Бифуркации в динамических системах
Квантовый хаос. Детерминированный

УДК 532.54:51-72 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642

Численное исследование динамической системы, порождаемой CABC векторным полем

В. Н. Говорухин

Южный федеральный университет
Россия, 344022 Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru
Поступила в редакцию 07.05.2020,
принята к публикации 09.09.2020, опубликована 30.11.2020

Цель настоящего исследования состоит в построении винтового векторного поля и анализе порождаемой им динамической системы. Классическим примером такого поля является ABC (Arnold–Beltrami–Childress, Арнольд–Бельтрами–Чилдресс) течение, являющееся стационарным решением уравнений динамики идеальной несжимаемой жидкости. В статье численно изучается структура фазового пространства динамической системы, определяемой построенным векторным полем при различных предположениях. **Методы.** При построении динамической системы использован подход, предложенный для винтовых полей из класса CABC-течений (Compressible ABC). Основным инструментом изучения является численный анализ на основе построения и исследования отображения Пуанкаре. Для численного решения задачи Коши используется метод Рунге–Кутты 8-го порядка точности с постоянным шагом. **Результаты.** Для нового примера винтового векторного поля даны аналитические выражения его компонент, изучена структура фазового пространства порождённой им трёхмерной нелинейной динамической системы. Рассмотрены интегрируемый случай и два типа его возмущения, названных «сжимаемыми» и «несжимаемыми». Показано, что фазовое пространство в присутствии возмущений первого типа состоит из стационарных, периодических и квазипериодических траекторий, но имеет сложную структуру – в отображении Пуанкаре имеется множество седловых особых точек и периодических орбит, разделённых переплетением сепаратрис. При «несжимаемом» возмущении развитие динамики происходит согласно сценариям КАМ-теории с возникновением хаотических областей. **Заключение.** В работе представлен новый пример винтового векторного поля, которое при дополнительных условиях на параметры превращается в известное ABC-течение. Обнаруженную в результате вычислений сложную структуру фазового пространства можно интерпретировать как переходную от интегрируемой к неинтегрируемой, несмотря на отсутствие хаотических траекторий.

Ключевые слова: ABC-течение, хаос, винтовые течения, консервативная нелинейная динамика.

Образец цитирования: Говорухин В.Н. Численное исследование динамической системы, порождаемой CABC векторным полем // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 633–642. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Финансовая поддержка. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19-29-06013\19.

© *Говорухин В.Н., 2020*

https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642

Numerical study of dynamical system generated by CABC vector field

V. N. Govorukhin

Southern Federal University
8a, Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru
Received 07.05.2020, accepted 09.09.2020, published 30.11.2020

Purpose of this study is to construct a helical vector field and analyze the dynamical system generated by it. Classic example of such field is the ABC (Arnold–Beltrami–Childress) flow, which is equations stationary solution of the dynamics of ideal incompressible fluid. The article numerically studies the structure of the phase space of a dynamical system determined by the constructed vector field under various assumptions. **Methods.** When constructing a dynamic system, the approach proposed for helical fields from the class of CABC (Compressible ABC) flows was used. Main research tool is numerical analysis based on the construction and study of Poincare map. For numerical solution of the Cauchy problem, the Runge–Kutta method of the 8th order of accuracy with a constant step is used. **Results.** For a new example of a helical vector field, analytical expressions are given for its components, and the structure of the phase space of a three-dimensional nonlinear dynamic system generated by it is studied. The integrable case and two types of its perturbation, called «compressible» and «incompressible», are considered. It is shown that the phase space in the presence of perturbations of the first type consists of stationary, periodic, and quasiperiodic trajectories, but has a complex structure – the Poincaré map contains a set of saddle singular points and periodic orbits separated by intertwining separatrices. In the case of «incompressible» perturbation, the dynamics develop according to the scenarios of the KAM theory with the appearance of chaotic regions. **Conclusion.** The paper presents a new example of a helical vector field, which, under additional conditions on the parameters, turns into a well-known ABC flow. The complex structure of the phase space discovered as a result of calculations can be interpreted as transitional from integrable to non-integrable, despite the absence of chaotic trajectories.

Key words: ABC flow, chaos, helical flows, conservative nonlinear dynamics.

Reference: Govorukhin V.N. Numerical study of dynamical system generated by CABC vector field. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 633–642. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-29-06013\19.

Введение

Модельные векторные поля, имеющие аналитические математические выражения для компонент, являются важным инструментом для изучения свойств переноса и лагранжевой динамики в непрерывных средах. Одним из известных классов таких модельных полей являются винтовые (спиральные), которые удовлетворяют условию

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \kappa \vec{v}, \tag{1}$$

где κ – некоторая непрерывная функция координат, которую называют спиральностью. К винтовым векторным полям относится ABC (Arnold–Beltrami–Childress) течение [1, 2], являющееся частным решением уравнений Эйлера динамики идеальной несжимаемой жидкости. Большой интерес к этому примеру вызван тем, что, несмотря на стационарность его векторного поля, порождаемая ABC-течением лагранжева динамика может демонстрировать сложное хаотическое поведение [3]. Это модельное течение использовалось для исследования турбулентности [4], магнитной гидродинамики [5, 6], анализа сценариев хаотизации [7], а также для разработки и тестирования аналитических и численных методов анализа трехмерных задач математической физики [8, 9].

В [10] было предложено семейство винтовых векторных полей в R^3 с координатами x, y, z, названное CABC-течением (Compressible ABC). При их построении в предположении, что

$\kappa = \kappa(z)$, то есть зависит от одной координаты, были найдены аналитические выражения компонент векторного поля. Для уравнения переноса на основе САВС-течений показано [11] существование локальной гамильтоновой формы. Это позволяет применить КАМ-теорию (Колмогорова–Арнольда–Мозера) при анализе этих динамических систем. В частности, согласно КАМ-теории, в них можно предположить адвекцию с хаотическими траекториями и существование островов, которые изолированы от стохастического моря и заполнены инвариантными кривыми. Гамильтонов тип хаоса означает отсутствие странных аттракторов у динамических систем на основе САВС-полей.

В [11] приведен и численно исследован конкретный пример САВС-течения. Было показано, что фазовое пространство, определяемое его векторным полем, имеет сложную структуру, а соответствующая динамическая система демонстрирует нетривиальное поведение. В частности, была обнаружена динамика, которую можно трактовать как переходную от квазистационарной к хаотической, а также сильная хаотизация при малых возмущениях параметров. В представленной работе дан новый пример винтового векторного поля из класса САВС-течений и проведён численный анализ соответствующей ему динамической системы. Целями исследования является изучение возможных нелинейных явлений в динамике системы и их зависимость от различных параметров.

1. Пример винтового векторного поля из класса САВС

Общий вид компонент вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ в R^3 для САВС-поля, предложенного в [10], имеет вид

$$\begin{aligned} v_x &= U_x + \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} + W(\zeta)\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y}, \\ v_y &= U_y + \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} - W(\zeta)\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x}, \\ v_z &= \frac{\lambda W(\zeta)\psi(x,y)}{\kappa(\zeta)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\psi(x,y)$ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \lambda\psi, \tag{3}$$

то есть ψ является собственной функцией оператора в левой части (3), а λ – соответствующее собственное значение. Переменная ζ связана с переменной z уравнением

$$\frac{d\zeta}{dz} = \kappa(\zeta). \tag{4}$$

Вектор-функция $\vec{U} = (U_x, U_y, 0)$ удовлетворяет условию (1), а функция $W(\zeta)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 W(\zeta)}{d\zeta^2} + \left(1 - \frac{1}{\kappa(\zeta)^2}\right) W(\zeta) = 0. \tag{5}$$

Для построения примера САВС-поля зададим функцию $\psi(x,y)$

$$\psi(x,y) = B\cos x + C\sin y, \tag{6}$$

где A, B – параметры. Очевидно, что (6) удовлетворяет уравнению (3) с величиной $\lambda = 1$. Для компонент вектор-функции $\vec{U}$ выберем выражения, содержащие параметры b_1 и b_2

$$U_x = b_1 \cos\zeta + b_2 \sin\zeta, \quad U_y = -b_1 \sin\zeta + b_2 \cos\zeta. \tag{7}$$

При таком определении компонент вектор $\vec{U}$ удовлетворяет (1), что проверяется подстановкой (7) в (1). Пользуясь произволом в выборе функции $W(\zeta)$, определим ее как функцию с параметрами a_1 и a_2

$$W(\zeta) = 1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta. \tag{8}$$

После подстановки (8) в уравнение (5) получим $\kappa(\zeta)$

$$\kappa(\zeta) = \sqrt{1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta}. \tag{9}$$

В результате, используя все сделанные предположения и подставляя построенные функции (6)–(9) в (2), получим пример винтового сжимаемого векторного поля

$$\begin{aligned} v_x &= b_1 \cos\zeta + b_2 \sin\zeta + \\ &\quad + B\left(a_1 \sin\zeta - a_2 \cos\zeta\right) \sin x + C\left(1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta\right) \cos y, \\ v_y &= -b_1 \sin\zeta + b_2 \cos\zeta + \\ &\quad + C\left(a_2 \cos\zeta - a_1 \sin\zeta\right) \cos y + B\left(1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta\right) \sin x, \\ v_z &= \frac{1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta}{\sqrt{1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta}} \left(B \cos x + C \sin y\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка вектора скорости (10) в (1) с учетом (4) дает тождество. Это означает, что поле скорости (10) является винтовым со спиральностью вида (9). Кроме того, дивергенция поля (10) по переменным x, y, z с учётом (4) и (9) имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(a_2 \cos\zeta - a_1 \sin\zeta\right)\left(B \cos x + C \sin y\right)/2. \tag{11}$$

Правая часть выражения (11) тождественно обращается в нуль только при $a_1 = a_2 = 0$.

Далее исследуем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамику частиц жидкости в поле скорости (10). Заметим, что v_x, v_y, v_z являются периодическими функциями по переменным x, y, ζ с периодом 2π, что позволяет изучать структуру фазового пространства и динамику системы на трёхмерном торе $T^3 : [-\pi, \pi]^3$. Однако для исследования адвекции жидкости необходимо рассматривать все пространство R^3, что будет предметом рассмотрения в следующих работах.

В силу условия положительности спиральности из (9) следует ограничение на параметры a_1, a_2 – подкоренное выражение в (9) должно быть больше нуля. В переменных x, y, ζ система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая адвекцию частиц жидкости в поле скорости (10), принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= b_1 \cos\zeta + b_2 \sin\zeta + \\ &\quad + B\left(a_1 \sin\zeta - a_2 \cos\zeta\right) \sin x + C\left(1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta\right) \cos y, \\ \dot{y} &= -b_1 \sin\zeta + b_2 \cos\zeta + \\ &\quad + C\left(a_2 \cos\zeta - a_1 \sin\zeta\right) \cos y + B\left(1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta\right) \sin x, \\ \dot{\zeta} &= \left(1 + a_1 \cos\zeta + a_2 \sin\zeta\right)\left(B \cos x + C \sin y\right). \end{aligned} \tag{12}$$

При $b_1 = a_1 = a_2 = 0$, $b_2 = A$ спиральность $\kappa = 1$, $\zeta \equiv z$, а поле (12) совпадает со ставшим классическим ABC-течением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\sin\zeta + C\cos y, \\ \dot{y} &= A\cos\zeta + B\sin x, \\ \dot{\zeta} &= B\cos x + C\sin y. \end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) была предметом многих исследований. Начиная с работы [3], большое внимание уделялось возникновению и анализу хаотизации динамики [12,13], поиску и анализу особых точек [14], а также условиям интегрируемости [12,15,16]. Известно, что при $A = 0$ система (13) представима в форме

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{\zeta} = H, \quad H = B\cos x + C\sin y. \tag{14}$$

В (14) первые два уравнения образуют независимую гамильтонову систему, что означает интегрируемость системы (12) при $b_1 = b_2 = a_1 = a_2 = 0$. Далее будем изучать поведение системы (12), исследуя возмущения этого интегрируемого случая.

2. Исследование динамической системы

Система (12) содержит шесть параметров, что делает сложным ее полный анализ. В данной работе ограничимся рассмотрением случая $b_1 = b_2 = \varepsilon \geqslant 0$, $a_1 = a_2 = \delta \geqslant 0$. Правую часть (12) можно представить в виде суммы трех векторов $\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{V_\varepsilon} + \vec{V_\delta}$, где

$$\vec{V_0} = (C\cos y;\ B\sin x;\ B\cos x + C\sin y)\,, \tag{15}$$

$$\vec{V_\varepsilon} = \varepsilon\,(\cos\zeta + \sin\zeta;\ \cos\zeta - \sin\zeta;\ 0)\,, \tag{16}$$

$$\vec{V_\delta} = \delta \begin{pmatrix} B\,(\sin\zeta - \cos\zeta)\sin x + C\,(\cos\zeta + \sin\zeta)\cos y \\ C\,(\cos\zeta - \sin\zeta)\cos y + B\,(\cos\zeta + \sin\zeta)\sin x \\ (\cos\zeta + \sin\zeta)\,(B\cos x + C\sin y) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Векторное поле $\vec{V_0}$ соответствует интегрируемому случаю, см. (13) и (14) и $\operatorname{div}\vec{V_0} \equiv 0$. Дивергенция векторного поля $\vec{V_\varepsilon}$ по переменным x, y, z также тождественно равна нулю. Поэтому далее $\vec{V_\varepsilon}$ будем называть «несжимаемым» возмущением интегрируемого случая с параметром ε, а поле $\vec{V_\delta}$ – «сжимаемым», с параметром δ, так как $\operatorname{div}\vec{V_\delta} \not\equiv 0$. Для сравнения двух видов возмущений введём интегральные характеристики двух возмущений

$$\gamma_\varepsilon = \iiint_{-\pi}^{\pi} \left\|\vec{V_\varepsilon}\right\| dx\,dy\,d\zeta, \quad \gamma_\delta = \iiint_{-\pi}^{\pi} \left\|\vec{V_\delta}\right\| dx\,dy\,d\zeta.$$

Ниже приводятся результаты вычислений для значений параметров ε и δ, соответствующих одинаковым значениям γ_ε и γ_δ.

Исследование системы (12) требует вычислительного анализа, так как в неинтегрируемом случае динамика может быть хаотической, что делает затруднительным применение аналитических методов. В качестве основного инструмента исследования здесь используется анализ отображения Пуанкаре, порождаемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений (12). Для численного решения задачи Коши использовался метод Рунге–Кутты 8-го порядка точности с постоянным шагом. Выбор метода обусловлен необходимостью сохранения инвариантов задачи

с высокой точностью. Недостаточная точность, как и применение алгоритмов автоматического контроля и выбора шага метода, может приводить к качественно неправильным результатам, особенно при анализе консервативных систем. В расчетах использовался шаг по времени $h = 0.01$, что гарантирует вычисления практически с машинной точностью. В качестве секущей Пуанкаре во всех представленных ниже расчетах использовалась плоскость $\zeta = 0$. Для уточнения пересечения траекторий с секущей плоскостью применялся метод Ньютона с точностью 10^{-8}.

Исследование системы начнем при значениях параметров $\varepsilon = \delta = 0$ когда динамика определяется векторным полем $\vec{V_0}$. В первую очередь рассмотрим случай $C = B$, который будем называть симметричным. Равновесия системы (12) в T^3 при перечисленных условиях составляют прямые с параметризацией ζ вида:

$$\left\{x = -\pi;\, y = \frac{\pi}{2};\, \zeta\right\}, \quad \left\{x = 0;\, y = -\frac{\pi}{2};\, \zeta\right\}, \quad \left\{x = \pi;\, y = \frac{\pi}{2};\, \zeta\right\}. \tag{18}$$

Все равновесия семейств (18) при $\varepsilon = \delta = 0$, $C = B$ имеют одинаковый спектр $\sigma = \{-B, 0, B\}$, то есть являются седловыми. Таким образом, фазовыми траекториями в симметричном интегрируемом случае являются равновесия (18), соединяющие их сепаратрисы, инвариантные прямые $\{x = -\pi;\, y = -\pi/2;\, \zeta\}$, $\{x = 0;\, y = \pi/2;\, \zeta\}$, $\{x = \pi;\, y = -\pi/2;\, \zeta\}$, а все остальные траектории являются инвариантными торами. Структура фазового пространства видна на рис. 1, *a*, где даны результаты численного построения отображения Пуанкаре при ε=δ=0. Особым (неподвижным) точкам отображения соответствуют равновесия однопараметрических семейств (18) и инвариантные прямые.

При наличии «несжимаемого» возмущения, то есть при малом $\varepsilon \neq 0$, $\delta = 0$, прямые из равновесий разрушаются, остаются равновесия, принадлежащие плоскостям $\zeta = \pm k\pi/2$, $k = 1, 2, \ldots$, причем спектр равновесий изменяется, но все они остаются неустойчивыми. Наличие несжимаемого возмущения приводит к неинтегрируемой динамике, в частности, возникают хаотические области. Согласно КАМ-теории, эти области возникают в результате распада сепаратрис седловых режимов при малом возмущении интегрируемого случая. Большинство же квазипериодических режимов сохраняются. Размер хаотических областей увеличивается с ростом возмущения ε, см. рис. 2. Видно, что с увеличением ε зоны регулярной и хаотической динамики деформируются, хаотические области сливаются в стохастическое море.

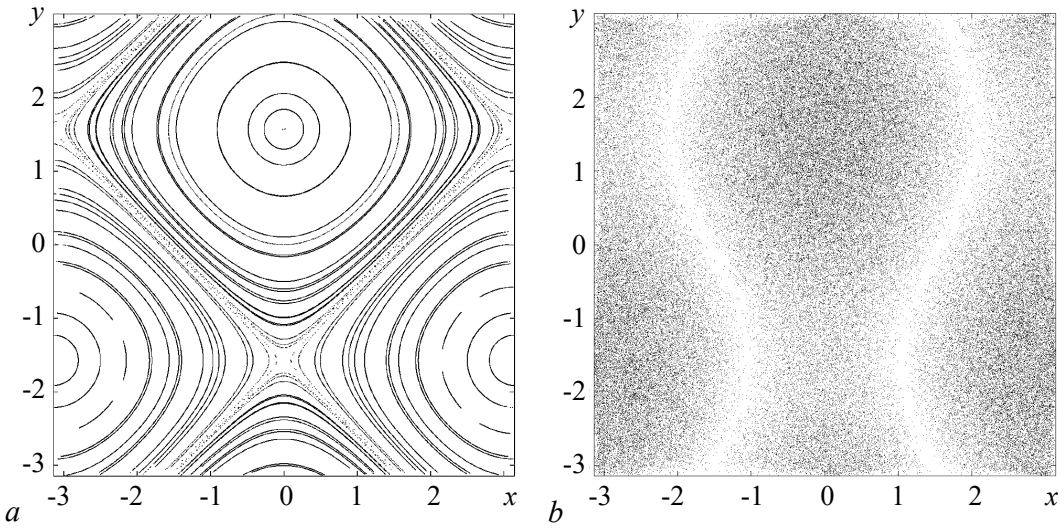


Рис. 1. Отображение Пуанкаре на плоскости $\zeta = 0$. B=C=2, $\varepsilon = \delta = 0$ (*a*); $B = 1$, $C = 2$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0.7$ (*b*)

Fig. 1. Poincare map on the plane $\zeta = 0$. $B = C = 2$, $\varepsilon = \delta = 0$ (*a*); $B = 1$, $C = 2$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0.7$ (*b*)

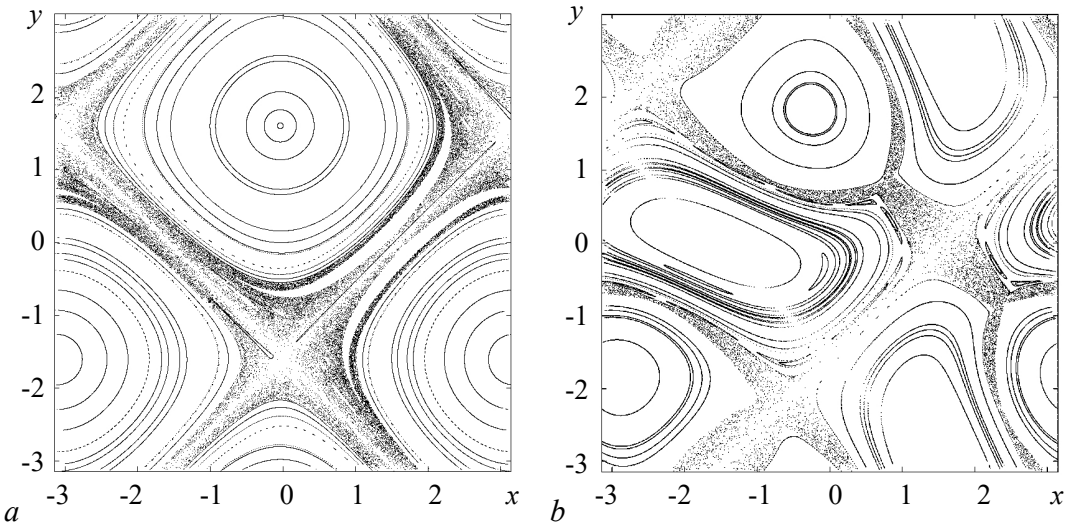


Рис. 2. Отображение Пуанкаре на плоскости $\zeta = 0$. $B = C = 2$, $\delta = 0$; $\varepsilon = 0.2057$ (a), $\varepsilon = 1.4751$ (b)

Fig. 2. Poincare map on the plane $\zeta = 0$. $B = C = 2$, $\delta = 0$; $\varepsilon = 0.2057$ (a), $\varepsilon = 1.4751$ (b)

Для $\varepsilon = 0$, $\delta \neq 0$ («сжимаемое возмущение») и $C = B$ структура фазового пространства качественно отличается от случая «несжимаемого» возмущения. Семейства равновесий (18) сохраняются, но спектр их устойчивости меняется и приобретает вид

$$\sigma = \left\{ -B\sqrt{1 + 2\delta(\delta + \sin\zeta + \cos\zeta)};\ 0;\ B\sqrt{1 + 2\delta(\delta + \sin\zeta + \cos\zeta)} \right\}.$$

И в этом случае все равновесия являются седловыми, но собственные числа зависят от переменной ζ, которая здесь выступает как параметр семейства равновесий. Переменность спектра свидетельствует о том, что эти прямые из равновесий не могут быть результатом действия непрерывной группы симметрий [17]. Их причиной может быть наличие косимметрии.

Отображения Пуанкаре для этого случая при $C = B = 2$ изображены на рис. 3. Видно, что хаотические области не возникают, но имеет место сильная перестройка фазового пространства

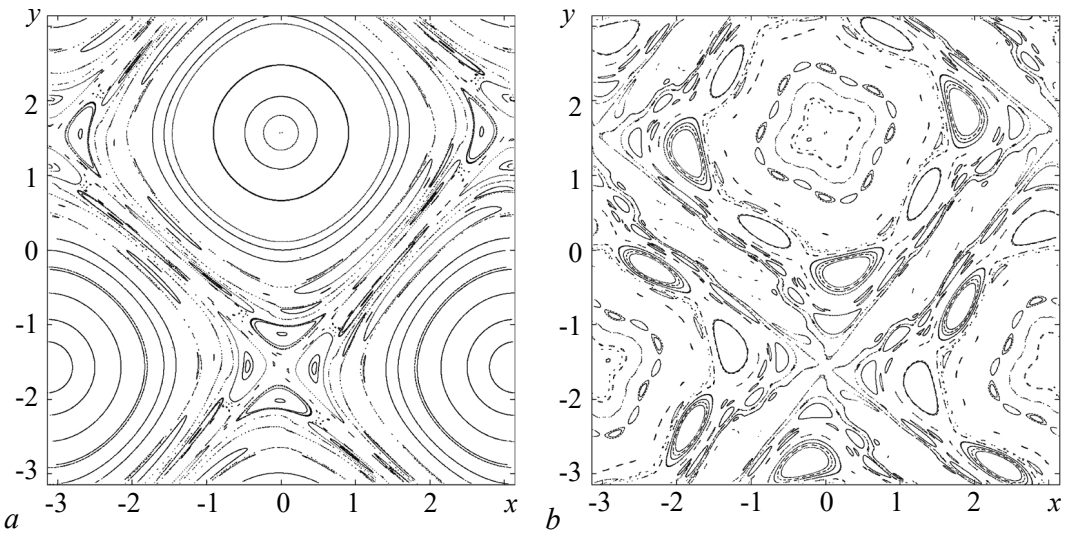


Рис. 3. Отображение Пуанкаре на плоскости $\zeta = 0$. $B = C = 2$, $\varepsilon = 0$; $\delta = 0.1$ (a), $\delta = 0.7$ (b)

Fig. 3. Poincare map on the plane $\zeta = 0$. $B = C = 2$, $\varepsilon = 0$; $\delta = 0.1$ (a), $\delta = 0.7$ (b)

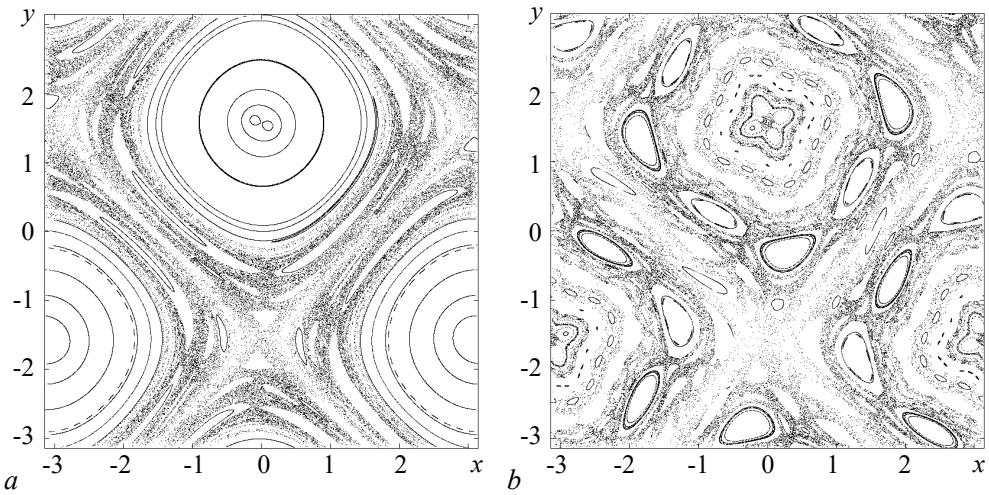


Рис. 4. Отображение Пуанкаре на плоскости $\zeta = 0$. $B = 1.9$, $C = 2$, $\varepsilon = 0$; $\delta = 0.1$ (a), $\delta = 0.7$ (b)

Fig. 4. Poincare map on the plane $\zeta = 0$. $B = 1.9$, $C = 2$, $\varepsilon = 0$; $\delta = 0.1$ (a), $\delta = 0.7$ (b)

в результате возникновения сложных квазипериодических траекторий. С ростом δ области со сложной динамикой увеличиваются. В отображении Пуанкаре имеется большое число седловых особых точек (им соответствуют периодические траектории в T^3), а их сепаратрисы разделяют области квазипериодических движений. С помощью алгоритма поиска неподвижных точек отображения Пуанкаре в T^3 для этого случая были найдены эллиптические и седловые неподвижные точки вплоть до кратности 200. Есть основания предполагать, что существуют периодические режимы и более высокой кратности, возможно их счётное множество. Такое поведение системы качественно совпадает с результатами исследования другого примера CABC-течения в симметричном случае, см. [11].

Нарушение соотношения параметров C и B ($C \neq B$) (будем называть его нарушением дискретной симметрии) приводит к хаотизации динамики и в «сжимаемом» случае, см. рис. 4. При этом хаотические области возникают в окрестности всех сепаратрис, имеющихся в симметричном случае $C = B$, что объясняет их больший размер по сравнению с «несжимаемым» возмущением. Дальнейшее увеличение разности между параметрами B и C, то есть нарушение дискретной симметрии, приводит к разрушению всех квазипериодических движений и полной хаотизации динамики. Например, при $B = 1, C = 2$ вся плоскость отображения Пуанкаре заполнена хаотическим морем, см. рис. 1, b.

3. Заключение

В работе представлен новый пример винтового векторного поля из класса CABC-течений. При некоторых условиях на параметры это поле превращается в известное ABC-течение, которое является стационарным решением уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости. Проведён численный анализ порождённой построенным CABC-полем динамической системы. Рассмотрены два типа возмущений интегрируемого случая – сохраняющее и нарушающее несжимаемость векторного поля. Оказалось, что фазовое пространство при наличии дискретной симметрии у динамической системы в этих двух ситуациях принципиально отличается. При «сжимаемом» возмущении обнаружены только стационарные, периодические и квазипериодические траектории. Структура фазового пространства при этом сложна, в отображении Пуанкаре имеется множество (возможно, счётное) седловых и эллиптических особых точек, разделённых переплетением сепаратрис. Такую сложную организацию фазового пространства можно трактовать как переходную от интегрируемой к неинтегрируемой, несмотря на отсутствие хаотических траекторий. Сохра-

няющие несжимаемость возмущения приводят к возникновению хаотических областей по сценарию КАМ-теории. Нарушение симметрии, наоборот, приводит к большей хаотизации динамики в «сжимаемом» случае, что объясняется распадом множества сепаратрис седловых стационарных и периодических режимов.

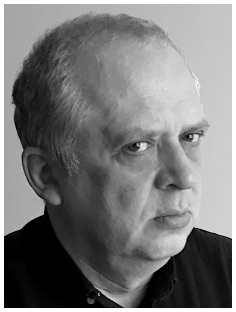
Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемая построенным винтовым векторным САВС-полем, является динамической системой с очень нетривиальной динамикой, и ее дальнейшее изучение интересно само по себе. Можно ожидать необычных явлений при изучении переноса в поле скорости САВС-поля во всем пространстве, нестандартных сценариев формирования стохастических областей и хаотической диффузии.

Библиографический список

1. *Arnold V.I.* Sur topologie des ecoulements stationaires des fluides parfaits // C.R. Acad. Sci. Paris. 1965. Vol. 261. P. 17–20.
2. *Childress S.* New solutions of the kinematic dynamo problem // J. Math.Phys. 1970. Vol. 11. P. 3063–3076.
3. *Dombre T., Frisch U., Greene J.M., Henon M., Mehr A., Soward A.M.* Chaotic streamline and Lagrangian turbulence: The ABC-flows // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 167. P. 353–391.
4. *Rorai C., Rosenberg D., Pouquet A., Mininni P.D.* Helicity dynamics in stratified turbulence in the absence of forcing // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2013. Vol. 87, no. 6. Art. № 063007.
5. *Moffatt H.K.* Magnetostatic equilibria and analogous euler flows of arbitrarily complex topology. Part 2. Stability considerations // Journal of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 166. P. 359–378.
6. *Tomin D., Sokoloff D.* Dynamo in fluctuating ABC flow // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. 2010. Vol. 104, no. 2–3. P. 183–188.
7. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 236 с.
8. *Sulman M.H.M., Huntley H.S., Lipphardt B.L., Kirwan A.D.* Leaving flatland: Diagnostics for Lagrangian coherent structures in three-dimensional flows // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2013. Vol. 258. P. 77–92.
9. *Blazevski D., Haller G.* Hyperbolic and elliptic transport barriers in three-dimensional unsteady flows // Physica D. 2014. Vol. 273–274. P. 46–62.
10. *Morgulis A., Yudovich V.I. and Zaslavsky G.M.* Compressible helical flows // Comm. on Pure and Applied Math. 1995. Vol. XLVIII. P. 571–582.
11. *Govorukhin V.N., Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M.* Chaotic advection in compressible helical flow // Physical Review E. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798.
12. *Xiao-Hua Zhao, Keng-Huat Kwek, Ji-Bin Li, Ke-Lei Huang.* Chaotic and Resonant Stream-lines in the ABC Flow // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1993. Vol. 53, no. 1. P. 71–77.
13. *Didov A.A., Uleysky M.Y.* Nonlinear resonances in the ABC-flow // Chaos. 2018. Vol. 28, no. 1. Art. no. 013123.
14. *Ershkov S.V.* About existence of stationary points for the Arnold–Beltrami–Childress (ABC) flow. Applied Mathematics and Computation. 2016. Vol. 276. P. 379–383.
15. *Зиглин С.Л.* Аналитическое доказательство неинтегрируемости ABC-течения при $A=B=C$ // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 77–80.
16. *Llibre J., Valls C.* A note on the first integrals of the ABC system // Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 53, no. 2. Art. no. 023505.
17. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 402–411.

References

1. Arnold V.I. Sur topologie des ecoulements stationaires des fluides parfaits. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, pp. 17–20.
2. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem. *J. Math.Phys.*, 1970, vol. 11, pp. 3063–3076.
3. Dombre T., Frisch U., Greene J.M., Henon M., Mehr A., Soward A.M. Chaotic streamline and Lagrangian turbulence: The ABC-flows. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 167, pp. 353–391.
4. Rorai C., Rosenberg D., Pouquet A., Mininni P.D. Helicity dynamics in stratified turbulence in the absence of forcing. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no. 6, Art. no. 063007.
5. Moffatt H.K. Magnetostatic equilibria and analogous euler flows of arbitrarily complex topology. Part 2. Stability considerations. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 166, pp. 359–378.
6. Tomin D., Sokoloff D. Dynamo in fluctuating ABC flow. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 2010, vol. 104, no. 2–3, pp. 183–188.
7. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chemikov A.A. Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns. Cambridge: Cambridge University Press, 1991, 265 pp.
8. Sulman M., Huntley H., Lipphardt B., Kirwan A. Leaving flatland: Diagnostics for Lagrangian coherent structures in three-dimensional flows. *Physica D*, 2013, vol. 258, pp. 77–92.
9. Blazevski D., Haller G. Hyperbolic and elliptic transport barriers in three-dimensional unsteady flows. *Physica D*, 2014, vol. 273–274, pp. 46–62.
10. Morgulis A., Yudovich V.I. and Zaslavsky G.M. Compressible helical flows. *Comm. on Pure and Applied Math.*, 1995, vol. XLVIII, pp. 571–582.
11. Govorukhin V.N., Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M. Chaotic advection in compressible helical flow. *Physical Review E*, 1999, vol. 60, no. 3, pp. 2788–2798.
12. Xiao-Hua Zhao, Keng-Huat Kwek, Ji-Bin Li, Ke-Lei Huang. Chaotic and resonant streamlines in the ABC flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1993, vol. 53, no. 1, pp. 71–77.
13. Didov A.A., Uleysky M.Y. Nonlinear resonances in the ABC-flow. *Chaos*, 2018, vol. 28, no. 1, Art. no. 013123.
14. Ershkov S.V. About existence of stationary points for the Arnold–Beltrami–Childress (ABC) flow. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, vol. 276, pp. 379–383.
15. Ziglin S.L. An Analytic Proof of the Nonintegrability of the ABC-flow for $A = B = C$. *Functional Analysis and its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 225–227.
16. Llibre J., Valls C. A note on the first integrals of the ABC system. *Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 53, no. 2, Art. no. 023505
17. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos,* 1995, vol. 5, no. 2, pp. 402–411.



Говорухин Василий Николаевич – родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил кандидатскую диссертацию (1999) в области исследования динамики жидкости. Опубликовал более 60 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает доцентом кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ЮФУ
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru