter expansion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 348–360.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-4-348-360>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state task of the Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS.

Введение

Начиная со времени первой успешной реализации в 1994 году [1], квантово-каскадные лазеры (ККЛ) стремительно развивались и в настоящее время рассматриваются в качестве одного из основных источников когерентного излучения в среднем и дальнем инфракрасном (ИК) диапазонах – участках спектра электромагнитных волн, недоступных для традиционных неохлаждаемых полупроводниковых лазеров. Однако квантово-каскадным лазерам присущи некоторые неустраняемые недостатки, которые сдерживают их успешное применение. Во первых, это относится к невозможности обеспечить инверсию населенности и, как следствие, генерацию излучения с длиной волны порядка 100 мкм при комнатной рабочей температуре. Во-вторых, ККЛ имманентна сложная структура активной области, состоящей из нескольких сотен квантово-размерных слоев, геометрические размеры которых должны выдерживаться при изготовлении с высокой точностью. Кроме того, пространственная структура пучка излучения ККЛ весьма далека от гауссова профиля, что также создает неудобства при использовании.

В то же время, давно известны и широко применяются (в том числе, в устройствах среднего и дальнего ИК диапазонов) генераторы, построенные на принципе преобразования частоты вниз вследствие нелинейно-оптического взаимодействия – генераторы разностной частоты (ГРЧ) и оптические параметрические генераторы (осцилляторы) (ОПГ) [2]. Согласно классификации, приведенной в [2], такие источники излучения относятся к лазерам В-класса. Для них характерно наличие одного (или нескольких) устойчивых резонаторов, поддерживающих гауссовы моды и, следовательно, пучки излучения отличаются высоким качеством. Излучение в лазерах

В-класса возникает не прямо в результате взаимодействия инвертированной электронной подсистемы с фотонной подсистемой, как в лазерах А-класса (к которым относятся и ККЛ), а опосредованно – в результате трехволнового нелинейно-оптического взаимодействия, при котором длинноволновое излучение формируется из более коротковолновых. При этом вопрос о создании инверсии населенности для длинноволнового излучения не возникает.

В настоящее время, в связи с развитием технологии изготовления и появлением новых нелинейных кристаллов, а также с применением перспективных лазерных способов накачки ГРЧ и ОПГ, интерес к созданию таких источников излучения возрастает [3–6]. Особенно многообещающими представляются внутрирезонаторные версии этих устройств, когда нелинейный кристалл, в котором выполняется преобразование частоты, помещается внутрь лазерного резонатора с малыми потерями. При этом, вследствие резонансного возрастания поля, эффективность нелинейно-оптического взаимодействия увеличивается и порог параметрической генерации может быть значительно снижен. На этом принципе построен, в частности, внутрирезонаторный оптический параметрический генератор (ВОПГ), предложенный Стотардом [7]. В этом генераторе нелинейный кристалл помещен в резонатор полупроводникового дискового лазера (ПДЛ), который также называют лазером с внешним вертикальным резонатором. Длина волны излучения ПДЛ составляет приблизительно 1.05 мкм; фотоны этого излучения распадаются в результате нелинейно-оптического взаимодействия на фотоны сигнального (с длиной волны 1.6 мкм) и холостого излучения на длине волны 3.05 мкм. Резонаторы лазерного и сигнального излучения в ВОПГ Стотарда разделены и поэтому с технической точки зрения практически невозможно создать в рамках этого подхода ВОПГ с холостым излучением на длине волны, намного превышающей указанное значение.

Недавно нами предложен ВОПГ с внутрирезонаторной накачкой от ПДЛ, в котором лазерное и сигнальное излучение имеют один общий резонатор [8]. При этом продвижение длины волны холостого излучения в более (по сравнению с [7]) длинноволновый диапазон ограничивается лишь поглощением этого излучения в полосе остаточных лучей (reststrahlen band) используемого нелинейного кристалла. Так, для ВОПГ [8] с нелинейным кристаллом GaAs длина волны холостого излучения составляет 16.5 мкм. Кроме того, схема ВОПГ значительно упрощается, он может быть, по оценкам, сделан более компактным, с длиной резонатора порядка 30...50 мм.

Большинство математических моделей ВОПГ строится с использованием метода разложения оптических полей по нормальным модам резонатора (резонаторов) [7, 9–11]. К недостаткам этого метода относится невозможность анализировать быстрые (в масштабе времени обхода резонатора) колебания амплитуд оптических полей (динамических переменных задачи). С целью устранения этого недостатка и углубления понимания физических процессов в приборе, нами предложена новая математическая модель, в рамках которой ВОПГ рассматривается как динамическая система с временным запаздыванием [12]. Уравнения этой модели записаны относительно чисел фотонов в лазерном и сигнальном оптических полях внутри активного лазерного зеркала. Влияние внешнего резонатора учитывается с помощью запаздывающих отражений, причем, в отличие от известной модели Ланга–Кобаяши [13], величина этих отражений предполагается большей по сравнению с отражениями внутри активного зеркала.

С применением математической модели динамической системы с запаздыванием, в работе [12] проанализированы характеристики излучения ВОПГ [8], в том числе выполнено изучение устойчивости состояния равновесия динамической системы с помощью известного пакета для численного бифуркационного анализа [14].

В настоящей работе, пользуясь наличием малых параметров в модели динамической системы [12], для анализа устойчивости стационарного состояния ВОПГ применены методы теории возмущений (см., например, [15]). Разложение характеристического уравнения задачи в ряд по степеням малого параметра позволяет выявить основные взаимосвязи между параметрами системы и характеристиками состояния равновесия в аналитическом виде, что способствует более глубокому пониманию физических процессов в приборе.

1. Внутррезонаторный оптический параметрический генератор как динамическая система с запаздыванием

На рис. 1 схематически показано устройство ВОПГ с внутррезонаторной накачкой ПДЛ [8, 12]. Активное зеркало (gain mirror) состоит из квантово-размерной активной области и двухполосного брэгговского зеркала БЗ (double-band mirror, DBM). Последнее обеспечивает высокий коэффициент отражения для обоих резонансных оптических полей – лазерного излучения с длиной волны 1.98 мкм (накачки, pump) и сигнального излучения (2.25 мкм). Резонатор устройства, собственными функциями (модами) которого являются поля накачки и сигнала, образован активным зеркалом с одной стороны и сферическим зеркалом с другой. Трехволновое нелинейно-оптическое взаимодействие осуществляется в нелинейном кристалле с квазисинхронизмом на основе GaAs. Выходное сферическое зеркало является прозрачным для холостого излучения с длиной волны 16.5 мкм. Первичная оптическая накачка активной области ПДЛ выполняется полупроводниковым лазером с длиной волны 0.98 мкм.

Математическая модель ВОПГ как динамической системы с запаздыванием формализуется в виде следующих уравнений (см. подробный вывод в [12]).

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \eta \left[(G - 1) + \frac{1}{T} \left(\frac{a_{1\tau}}{a_1} - 1 \right) - \frac{\delta}{T} (a_2 + a_{2\tau}) \right] a_1, \\ \dot{\nu} &= \sigma - \nu - G a_1, \\ \dot{a}_2 &= \eta \left[-1 + \frac{1}{T} \left(\frac{a_{2\tau}}{a_2} - 1 \right) + \frac{\delta}{T} (a_1 + a_{1\tau}) \right] a_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь функции a_1 и a_2 представляют числа фотонов в полях накачки и сигнала, нормированные на $a_0 = \nu_{th}/\eta$; число носителей в квантовых ямах ν нормировано на пороговое значение ν_{th} , $\eta = \tau_r/\tau_{ph} \gg 1$, τ_r и $\tau_{ph} = (v_g \alpha_s)^{-1}$ время жизни носителей и фотонов в активном зеркале (v_g – групповая скорость для излучения накачки и сигнала). Точки над переменными в левой части означают дифференцирование по величине безразмерного времени $\xi = t/\tau_r$. Величины

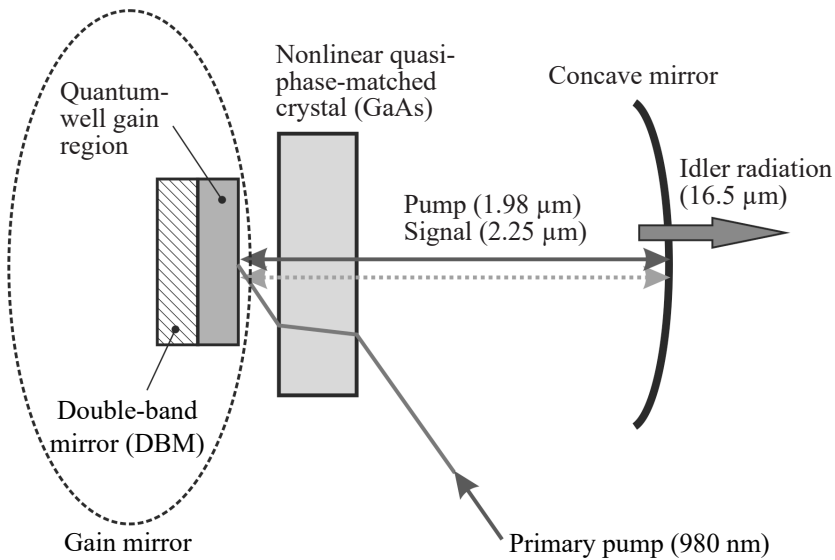


Рис. 1. Схема внутррезонаторного ОПГ с накачкой ПДЛ

Fig. 1. Setup of intracavity OPO pumped by SDL

с индексом τ относятся к запаздывающему моменту времени, то есть $a_{i\tau} = a_i(\xi - \tau)$, где $\tau = 2L/(c\tau_r)$, L – длина резонатора, c – скорость света в вакууме. $T = 2\alpha_s L_{in}$ – потери в резонаторе за проход, причем $\alpha_s = \alpha_{in} - (L_{in})^{-1} \ln[r_{DBM}(1 - r^2)R]$, α_{in} – внутренние потери вследствие рассеяния и нерезонансного поглощения, r_{DBM} , r и R – коэффициенты отражения двухполосного БЗ, внешней поверхности активного зеркала и сферического выходного зеркала, соответственно. Нормированный коэффициент усиления G равен

$$G = 1 + G_0 \ln v, \quad (2)$$

где $G_0 = 4mG_{QW}/T$, m – число квантовых ям в активной области, G_{QW} коэффициент усиления, приходящийся на одну квантовую яму. При этом пороговое значение числа носителей может быть записано в виде $v_{th} = m\lambda\omega_{pp}^2 N_t \exp(1/G_0)$, где ω_{pp} радиус пучка первичной оптической накачки, N_t плотность числа носителей, соответствующая просветлению активной среды (transparent carrier density). Коэффициент нелинейного взаимодействия определяется в форме $\delta = \mu a_0/\tau_{in}$, где $\tau_{in} = 2L_{in}/v_g$ время обхода активного зеркала, $\mu = 2\gamma/[\pi(w_1^2 + w_2^2)]$. При выводе выражений предполагалось, что оптические поля накачки и сигнала представлены в форме гауссовых пучков с радиусами перетяжек внутри кристалла w_1 и w_2 ,

$$\gamma = \frac{32Z_0}{n_1 n_2 n_3} d_{14}^2 \left(\frac{L_c^2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \hbar\omega_3, \quad (3)$$

$Z_0 = 120\pi$ – волновое сопротивление вакуума, d_{14} – элемент тензора нелинейной восприимчивости кристалла GaAs, L_c – длина кристалла, λ_1 и λ_2 – длина волны накачки и сигнальной волны, $n_{1,2,3}$ – коэффициенты преломления, $\hbar\omega_3$ – энергия фотонов холостой волны. В уравнениях (1) соответствует мощности внешней первичной накачки P , нормированной на пороговое значение P_{th} лазерной генерации.

Характеристическое уравнение, определяющее устойчивость стационарного состояния (a_{10}, a_{20}, v_0), можно записать в следующем виде:

$$\det(\Delta(\lambda)) = 0, \quad (4)$$

где $\Delta(\lambda) = \lambda I - A_0 - A_1 \exp(-\lambda\tau)$, I – единичная матрица, а A_0 и A_1 – матрицы производных от правых частей уравнений (1) по переменным (a_1, a_2, v) и запаздывающим переменным ($a_{1\tau}, a_{2\tau}$), соответственно. Значения матриц вычисляются в стационарном состоянии (a_{10}, a_{20}, v_0).

2. Метод асимптотических разложений по малому параметру

Для решения трансцендентного алгебраического уравнения (4) возможно применение методов теории возмущений [15] поскольку некоторые параметры исходной системы уравнений (1) имеют малые значения. В данной работе мы будем использовать разложение решения характеристического уравнения (4) в асимптотический ряд по параметру $T \approx 0.01...0.05$:

$$\lambda = \lambda_0 + T\lambda_T + T^2\lambda_{TT} + O(T^3). \quad (5)$$

2.1. Режим лазерной генерации без параметрического преобразования частоты. Прежде всего, рассмотрим ВОПГ при условии, что интенсивность первичной накачки превышает пороговое значение лазерной генерации, но меньше порога возбуждения параметрического вынужденного излучения $1 < \sigma < \sigma_{OPD}$. В этом режиме $a_{20} = a_{20\tau} = 0$ и прибор, по существу, работает в режиме обычного ПДЛ, когда нелинейный кристалл не нагружает резонатор. Из уравнений (1)

легко видеть, что в стационарном состоянии $G = 1$ и, следовательно, $v_0 = 1$ и $a_{10} = a_{10\tau} = \sigma - 1$. При этом матрица $\Delta(\lambda)$ принимает следующее значение:

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + D(1 - \exp(-\lambda\tau)) & -\omega_r^2 & D\delta a_{10}(1 + \exp(-\lambda\tau)) \\ 1 & \lambda + b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + D(1 - \exp(-\lambda\tau)) + D(T - 2\delta a_{10}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения: $D = \eta/T$, $\omega_r^2 = \eta a_{10} dG/dv$, $b = 1 + a_{10} dG/dv = 1 + \omega_r^2/\eta$. Следовательно, характеристическое уравнение распадается на два:

$$\lambda + D(1 - \exp(-\lambda\tau)) + D(T - 2\delta a_{10}) = 0, \quad (7)$$

и

$$[\lambda + D(1 - \exp(-\lambda\tau))](\lambda + b) + \omega_r^2 = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим вначале последнее уравнение (8). В него не входят параметры нелинейного кристалла, то есть оно представляет характеристическое уравнение ПДЛ без нелинейно-оптического взаимодействия (см. также [16]). В предельном случае отсутствия внешнего резонатора (при $\tau \rightarrow 0$) получим решение в виде

$$\lambda_{1,2} = -b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - \omega_r^2} \approx -b/2 \pm j\omega_r, \quad (9)$$

поскольку $\omega_r^2 = (b-1)\eta \gg (b/2)^2$ при достаточном удалении от порогового значения лазерной генерации, $j = \sqrt{-1}$. То есть введенные ранее величины ω_r и b представляют собой частоту и половину декремента затухания релаксационных колебаний полупроводникового лазера, состоящего из активного зеркала, на внешнюю поверхность которого нанесен отражатель с коэффициентом отражения внешнего зеркала R .

Вернемся к рассмотрению ПДЛ с резонатором конечной длины ($\tau \neq 0$). Уравнение (8) удобно записать в виде

$$\left[\lambda \frac{T}{\eta} + (1 - \exp(-\lambda\tau))\right](\lambda + b) + T(b-1) = 0. \quad (10)$$

Используя разложение (5), в нулевом порядке по T получим

$$T^0 : [1 - \exp(-\lambda_0\tau)](\lambda_0 + b) = 0. \quad (11)$$

Один из корней этого уравнения $\lambda_0 = -b$ является чисто действительным и имеет отрицательное значение порядка $O(1)$; собственные функции, отвечающие этому корню, быстро затухают и интереса для нас не представляют. Другие корни являются чисто мнимыми:

$$\lambda_{0p} = j2\pi p/\tau = j\Omega_p \quad (12)$$

с любыми целочисленными значениями p . Приравнивая нулю сумму членов порядка T^1 в разложении уравнения (10), будем иметь

$$T^1 : \left(\lambda_T\tau + j\frac{\Omega_p}{\eta}\right)(b + j\Omega_p) + (b-1) = 0, \quad (13)$$

или

$$\lambda_T\tau = -\frac{b}{\eta} \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p}\right)^2 - j\frac{\Omega_p}{\eta} \left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p}\right)^2\right]. \quad (14)$$

Здесь использовано соотношение $(b/\Omega_p)^2 \ll 1$, которое, как будет показано далее, справедливо для значений частоты Ω_p , представляющих интерес. И наконец, объединяя в разложении уравнения (10) члены второго порядка по T и приравнявая их сумму нулю, получим

$$T^2 : \quad \lambda_{TT}\tau = \lambda_T\tau \left[-\frac{1}{\eta\tau} \left[1 + \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p} \right)^2 \right] + \frac{\lambda_T\tau}{2} \right]. \quad (15)$$

Действительная часть корней характеристического уравнения в асимптотическом разложении до членов порядка T^2

$$\text{Re}(\lambda) = T \text{Re}(\lambda_T) + T^2 \text{Re}(\lambda_{TT}) \approx -\frac{T}{\tau} \left[\frac{b}{\eta} \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\Omega_p}{\eta} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p} \right)^2 \right]^2 \right]. \quad (16)$$

Из последнего выражения, прежде всего следует, что состояние равновесия ПДЛ без нелинейного кристалла всегда устойчиво ($\text{Re}(\lambda) < 0$) – вывод, который хорошо известен из практики использования такого лазера. Кроме того, изменение амплитуды собственной функции характеристического уравнения за время одного обхода по резонатору $1 - \text{Re}(\lambda\tau)$ не зависит от времени обхода. Так происходит потому, что усиление и потери ПДЛ не являются распределенными по длине, а напротив, локализованы в концевых точках резонатора.

Мнимая часть корней характеристического уравнения в разложении до T^1 имеет вид

$$\text{Im}(\lambda) = \Omega_p \left[1 - \frac{T}{\eta\tau} \left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p} \right)^2 \right] \right]. \quad (17)$$

Удобно изображать корни характеристического уравнения на комплексной плоскости ($\text{Re}(\lambda\tau)$, $\text{Im}(\lambda)$), поскольку при увеличении длины резонатора (то есть запаздывания τ) соседние значения частоты Ω_p сближаются, образуя при $\tau \rightarrow \infty$ непрерывную ветвь (точнее, две ветви комплексно-сопряженных значений на этой комплексной плоскости). На этой ветви существует максимальное значение действительной части корней $\text{Re}(\lambda^{(r)}\tau)$, отвечающее частоте $\Omega^{(r)}$.

Сказанное проиллюстрировано рис. 2, на котором изображена ветвь корней характеристического уравнения (10), расположенная в верхней полуплоскости комплексной переменной. Здесь длина внешнего резонатора L выбрана равной 100 мм, что соответствует нормированному значению запаздывания $\tau = 2L/(c\tau_r) \approx 0.33$. Кружками изображены корни, рассчитанные численными методами с помощью пакета BIFTOOL [14], а звездочками – в соответствии с разложениями (16) и (17). Видно, что расхождение между результатами расчетов заметно только в области уменьшающихся значений $\text{Im}(\lambda)$, то есть в области, где возможно нарушение одного из использованных приближений $(b/\Omega_p)^2 \ll 1$. Видно также, что при выбранном значении запаздывания τ действительные части корней мало отличаются друг от друга в окрестности

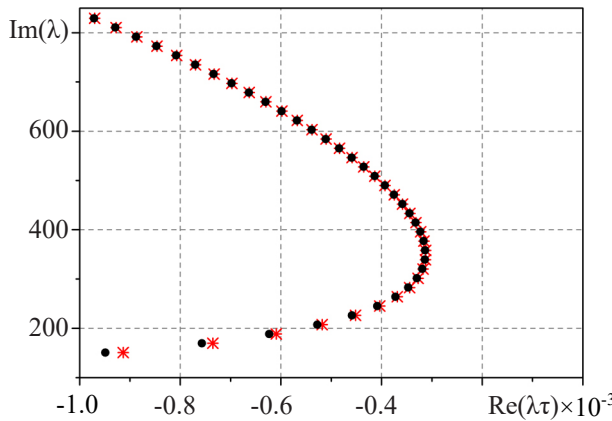


Рис. 2. Корни характеристического уравнения (10). Кружки соответствуют точному численному расчету [14], звездочки – асимптотическому разложению по степеням малого параметра T

Fig. 2. Roots of characteristic equation (10). Circles and stars correspond to exact numerical solution [14] and the expansion by orders of small parameter T , respectively

максимального значения $\text{Re}(\lambda^{(r)})$. Это означает, что затухание отклонений от стационарного состояния происходит в виде релаксационной импульсной последовательности с несущей частотой, приблизительно равной $\Omega^{(r)}$. Для пояснения ниже приводится рис. 3, на котором изображена динамика установления стационарного состояния ПДЛ на всем рассматриваемом интервале времени (а) и на конечном этапе установления (б). Из рис. 3, б следует, что релаксационная импульсная последовательность имеет период следования, приблизительно равный τ ; несущая частота импульсов – около $\Omega^{(r)}$, а длительность импульса в последовательности определяется шириной спектра вблизи этой частоты (см. также рис. 2).

Из анализа уравнения (16) следует, что

$$\Omega^{(r)} = \omega_r \left[\frac{2}{T} \frac{b}{(b-1)} \right]^{1/4} \approx \omega_r \left(\frac{2}{T} \right)^{1/4} \gg b \gg 1 \quad (18)$$

для значений первичной накачки, значительно превышающих порог лазерной генерации. Максимальная величина действительной части корней характеристического уравнения (декремента затухания релаксационной импульсной последовательности) равна

$$\text{Re}(\lambda^{(r)}) = -\frac{T^2}{\tau} \left(\frac{\Omega^{(r)}}{\eta} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\Omega^{(r)}} \right)^2 \right] \approx -\frac{T^2}{\tau} \left(\frac{\Omega^{(r)}}{\eta} \right)^2. \quad (19)$$

Заметим, что в модели с разложением оптических полей по нормальным модам резонатора, ПДЛ с типичными значениями параметров относится, согласно классификации Арекки [17], к лазерам класса А с однородно уширенной линией генерации и поэтому установление стационарного состояния ПДЛ должно происходить адиабатически без релаксационных колебаний. Наша модель с запаздыванием приводит к иной картине установления – через релаксационные колебания, параметры которых определяются соотношениями (18), (19). Справедливости ради, следует подчеркнуть, что в типичных случаях, частота $\Omega^{(r)}/(2\pi)$ составляет величину порядка десятков гигагерц и наблюдение переходного процесса затруднено в силу необходимости использования широкополосного детектора.

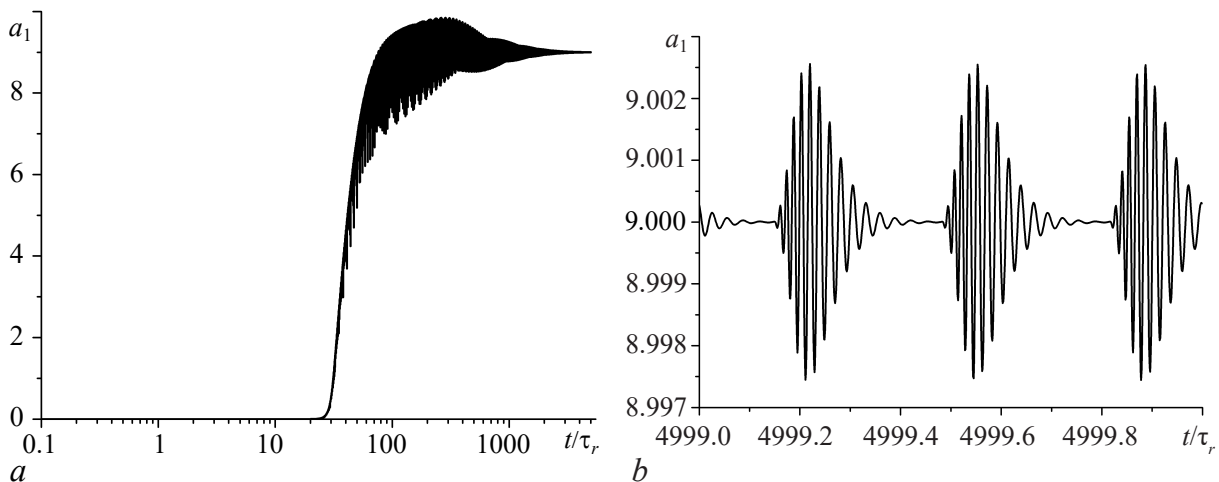


Рис. 3. а – Динамика переходного процесса ВОПГ в допороговом режиме $\sigma < \sigma_{\text{ОРО}}$ во всем рассматриваемом интервале времени. Масштаб по оси абсцисс логарифмический; б – Переходная динамика вблизи конечного значения времени

Fig. 3. а – Transient dynamics of an intracavity OPO under primary pump intensity $\sigma < \sigma_{\text{OPO}}$ over the total time interval in the logarithmic scale; б – Trailing part of the transient dynamics

Обратимся к решениям уравнения (7), которые являются подмножеством решений характеристического уравнения (4) с матрицей $\Delta(\lambda)$, определяемой соотношением (6). Величина $\varepsilon = 2\delta a_{10}$ – малая величина $O(T)$. В разложении до второго порядка малости по ε и T имеем

$$\lambda = \lambda_0 + T\lambda_T + T^2\lambda_{TT} + \varepsilon\lambda_\varepsilon + \varepsilon^2\lambda_{\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon T\lambda_{\varepsilon T} + O(T^3). \quad (20)$$

Применяя процедуру, изложенную выше [15], для мнимой части корней уравнения (7) получим

$$\text{Im}(\lambda) = \Omega_p \left(1 - \frac{T}{\eta\tau}\right). \quad (21)$$

Здесь сохранены только члены первого порядка по T . Действительная часть корней уравнения (7) равна

$$\text{Re}(\lambda) = -\frac{1}{\tau} \left[(T - \varepsilon) \left(1 - \frac{T - \varepsilon}{2}\right) + \frac{T^2}{2} \left(\frac{\Omega_p}{\eta}\right)^2 \right]. \quad (22)$$

Максимальное значение этой функции достигается на действительной оси комплексной плоскости λ , то есть при $\Omega_p = 0$, и составляет

$$\text{Re}(\lambda) = -\frac{1}{\tau} \left[(T - \varepsilon) \left(1 - \frac{T - \varepsilon}{2}\right) \right] \approx -\frac{1}{\tau}(T - \varepsilon). \quad (23)$$

Устойчивость стационарного состояния нарушается, когда в результате роста первичной оптической накачки σ (и, следовательно, количества фотонов в лазерном излучении $a_{10} = \sigma - 1$), величина $\varepsilon = 2\delta a_{10}$ достигает значения T . При этом лазер переходит в режим, когда лазерное излучение сопровождается параметрической вынужденной генерацией.

2.2. Внутррезонаторная параметрическая генерация. Состояние равновесия в режиме параметрической генерации определяется из решения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} G - 1 - 2\delta a_{20}/T &= 0, \\ \sigma - \nu_0 - Ga_{10} &= 0, \\ -1 + 2\delta a_{10}/T &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В этих уравнениях величина первичной накачки $\sigma \geq \sigma_{\text{ОРО}}$, где $\sigma_{\text{ОРО}} = 1 + T/(2\delta)$ – величина накачки на пороге параметрической генерации. Характеристическое уравнение для стационарного состояния (24) таково:

$$\left(\lambda \frac{T}{\eta} + 1 - e^{-\lambda\tau}\right) \left[\left(\lambda \frac{T}{\eta} + 1 - e^{-\lambda\tau}\right) (\lambda + b) + T(b - 1)G \right] + \frac{T^2}{4}(G - 1)(1 + e^{-\lambda\tau})^2(\lambda + b) = 0. \quad (25)$$

Выполняя процедуру, аналогичную описанной в предыдущем разделе, в разложении действительной части корней до второго порядка по T включительно, получим

$$\text{Re}(\lambda) = \frac{T}{2\tau} \left[T \frac{\Omega_p}{\eta} \left(\pm \sqrt{G - 1} - \frac{\Omega_p}{\eta} \right) - \frac{b}{\eta} \left(\frac{\omega_r}{\Omega_p} \right)^2 G \right]. \quad (26)$$

Здесь мы снова полагаем $(b/\Omega_p)^2 \ll 1$ и, кроме того, $\sqrt{G - 1} \gg (b/\Omega_p)^2$. Мнимую часть корней характеристического уравнения можно записать в виде

$$\text{Im}(\lambda) = \Omega_p \left(1 - \frac{T}{\eta\tau}\right) \pm \frac{T}{\tau} \sqrt{G - 1}. \quad (27)$$

Знаки \pm в уравнениях (26), (27) соответствуют двум ветвям корней характеристического уравнения, расположенным в верхней полуплоскости комплексной переменной λ (заметим, что в нижней полуплоскости имеются две дополнительные комплексно-сопряженные ветви). На первой ветви в верхней полуплоскости, которой отвечает знак плюс, действительная часть корней всегда превышает соответствующие значения на второй ветви, которая получается при выборе знака минус в уравнениях (26), (27). Поскольку затухание собственных функций характеристического уравнения происходит, в конечном итоге, со значением декремента, представленным максимальным значением $\text{Re}(\lambda)$, то нас, в первую очередь, будет интересовать поведение первой ветви при изменении параметров динамической системы. Анализ (26) показывает, что действительная часть достигает максимума при выполнении следующего уравнения:

$$x_m^4 - 0.5x_m^3 - A = 0 \quad (28)$$

и равна

$$\text{Re}(\lambda)_{\max} = \frac{3T^2(G-1)}{4\tau} x_m \left(1 - \frac{4}{3}x_m\right). \quad (29)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x_m = \frac{\Omega_{p,\max}}{\eta\sqrt{G-1}}, \quad (30)$$

$$A = \frac{b}{\eta} \left[\frac{\omega_r}{(G-1)\eta} \right]^2 \frac{G}{T} \sim \frac{\sigma/\sigma_{\text{ОРО}}}{(\sigma/\sigma_{\text{ОРО}} - 1)^2}. \quad (31)$$

При $x_m = 3/4$ и, как следует из (28), при $A = 27/256 \approx 0.1055$ максимальное значение $\text{Re}(\lambda)_{\max}$ достигает нуля и исследуемое стационарное состояние теряет устойчивость вследствие бифуркации Андронова–Хопфа. Это происходит при некотором значении первичной накачки $\sigma_{\text{АН}}$. На рис. 4 продемонстрированы обе ветви решений характеристического уравнения, расположенные в верхней комплексной полуплоскости при $\sigma > \sigma_{\text{АН}}$; снова круги изображают решения, полученные точными методами [14], а звездочки – решения, представленные разложениями (26), (27). Совпадение решений хуже, чем на рис. 2, но тоже вполне приемлемое. Точность решений может быть повышена при сохранении порядка разложений в формуле (26) до $O(T^3)$, однако, это вызовет появление более громоздких выражений.

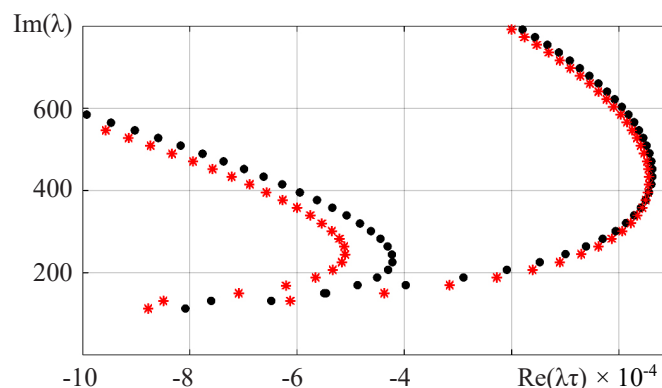


Рис. 4. Корни характеристического уравнения в режиме параметрической генерации. Круги соответствуют точному численному расчету [14], звездочки – асимптотическим разложениям (26), (27)

Fig. 4. Roots of characteristic equation for parametric generation. Circles and stars correspond to exact numerical solution [14] and the expansions, respectively, according to (26), (27)

Заключение

Для оптического параметрического генератора с внутриврезонаторной накачкой полупроводниковым дисковым лазером построены разложения корней характеристического уравнения по степеням малого параметра T для состояний равновесия в двух режимах работы: i) допороговом режиме, то есть при интенсивности первичной оптической накачки, не превышающей пороговое значение параметрической генерации $\sigma_{\text{оро}}$ и ii) при $\sigma > \sigma_{\text{оро}}$.

Для допорогового режима i) показано, что:

- одно из подмножеств решений совпадает с решением характеристического уравнения для обычного ПДЛ (10), рассматриваемого в качестве динамической системы с временным запаздыванием. Поэтому полученные результаты представляют интерес, в том числе, для исследователей лазеров такого типа;
- стационарное состояние ПДЛ является устойчивым при любых значениях параметров;
- относительное изменение величины отклонений от стационарного состояния $1 - \text{Re}(\lambda\tau)$ за время одного обхода по резонатору не зависит от времени этого обхода. Затухание этих отклонений имеет декремент (19) и происходит в виде релаксационной импульсной последовательности с периодом следования, равным времени обхода по резонатору и несущей частотой вблизи $\Omega^{(r)}$ (18).

Для режима параметрической вынужденной генерации ii) установлено, что:

- на комплексной плоскости ($\text{Re}(\lambda\tau)$, $\text{Im}(\lambda\tau)$) имеются две пары комплексно-сопряженных ветвей, представляющих решение характеристического уравнения. Разложения (26), (27) представляют зависимость действительной и мнимой частей этого решения от параметров лазера и накачки;
- максимальное значение декремента собственных функций характеристического уравнения достигает нуля при значении частоты $\Omega_{p,\text{max}} = 0.75\eta\sqrt{G-1}$ и интенсивности первичной накачки $\sigma_{\text{дн}}$, определяемой из (31) при $A = 27/256$.

Библиографический список

1. Faist J., Capasso F., Sivco D.L., Sirtori C., Hutchinson A.L., and Cho A.Y. Quantum cascade laser // Science. 1994. Vol. 264. P. 553–556.
2. Tittel F.K., Richter D., and Fried A. Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. 516 p.
3. He Y., Xu D., Yao J., Wang Y., Guo Y., Zhu X., Yan C., Tang L., Li J., Zhong K., Wu Y., and Yao J. Intracavity-pumped, mid-infrared tandem optical parametric oscillator based on BaGa₄Se₇ crystal // IEEE Phot. Journal. 2019. Vol. 11. 1300109 (10 pp).
4. Das S. Optical parametric oscillator: Status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP₂ crystal pumped by solid state lasers // Optical and Quant. Electronics. 2019. Vol. 51. 70 (47 pp).
5. Deng C. Modeling of self-pumped singly resonant optical parametric oscillator // IEEE Phot. Journal. 2018. Vol. 10. 1502212 (13 pp).
6. Ebrahim-Zadeh M., Kumar S.C., Esteban-Martin A., and Samanta G.K. Breakthroughs in photonics 2012: Breakthroughs in optical parametric oscillators // IEEE Phot. Journal. 2013. Vol. 5. 0700105 (5 pp).
7. Stothard D.J.M., Hopkins J.-M., Burns D., and Dunn M.H. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL) // Optics Express. 2009. Vol. 17. P. 10648–10658.

8. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Kozlovsky V.I., and Okhotnikov O.G. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics // *IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electron.* 2015. Vol. 21. 1603105 (5 pp).
9. Turnbull G.A., Dunn M.H., and Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: An analysis of power characteristics // *Appl. Phys. B.* 1998. Vol. 66. P. 701–710.
10. Debuisschert T., Raffy J., Pocholle J.P., and Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: Study of the dynamics in pulsed regime // *JOSA B.* 1996. Vol. 13. P. 1569–1587.
11. Morozov Y.A. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser // *JOSA B.* 2016. Vol. 33. P. 1470–1475.
12. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Balakin M., Kochkurov L.A., and Konyukhov A.I. Time-delay model of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser // *Phys. Rev. Applied.* 2019. Vol. 11. 044027 (8 pp).
13. Lang R. and Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // *IEEE J. Quantum Electron.* 1980. Vol. 16. P. 347–355.
14. Engelborghs K., Luzyanina T., and Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Transactions on Mathematical Software.* 2002. Vol. 28. P. 1–21.
15. Найфэ А. Введение в методы возмущений. Москва: Наука, 1984. 535 p.
16. Морозов М.Ю., Морозов Ю.А., Красникова И.В. Динамические режимы двухчастотного лазера с вертикальным внешним резонатором // *Радиотехника и электроника.* 2010. Т. 55, вып. 10. С. 1243–1249.
17. Tredicce J.R., Arcetti F.T., Lippi G.L., and Puccioni G.P. Instabilities in lasers with an injected signal // *JOSA B.* 1985. Vol. 2. P. 173–183.

References

1. Faist J., Capasso F., Sivco D.L., Sirtori C., Hutchinson A.L., and Cho A.Y. Quantum cascade laser. *Science*, 1994, vol. 264, pp. 553–556.
2. Tittel F.K., Richter D., and Fried A. *Mid-Infrared Laser Applications in Spectroscopy.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003, 516 p.
3. He Y., Xu D., Yao J., Wang Y., Guo Y., Zhu X., Yan C., Tang L., Li J., Zhong K., Wu Y., and Yao J. Intracavity-pumped, mid-infrared tandem optical parametric oscillator based on BaGa₄Se₇ crystal. *IEEE Phot. Journal*, 2019, vol. 11, 1300109 (10 pp).
4. Das S. Optical parametric oscillator: Status of tunable radiation in mid-IR to IR spectral range based on ZnGeP₂ crystal pumped by solid state lasers. *Optical and Quant. Electronics*, 2019, vol. 51, 70 (47 pp).
5. Deng C. Modeling of self-pumped singly resonant optical parametric oscillator. *IEEE Phot. Journal*, 2018, vol. 10, 1502212 (13 pp).
6. Ebrahim-Zadeh M., Kumar S.C., Esteban-Martin A., and Samanta G.K. Breakthroughs in photonics 2012: Breakthroughs in optical parametric oscillators. *IEEE Phot. Journal*, 2013, vol. 5, 0700105 (5 pp).
7. Stothard D.J.M., Hopkins J.-M., Burns D., and Dunn M.H. Stable, continuous-wave, intracavity, optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser (VECSEL). *Optics Express*, 2009, vol. 17, pp. 10648–10658.

8. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Kozlovsky V.I., and Okhotnikov O.G. Compact intracavity singly-resonant optical parametric oscillator pumped by GaSb-based vertical external cavity surface-emitting laser: Concept and the main operational characteristics. *IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electron.*, 2015, vol. 21, 1603105 (5 pp).
9. Turnbull G.A., Dunn M.H., and Ebrahimzadeh M. Continuous-wave, intracavity optical parametric oscillators: An analysis of power characteristics. *Appl. Phys B*, 1998, vol. 66, pp. 701–710.
10. Debuisschert T., Raffy J., Pocholle J.P., and Papuchon M. Intracavity optical parametric oscillator: Study of the dynamics in pulsed regime. *JOSA B*, 1996, vol. 13, pp. 1569–1587.
11. Morozov Y.A. Transient power characteristics of a compact singly resonant intracavity optical parametric oscillator pumped by a semiconductor disk laser. *JOSA B*, 2016, vol. 33, pp. 1470–1475.
12. Morozov Y.A., Morozov M.Y., Balakin M., Kochkurov L.A., and Konyukhov A.I. Time-delay model of nonlinear frequency down-conversion in the cavity of a semiconductor disk laser. *Phys. Rev. Applied*, 2019, vol. 11, 044027 (8 pp).
13. Lang R. and Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1980, vol. 16, pp. 347–355.
14. Engelborghs K., Luzyanina T., and Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2002, vol. 28, pp. 1–21.
15. Naifeh A. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons, 1981, 535 p.
16. Morozov M.Y., Morozov Y.A., and Krasnikova I.V. Dynamic regimes of the dual-wavelength vertical external cavity surface-emitting laser. *Journ. of Commun. Technology and Electronics*, 2010, vol. 55, pp. 1162–1168.
17. Tredicce J.R., Arecchi F.T., Lippi G.L., and Puccioni G.P. Instabilities in lasers with an injected signal. *JOSA B*, 1985, vol. 2, pp. 173–183.



Морозов Юрий Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

E-mail: yuri.mor@rambler.ru