

## К упрощенному описанию волн в бесстолкновительной плазме\*

А. А. Рухадзе<sup>1</sup>, В. Е. Семенов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр  
Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН  
Россия, 119991 ГСП-1, Москва, ул. Вавилова, 38

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики РАН  
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
*Поступила в редакцию 02.07.2020,  
принята к публикации 02.07.2020, опубликована 30.10.2020*

**Цель** предлагаемой методической заметки – сопоставить развитые А.А. Власовым и Л.Д. Ландау подходы к распространению электромагнитных волн в горячей разреженной плазме. Более полувека назад А.А. Власов и Л.Д. Ландау, используя метод кинетического уравнения, показали, что – в соответствии с принципом причинности – собственные волны равновесной плазмы должны затухать, даже если бинарное взаимодействие частиц пренебрежимо слабо. Однако долгое время близость пионерских теорий А.А. Власова и Л.Д. Ландау представлялась недостаточно очевидной.

Чтобы минимизировать расхождения в подходах к кинетическим эффектам затухания–нарастания волн в бесстолкновительной плазме, данная заметка вместо метода кинетического уравнения предлагает более простой метод – основанный на использовании элементарных уравнений движения электронов. Для однородной плазмы с осесимметричным распределением электронов по невозмущенным скоростям выведен интеграл, пригодный для того, чтобы рассчитать диэлектрическую проницаемость плазмы и, соответственно, получить дисперсионное соотношение для самосогласованной продольной волны. В частности, если скоростное распределение описывается достаточно плавной функцией, то – в соответствии с теорией Л.Д. Ландау – инкремент или декремент волны определяется производной от функции распределения электронов в точке их черенковского синхронизма с волной.

В качестве простейшей модели рассмотрено распространение волны в плазме, где исходное распределение электронов по скоростям описывается функцией Лоренца. Декремент волны в этом случае совпадает с декрементом, который был получен в свое время А.А. Власовым, а при черенковском синхронизме на «хвосте» функции распределения этот декремент имеет величину, которая соответствует асимптотике Л.Д. Ландау.

Таким образом, проведенный анализ подтвердил взаимное согласие теорий А.А. Власова и Л.Д. Ландау.

**Ключевые слова:** бесстолкновительная плазма, черенковский синхронизм, теория Ландау, уравнение Власова.

**Образец цитирования:** Рухадзе А.А., Семенов В.Е. К упрощенному описанию волн в бесстолкновительной плазме // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 5. С. 459–464. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464>

*Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

\*Материалы статьи обсуждались на XVII Международной зимней школе-семинаре по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, Саратов, 5–10 февраля 2018 (*Простакова С.П.* Власов и Ландау – оба они правы // Материалы XVII Международной зимней школы-семинара по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, 5–10 февраля 2018, Саратов. Саратов: ООО «Издательский центр «Наука», 2018. С. 110.).

## On a simplified description of waves in non-collision plasmas

A. A. Rukhadze<sup>1</sup>, V. E. Semenov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center Prokhorov General Physics Institute of the RAS  
38, Vavilova St., 119991, GSP-1, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center Institute of Applied Physics of the RAS  
46, Ul'yanov St., Nizhny Novgorod 603950, Russia

Received 02.07.2020, accepted 02.07.2020, published 30.10.2020

**Aim** of this methodic note is to collate approaches of A.A. Vlasov and L.D. Landau to the propagation of electromagnetic waves in hot rarified plasmas. Over half a century ago, A.A. Vlasov and L.D. Landau used the kinetic equation to show that – in accordance to the causality principle – electromagnetic waves propagating in equilibrium plasmas should decay even if the binary interaction between particles is negligibly weak. However, for a long time, the pioneer theories of A.A. Vlasov and L.D. Landau were regarded as not quite congenial.

To reduce misconceptions in approaches to the kinetic effects at the wave propagation in non-collision plasmas, the paper submitted proposes to duplicate the method of kinetic equation with a simpler method – based on using elementary electron motion equations. The theoretical model represents a homogeneous plasma where the primary distribution of electron velocities is axis-symmetric; the longitudinal electric wave is propagating along this axis. The electron motion equations are used to derive an integral related to the plasma dielectric permittivity which is included into the wave dispersion equation. In particular, if the electron velocity distribution function is sufficiently smooth, the increment or the decrement of the wave is determined with derivative of the primary distribution function at the point of Cherenkov synchronism between electrons and the wave (the asymptotic solution of L.D. Landau).

The simplified approach is illustrated with a wave propagation in a plasma where the electron velocity distribution is approximated with a Lorenz function. In this case, the wave decrement coincides with one obtained in the old paper of A.A. Vlasov; and at the Cherenkov synchronism at the «tail» of the function the wave decrement corresponds to the asymptotic theory of L.D. Landau.

Thus, the simplified analysis has confirmed that the theories of A.A. Vlasov and L.D. Landau are mutually consistent.

*Key words:* non-collision plasmas, Cherenkov synchronism, Landau theory, Vlasov equation.

*Reference:* Rukhadze A.A., Semenov V.E. On a simplified description of waves in non-collision plasmas. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 5, pp. 459–464. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-5-459-464>

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Рассмотрим однородную плазму, в которой исходное скоростное распределение электронов осесимметрично относительно направления  $z$ . Распределение электронов по скоростям  $v$  продольным относительно этого направления будем описывать функцией  $f(v)$  с нормировкой  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1$ , приняв, что в элементе объема  $\Delta V$  находятся  $N(\Delta V)$  частиц. Следуя методологии принципа причинности [1, 2], подействуем на эту плазму продольной электрической волной  $E_z(z, t) = E_0 e^{-i\omega t + ihz}$ , растущей во времени

$$\text{Im } h = 0, \quad h > 0, \quad \text{Im } \omega > 0. \quad (1)$$

При  $t = -\infty$  электрон двигался равномерно с постоянной скоростью  $v$ , а при  $t > -\infty$  к исходной невозмущенной координате  $z^{(0)} = z_0 + vt$  появился добавок  $\Delta z$ , удовлетворяющий уравнению

$$m \frac{\partial^2 \Delta z}{\partial t^2} = -e E_z(z^{(0)}, t), \quad (2)$$

где  $m$  и  $(-e)$  – масса и заряд электрона. В линейном по полю  $E_z$  приближении из уравнения (2) имеем

$$\Delta z = \frac{e E_z(z^{(0)}, t)}{m(\omega - hv)^2}. \quad (3)$$

В окрестности произвольной точки усредним смещения  $\Delta z$  по невозмущенным скоростям электронов

$$\langle \Delta z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f \Delta z dv = \frac{eE_z}{m} Z, \quad (4)$$

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f dv}{(\omega - hv)^2}, \quad (5)$$

откуда для диэлектрической проницаемости плазмы получаем

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2 Z, \quad (6)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^{2N}}{m}. \quad (7)$$

Самосогласованной плазменной волне соответствует дисперсионное уравнение [1, 2]

$$\varepsilon(\omega, h) = 0. \quad (8)$$

В частности, согласно (5)–(8), «холодная» –  $f(v) = \delta(v-0)$  – однородная плазма колеблется с частотой  $\omega = \omega_p$  [1].

Согласно [2], формулы (5), (6) справедливы и при нарушении условия (1), если под интегралом (5) подразумевать его аналитическое продолжение в область с произвольными комплексными частотами  $\omega$ . В частности, если распределение электронов по скоростям описывается достаточно плавной функцией  $f(v)$ , а мнимая составляющая частоты  $\omega$  достаточно мала ( $|\text{Im } \omega| \rightarrow 0$ ) [3], то контур интегрирования в формуле (5) при условии (1) можно деформировать к виду, изображенному на рис. 1. Соответственно

$$Z = -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df/dv}{\omega - hv} dv \rightarrow -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df/dv}{\omega - hv} dv + \frac{i\pi}{h^2} \frac{df}{dv} \Big|_{v=\omega/h}, \quad (9)$$

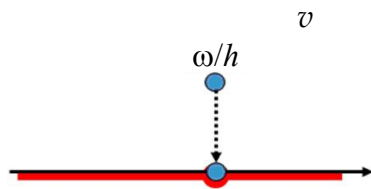


Рис. 1. Контур интегрирования (5) в комплексной плоскости  $v$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow 0$

Fig. 1. The contour of integration (5) in the complex plane  $v$  at  $\text{Im } \omega \rightarrow 0$

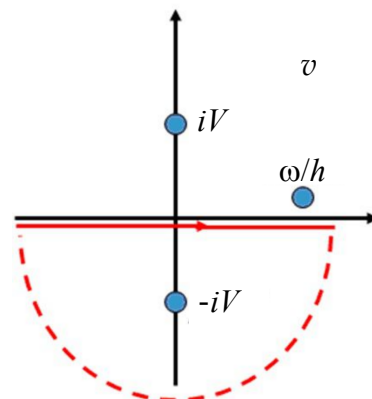


Рис. 2. Контур интегрирования (5) в комплексной плоскости  $v$  для функции распределения (12) при условии (2)

Fig. 2. The contour of integration (5) in the complex plane  $v$  for the distribution function (12) under the condition (2)

где в правой части интеграл берется в смысле главного значения, а второе слагаемое представляет собой поправку относительно точки черенковского синхронизма [3]. В частности, если черенковский синхронизм имеет место на «хвосте» скоростного распределения электронов, то

$$Z \rightarrow \frac{1}{\omega^2} + \frac{i\pi}{h^2} \frac{df}{dv} \Big|_{v=\omega/h} \quad (10)$$

и дисперсионное уравнение (8) сводится к виду

$$\omega \approx \omega_p + i \frac{\pi \omega_p^3}{2h^2} \frac{df}{dv} \Big|_{v=\omega/h}. \quad (11)$$

В статье [4] распределение электронов по скоростям в равновесной плазме было аппроксимировано лоренцевой функцией

$$f(v) = \frac{V}{\pi(v^2 + V^2)}, \quad (12)$$

где  $V$  – средняя величина скорости электрона. В этом случае интегрирование (5) можно дополнить интегрированием по бесконечной полуокружности в комплексной плоскости  $v$  – как это показано на рис. 1, и поскольку функция (12) имеет вычет в полюсе  $v = -i/V$ , из (5) получаем

$$Z = \frac{1}{(\omega + ihV)^2}, \quad (13)$$

и из дисперсионного уравнения (8) – в согласии с [4] – имеем

$$\omega = \pm \omega_p - ihV. \quad (14)$$

В пределе, когда черенковский синхронизм  $\omega = hv$  имеет место на «хвосте» лоренцева распределения (12), можно надеяться, что дисперсионное соотношение (14) совпадет с (11). И действительно, поскольку в этой асимптотике

$$\frac{df}{dv} \Big|_{v=\omega/h} \rightarrow -\frac{2V}{\pi} \frac{h^3}{\omega_p^3}, \quad (15)$$

то (11) стремится к (14) – подходы [3] и [4] оказываются во взаимном согласии\*.

### Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
2. Лифшиц Е.М., Питаевский Л. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2001.
3. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 524.
4. Власов А.А. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения // Ученые записки МГУ им. М.В. Ломоносова. Физика. 1945, № 75.
5. Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. Пер. с англ. под ред. Е.А. Кузнецова. М.: Физматлит, 2005. 478 с.

\*Примечание рецензента. В дополнение к [4], дисперсионное уравнение (14) для плазмы с лоренцевой функцией распределения (12) было получено – методом кинетического уравнения – в книге [5]. Дефектом функции (12) является расходимость энергетического интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dv$ ; но, как говорил в свое время А.А. Рухадзе, этот дефект легко устранить занулением функции  $f(v)$  при  $v > \bar{v}$ , где  $\bar{v}$  – достаточно большая величина – тогда из (5)–(8) получается частота  $\omega = \pm \omega_p(1 - \delta) - ihV$ , которая при  $\delta = \frac{\omega_p^2 V}{3\pi h^2 \bar{v}^3} \ll 1$  мало отличается от (14).



*Рухадзе Анри Амвросиевич* – родился в Тифлисе, ныне Тбилиси (1930). Среднюю школу в Тбилиси окончил с золотой медалью. В 1948 году поступил на физико-технический факультет МГУ. В связи с упразднением физико-технического факультета в 1951 году был переведён в Московский инженерно-физический институт (МИФИ), который с отличием окончил в 1954 году. С 1954 по 1957 год обучался в аспирантуре ФИАНа (научный руководитель И.Е. Тамм). В 1958 году защитил кандидатскую диссертацию, а в 1964 – докторскую. С 1971 года – профессор. Дважды лауреат Государственных премий и премии им. М.В. Ломоносова МГУ. Автор более 600 опубликованных работ, в том числе более 55 обзоров и 14 монографий. Подготовил 66 кандидатов и 32 доктора наук. Умер 7 марта 2018 года. Научные интересы: электродинамика материальных сред, физика плазмы, кинетическая теория плазмы и газов, квантовая кинетика, физическая электроника, физика релятивистских сильноточных электронных пучков.

Россия, 119991 ГСП-1, Москва, ул. Вавилова, 38  
Институт общей физики имени А.М. Прохорова РАН



*Семёнов Владимир Евгеньевич* – родился в Горьком, ныне Нижний Новгород (1952). Окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского по специальности радиофизика (1975). В 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию (руководитель профессор В.Б. Гильденбург). С 1998 г. доктор физико-математических наук, тема диссертации «Плазма газового разряда, создаваемого микроволновым излучением». Доцент (1983–1999), профессор (1999–2013) Горьковского политехнического института (НГТУ). С 1977 г. на научной работе в ИПФ АН СССР (ИПФ РАН): инженер (1977–1979), младший научный сотрудник (1979–1985), старший научный сотрудник (1985–1996), ведущий научный сотрудник (1996–1999), заведующий сектором (1999–2000), заведующий отделом физики плазмы (2000–2017). Опубликовал более 300 научных работ. Умер 13 октября 2017 года. Научные интересы: физика плазмы, нелинейные волны, микроволновый разряд в газах и вакууме, газодинамика и аэродинамика, микроволновая обработка материалов.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН