Бифуркации в динамических системах
Квантовый хаос. Детерминированный

УДК 532.5.031, 532.511 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652

Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости

В. В. Марков[1], *Г. Б. Сизых*[2]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Россия, 119991 Москва, ул. Губкина, 8
[2]Московский физико-технический институт
Россия, 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: markov@mi-ras.ru, o1o2o3@yandex.ru
Автор для переписки Григорий Борисович Сизых, o1o2o3@yandex.ru
Поступила в редакцию 26.10.2020, принята к публикации 26.10.2020, опубликована 30.11.2020

Цель исследования состоит в получении критерия существования стационарного решения полной системы уравнений, описывающих течение идеального совершенного газа при заданном несоленоидальном винтовом поле скорости. Условия такого критерия должны содержать только компоненты этой скорости и их производные. Выполнение условий должно быть необходимо и достаточно для существования таких полей плотности и давления, которые вместе с рассматриваемой скоростью удовлетворяют полной системе уравнений. **Методы.** Без использования асимптотических, численных и других приближенных методов проводится анализ полной системы уравнений классической модели течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями. **Результаты.** Предложен критерий существования решения полной системы уравнений стационарного движения идеального совершенного газа для несоленоидального винтового поля скорости, состоящий из системы уравнений и неравенств, содержащих только компоненты скорости и их производные. Представлен пример несоленоидального винтового поля скорости, для которого, согласно предложенному критерию, не существует решения полной системы уравнений. Проведенное исследование демонстрирует, что обоснование соответствия поля скорости какой-либо модели движения жидкости представляет собой содержательную задачу, без решения которой это поле не может ассоциироваться со скоростью течения жидкости. **Заключение.** Поставлена проблема существования точного решения полной системы уравнений при заданном несоленоидальном винтовом поле скорости, и она решена для простейшей модели стационарного движения жидкости. Показано, что не всякую несоленоидальную винтовую скорость можно считать скоростью сжимаемой жидкости. Актуальность поставленной проблемы подтверждена примером исследования (Моргулис А. и др. Comm. on Pure and Applied Math, 1995), в котором представленная авторами несоленоидальная винтовая скорость приписывается течению сжимаемой жидкости неправомерно, поскольку доказательство существования соответствующего решения полной системы уравнений какой-либо модели сжимаемой жидкости не приводится.

Ключевые слова: скорость течения сжимаемой жидкости, точное решение, течения идеального совершенного газа, несоленоидальное винтовое поле скорости, винтовая скорость, решения Бельтрами.

Образец цитирования: Марков В.В., Сизых Г.Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652 https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652

Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity

V. V. Markov[1], *G. B. Sizykh*[2]

[1]Steklov Mathematical Institute of RAS
8, Gubkina St., Moscow 119991, Russia
[2]Moscow Institute of Physics and Technology
9, Institutskii Lane, Dolgoprudny 141700, Russia
E-mail: markov@mi-ras.ru, o1o2o3@yandex.ru
Correspondence should be addressed to Grigory B. Sizykh, o1o2o3@yandex.ru
Received 26.10.2020, accepted 26.10.2020, published 30.11.2020

Purpose of the study is to obtain a criterion for existence of stationary solution of the complete system of equations describing the flow of ideal perfect gas for a given non-solenoidal helical velocity field. Conditions of such a criterion should contain only the components of this velocity and their derivatives. The fulfillment of conditions must be necessary and sufficient for the existence of such fields of density and pressure, which, together with the considered velocity, satisfy the complete system of equations. **Methods.** Without using asymptotic, numerical, and other approximate methods, the analysis of the complete system of equations of the classical model of the flow of ideal perfect gas with constant heat capacities is carried out. **Results.** A criterion for the existence of a solution to the complete system of equations for stationary motion of ideal perfect gas for a non-solenoidal helical velocity field is proposed, consisting of a system of equations and inequalities containing only velocity components and their derivatives. An example of a non-solenoidal helical velocity field is presented, for which, according to the proposed criterion, there is no solution to the complete system of equations. The study demonstrates that the justification of the correspondence of the velocity field to any model of fluid motion is a meaningful problem, without which this field cannot be associated with the fluid flow velocity. **Conclusion.** The problem of the existence of an exact solution of the complete system of equations for a given velocity field has been proposed and the solution one has been obtained for the simplest model of stationary fluid motion and a non-solenoidal helical velocity field. It is shown that not every non-solenoidal helical velocity can be considered the velocity of a compressible fluid. The relevance of the problem posed is confirmed by an example of research (*Morgulis A. et al.* Comm. On Pure and Applied Math, 1995), in which the non-solenoidal helical velocity presented by the authors is unlawfully attributed to the flow of compressible fluid since the proof of the existence of corresponding solution of the complete system of equations of any model of compressible liquid is not given.

Key words: flow velocity of compressible fluid, exact solution, flow of ideal perfect gas, non-solenoidal helical velocity field, helical velocity, Beltrami solutions.

Reference: Markov V.V., Sizykh G.B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652

Введение

Исследование различных свойств течений, например форм линий тока [1–3], поверхностей тока [4] и вихревых линий [5], с использованием точного решения системы уравнений, соответствующих той или иной модели движения жидкости, имеет смысл только тогда, когда это решение удовлетворяет основным физическим законам. Поэтому модель течения должна быть физичной и даже в самом простом варианте включать в себя законы сохранения массы, количества движения и энергии. К решениям полной системы уравнений физичной модели движения несжимаемой жидкости относятся, например, ABC-решения [1–3] и решения Громеки–Бельтрами [6,7]. Примером решения иного свойства является полученное более двадцати лет назад авторами статьи [8] выражение для несоленоидального винтового векторного поля, которое неправомерно трактуется ими как поле скорости сжимаемого течения лишь на том основании, что решение удовлетворяет условию коллинеарности вектора поля и вектора вихря, а дивергенция вектора поля не равна нулю, в отличие от случая винтового поля скорости несжимаемой жидкости. Тем не менее, находятся исследователи [9–12], которые ссылаются на этот результат как на пример скорости сжимаемого течения, хотя в [8] не показано существование таких полей плотности и давления, которые вместе с их полем скорости удовлетворяют полной системе уравнений какой-либо известной модели течения сжимаемой жидкости. Поскольку во всех известных моделях (описание моделей движения различных жидкостей можно найти, например, в [13]) выполняются законы сохранения массы, энергии и трех компонент импульса, то соответствующие полные системы уравнений состоят, как минимум, из пяти уравнений для пяти неизвестных функций (например, плотность, давление и три компоненты скорости). Выяснение того, существует ли решение той или иной полной системы уравнений для заданного несоленоидального винтового поля скорости, представляет собой достаточно сложную задачу. Чтобы показать сложность этой задачи, ниже рассмотрена модель течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Именно такая модель идеальной сжимаемой жидкости изучается в первую очередь в классических учебниках (например, в [13–17]). Нами предложен критерий существования решения полной системы уравнений этой модели для несоленоидального винтового поля скорости, состоящий из системы уравнений и неравенств, содержащих только компоненты этой скорости и их производные. Приведен пример несоленоидального винтового поля скорости, для которого не существует решения полной системы уравнений. Этот пример наглядно показывает, что обоснование соответствия полученного в [8] решения какой-либо модели движения жидкости представляет собой отдельную содержательную задачу, которая не решена и даже не поставлена в [8] (в статье [8] вообще не упоминается ни одна модель жидкости и ни одна полная система уравнений движения). Из этого сделан вывод, что полученное в [8] решение описывает всего лишь несоленоидальное винтовое поле, и неправомерно связывать его со скоростью течения жидкости.

1. Стационарные винтовые течения идеальной несжимаемой жидкости

Прежде чем приступить к случаю сжимаемой жидкости, рассмотрим алгоритм построения винтовых $(\mathbf{V} \times \mathrm{rot}\mathbf{V} = 0)$ точных решений системы уравнений для несжимаемой жидкости в форме

$$\begin{aligned} &\partial\mathbf{V}/\partial t - \mathbf{V} \times \mathrm{rot}\mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \mathbf{F}, \\ &\mathrm{div}\mathbf{V} = 0, \quad \partial\rho/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla)\rho = 0, \quad \rho > 0, \quad p \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{F}$ – результирующая внешних массовых сил, отнесенная к единице массы (часто полагают $\mathbf{F} = 0$ или $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения).

При заданном поле внешних массовых сил $\mathbf{F}$ эта система замкнута (пять неизвестных и пять уравнений), но не является полной системой уравнений движения, поскольку в ней отсутствует уравнение баланса внутренней энергии. Однако, как известно, решение задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости под действием внешней силы не зависит от решения задачи о распределении температуры, которое рассчитывается по полю скорости с использованием уравнения баланса тепловой энергии [13]. Это означает, что для любого решения $(\mathbf{V}, \rho, p)$ системы (1) существует решение полной системы уравнений (включающей уравнение баланса тепловой энергии), и поэтому скорость $\mathbf{V}$ может на законном основании считаться скоростью течения идеальной несжимаемой жидкости.

Один из известных методов получения поля скорости $\mathbf{V}$ точных стационарных решений (1) состоит в поиске решения системы двух уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0. \tag{2}$$

Этим условиям удовлетворяют, например, ABC-решения и решения Громеки–Бельтрами. Для всякого решения (2) в произвольной ограниченной области G найдутся поля p и ρ, удовлетворяющие системе (1). Например, если положить $\rho = \rho_0 = \mathrm{const} > 0$ и $p = p_0 - \rho_0(\mathbf{V}^2/2)$, где константа p_0 обеспечивает неотрицательность давления p в области G, то легко проверить, что давление p вместе с плотностью $\rho = \rho_0$ и со скоростью $\mathbf{V}$ удовлетворяют всем уравнениям системы (1) при $\mathbf{F} = 0$. Это дает основание считать любое решение системы (2) скоростью течения идеальной несжимаемой жидкости.

На первый взгляд может показаться, что, если систему (2) заменить на систему двух уравнений $\operatorname{div}\mathbf{V} \neq 0$ и $\mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$, то есть формально исключить условие несжимаемости жидкости, и найти ее решение $\mathbf{V}$, то получится скорость некоторого сжимаемого течения жидкости. Но, как показано ниже, не всякую такую скорость можно считать скоростью течения сжимаемой жидкости.

2. Стационарные винтовые течения идеального совершенного газа

Рассмотрим простейшую и наиболее распространенную модель сжимаемой жидкости – модель идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v [13–17]. Соответствующая ей полная система уравнений, обеспечивающая выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии, для непрерывных течений имеет следующий вид:

$$\partial\mathbf{V}/\partial t - \mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \mathbf{F}, \tag{3}$$

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{4}$$

$$\partial(p\rho^{-\gamma})/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla)(p\rho^{-\gamma}) = 0, \tag{5}$$

где $\rho > 0$, $p > 0$, $\gamma = c_p/c_v > 1$ – показатель адиабаты Пуассона. Уравнение (5) следует из закона сохранения энергии, выполнение которого в рамках рассматриваемой простейшей модели идеальной жидкости означает адиабатичность течения [13, 16, 17], что равносильно сохранению энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-\gamma}$ в частицах газа во время их движения.

Для стационарных винтовых течений $(\mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0)$ эта система упрощается:

$$0 = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \mathbf{F}, \tag{6}$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \rho > 0, \tag{7}$$

$$(\mathbf{V}, \nabla)(p\rho^{-\gamma}) = 0, \quad p > 0. \tag{8}$$

Заметим, что, поскольку $\rho > 0$, уравнение неразрывности (7) равносильно уравнению

$$(\mathbf{V}, \nabla)\ln\rho = -\operatorname{div}\mathbf{V}. \tag{9}$$

Переформулируем постановку задачи и будем считать $\mathbf{F}$ не заданной, а искомой функцией координат, которая позволит получить решение системы (6)–(8) для несоленоидальной винтовой скорости $\mathbf{V}$ (например, для скорости [8]) в области G, где $\mathbf{V} \neq 0$.

На какой-либо поверхности S, лежащей в G и пересекающейся (не касающейся) линиями тока, зададим произвольное распределение плотности $\rho > 0$. Интегрированием уравнения (9) вдоль линий тока в обе стороны от поверхности S можно получить поле плотности в некоторой области $G' \subset G$. В силу того, что интегрируется логарифм, плотность останется положительной во всей области G'. Поскольку (9) равносильно (7), эта плотность ρ вместе со скоростью $\mathbf{V}$ будут удовлетворять уравнению неразрывности (7). После этого на поверхности S можно задать произвольное распределение давления $p > 0$. Уравнение (8) можно представить в виде $(\mathbf{V}, \nabla) \ln p = \gamma(\mathbf{V}, \nabla) \ln \rho$. Интегрированием этого уравнения вдоль линий тока в обе стороны от поверхности S можно получить в области G' поле $p > 0$, удовлетворяющее вместе с ρ и $\mathbf{V}$ уравнению (8). Поэтому для заданной скорости $\mathbf{V} \neq 0$ в области G' существуют и не единственны пары полей плотности ρ и давления p, удовлетворяющие системе двух уравнений (7) и (8). Подстановка одной из этих пар ρ, p и скорости $\mathbf{V}$ в уравнение (6) показывает существование такого поля $\mathbf{F} = \rho^{-1}\nabla p + \nabla(\mathbf{V}^2/2)$, что в итоге вся система уравнений (6)–(8) оказывается выполненной.

Но поле массовых сил должно быть физически реализуемым (физичным, например, $\mathbf{F} = 0$ или $\mathbf{F} = \mathbf{g}$), а не просто полем, обеспечивающим выполнение равенства (6). Требование физичности поля массовых сил значительно усложняет предложенный способ решения проблемы, и практически его невозможно реализовать, поскольку требуется доказать, что хотя бы для одной пары ρ, p, удовлетворяющей (7) и (8), поле $\mathbf{F} = \rho^{-1}\nabla p + \nabla(\mathbf{V}^2/2)$ окажется физичным.

Возникает вопрос. Как выяснить, существует ли решение (6)–(8) для заданного поля несоленоидальной винтовой скорости? Ответу на этот вопрос посвящен следующий раздел.

3. Критерий существования решения

Поскольку речь идет о сжимаемых течениях, то всегда существуют области, во всех точках которых

$$\mathrm{div}\mathbf{V} \neq 0. \tag{10}$$

Дальнейшее исследование системы (6)–(8) будем проводить именно для таких областей. Кроме того, будем считать, что внешние массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$).

Пусть винтовая скорость $\mathbf{V}$ вместе с плотностью ρ и давлением p удовлетворяют системе (6)–(8) при $\mathbf{F} = 0$. Представим давление в виде $p = \sigma\rho^{\gamma}$. Тогда ротация уравнения (6) приводит к равенству $\nabla\sigma \times \nabla\rho = 0$, которое после применения известной формулы для двойного векторного произведения $\mathbf{V} \times (\nabla\sigma \times \nabla\rho)$ дает: $(\mathbf{V}, \nabla\rho)\nabla\sigma - (\mathbf{V}, \nabla\sigma)\nabla\rho = 0$. Из (8) следует, что $(\mathbf{V}, \nabla\sigma) = 0$, и последнее уравнение упрощается:

$$(\mathbf{V}, \nabla\rho)\nabla\sigma = 0. \tag{11}$$

Из (9) и (10) следует, что $(\mathbf{V}, \nabla)\rho \neq 0$. С учетом (11) это означает, что $\nabla\sigma = 0$. Таким образом, в стационарном несоленоидальном (10) винтовом ($\mathbf{V} \times \mathrm{rot}\mathbf{V} = 0$) течении энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-\gamma}$ постоянна во всей области течения. Поэтому $\rho^{-1}\nabla p = \rho^{-1}\nabla(\sigma\rho^{\gamma}) = \gamma\sigma\rho^{\gamma-1}\nabla \ln \rho$, и уравнение (6) при $\mathbf{F} = 0$ можно записать в виде

$$\gamma\sigma\rho^{\gamma-1}\nabla \ln \rho + \nabla(\mathbf{V}^2/2) = 0. \tag{12}$$

Умножая скалярно обе части (12) на $\mathbf{V}$, получаем: $\gamma\sigma\rho^{\gamma-1}(\mathbf{V},\nabla)\ln\rho + (\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2) = 0$. Заменяя в последнем уравнении $(\mathbf{V},\nabla)\ln\rho$ с помощью (9), имеем

$$\gamma\sigma\rho^{\gamma-1}\mathrm{div}\mathbf{V} = (\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2) \tag{13}$$

или

$$\rho = \left(\frac{1}{\gamma\sigma}\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{14}$$

Используя это выражение для плотности, получаем $\mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = \mathrm{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\gamma\sigma\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] =$ $= \left(\frac{1}{\gamma\sigma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\cdot\mathrm{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]$. Поэтому из уравнения (7) следует, что

$$\mathrm{div}\left[\mathbf{V}\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = 0. \tag{15}$$

Поскольку из (10) и (13) вытекает, что $(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2) \neq 0$, то уравнение (15) равносильно уравнению $\gamma - 1 = -\frac{(\mathbf{V},\nabla)\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)}{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)}$. Для идеального совершенного газа показатель адиабаты γ лежит в пределах $1 < \gamma \leqslant 5/3$. Поэтому

$$1 < \gamma = 1 - \frac{(\mathbf{V},\nabla)\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)}{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)} \leqslant 5/3, \quad \gamma = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Теперь перепишем (12) в виде $\nabla\frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma\rho^{\gamma-1} + \nabla(\mathbf{V}^2/2) = 0$ и, используя (14), получим

$$\nabla\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}} + \mathbf{V}^2/2\right) = 0. \tag{17}$$

Условия (16) и (17) суть следствия системы (6)–(8). Поскольку плотность всегда положительна, то следствием системы (см. уравнение (13)) является и неравенство

$$\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2/2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}} > 0. \tag{18}$$

Условия (16)–(18) должны быть выполнены для любого несоленоидального винтового поля скорости, если существуют такие поля плотности и давления, которые вместе с этой скоростью удовлетворяют системе (6)–(8). Оказывается, что выполнение этих условий достаточно для существования таких полей плотности и давления. Действительно. Пусть некоторое несоленоидальное винтовое поле $\mathbf{V}$ удовлетворяет системе (16)–(18). Тогда, поскольку из (16) следует (15), для любой положительной константы σ и для показателя адиабаты γ, полученного из (16), поле плотности (14) вместе со скоростью $\mathbf{V}$ удовлетворяют уравнению неразрывности (7). Далее, давление $p = \sigma\rho^\gamma$ вместе с плотностью (14) и скоростью $\mathbf{V}$ будут удовлетворять уравнению (8). После этого, используя (14), перепишем (17) в виде $\nabla\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma\rho^{\gamma-1} + \mathbf{V}^2/2\right) = 0$. Преобразуем первое слагаемое под знаком градиента: $\nabla\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma\rho^{\gamma-1}\right)=\rho^{-1}\nabla\left(\sigma\rho^{\gamma}\right)=\rho^{-1}\nabla p$, и окончательно получим, что $\rho^{-1}\nabla p+\nabla(\mathbf{V}^2/2)=0$. Поэтому уравнение (6) также окажется выполненным. Таким образом, приходим к основному результату.

Критерий существования решения. Для того, чтобы при заданном винтовом ($\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}{=}0$) поле скорости $\mathbf{V}$ в области, где $\mathrm{div}\mathbf{V}\neq 0$, существовало решение системы (6)–(8) при $\mathbf{F}=0$, необходимо и достаточно выполнения условий (16), (17) и (18).

4. Пример применения критерия

Рассмотрим поле скорости $\mathbf{V}$, компоненты которой в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$V_x = x\sin(z^2/2),\quad V_y = x\cos(z^2/2),\quad V_z=\frac{\cos(z^2/2)}{z}. \tag{19}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что, например, в области $G=\{0<x<1,\ 0<y<1,\ 0.5<z<1\}$ это поле несоленоидально $(\mathrm{div}\mathbf{V}\neq 0)$ и $\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\mathbf{V}=0$. Однако, как показывают расчеты с использованием скорости (19), величина $1-\dfrac{(\mathbf{V},\nabla)\left(\frac{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)}{\mathrm{div}\mathbf{V}}\right)}{(\mathbf{V},\nabla)(\mathbf{V}^2)}$ не постоянна и меняется в области G примерно от -6.9 до 0.2, что означает нарушение условий (16). Поэтому из полученного выше критерия следует, что скорость (19) не может быть скоростью точного решения системы (6)–(8).

Этот пример показывает, что не всякую несоленоидальную винтовую скорость можно считать скоростью течения газа, для которого система (6)–(8) является полной системой уравнений.

5. Течение воображаемой жидкости

В статье [8] предложен алгоритм построения семейства полей несоленоидальных винтовых скоростей. Поиск хотя бы одного представителя этого семейства, удовлетворяющего условиям (16), (17) и (18), представляет собой отдельную содержательную задачу, выходящую за рамки настоящей статьи. Что касается других моделей течений сжимаемой жидкости [13], то доказательство существования решений полных систем уравнений, соответствующих какой-либо несоленоидальной винтовой скорости, также представляет собой сложную задачу. Поэтому неправомерно считать скоростью течения сжимаемой жидкости любого представителя семейства скоростей [8] до тех пор, пока не будет представлена модель течения сжимаемой жидкости, для которой существует соответствующее ему решение полной системы уравнений.

Однако иногда удобно рассматривать движение неких воображаемых частиц со скоростью, для которой не доказано соответствие какой-либо физичной модели течения. В этом случае можно использовать термин «течение воображаемой жидкости» (см., например, [18, 19]). Поэтому, чтобы подчеркнуть возможность нефизичности ситуации, скорость [8] также предлагается называть скоростью винтового течения воображаемой жидкости.

Заключение

Исследована проблема существования решения уравнений движения идеального газа при заданной винтовой скорости. В несжимаемой жидкости решение полной системы уравнений существует для любого соленоидального винтового поля скорости. Поэтому такое поле может считаться скоростью течения идеальной несжимаемой жидкости. В сжимаемой жидкости не для всякого несоленоидального винтового поля существует решение полной системы уравнений какой-либо модели течения, включающее в себя это винтовое поле (в качестве скорости) и поля термодинамических параметров. Чтобы показать это, получен критерий существования решения полной системы уравнений стационарного движения идеального совершенного газа для несоленоидального винтового поля скорости, состоящий из системы уравнений и неравенств, содержащих только компоненты скорости и их производные. Представлен пример несоленоидального винтового поля скорости, для которого, согласно предложенному критерию, не существует решения полной системы уравнений, то есть показано, что не всякую несоленоидальную винтовую скорость можно считать скоростью сжимаемой жидкости. До тех пор, пока не доказано, что для некоторого поля скорости существует решение полной системы уравнений какой-либо физичной модели течения жидкости, такую скорость неправомерно называть скоростью течения жидкости. Правильно называть ее скоростью воображаемой жидкости, подчеркивая тем самым возможность нефизичности ситуации.

Библиографический список

1. *Arnold V.I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // C. R. Acfd. Sci. Paris. 1965. Vol. 261, no. 1. P. 17–20.
2. *Козлов В.В.* Замечания о стационарных движениях сплошной среды // ПММ. 1983. Т. 47, вып. 2. С. 341–342.
3. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Издат. дом «Удмуртский университет», 1998. 238 с.
4. *Sizykh G.B.* System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave // Fluid Dyn. 2020. Vol. 55, no. 7. P. 899–903.
5. *Sizykh G.B.* Helical Vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows // Fluid Dyn. 2019. Vol. 54, no. 8. P. 1038–1042.
6. *Громека И.С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 76–148.
7. *Beltrami E.* Considerazioni idrodinamiche // Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. 1889. Vol. 22. P. 122–131.
8. *Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M.* Compressible helical flows // Comm. on Pure and Applied Math. 1995. Vol. 48, no. 5. P. 571–582.
9. *Govorukhin V.N., Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M.* Chaotic advection in compressible helical flow // Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798.
10. *Torres M., Adrados J.P., Aragón J.L., Cobo P., Tehuacanero S.* Quasiperiodic bloch-like states in a surface-wave experiment // Physical Review Letters. 2003. Vol. 90, no. 11. P. 4.
11. *Weng S.* A new formulation for the 3-D Euler equations with an application to subsonic flows in a cylinder // Indiana University Mathematics Journal. 2015. Vol. 64, no. 6. P. 1609–1642.
12. *Alves D.W.F., Hoyos C., Nastase H., Sonnenschein J.* Knotted solutions for linear and nonlinear theories: Electromagnetism and fluid dynamics // Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics. 2017. Vol. 773. P. 412–416.
13. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 568 с.

14. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 208 с.
15. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
16. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
17. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.
18. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Advances in Aerodynamics. 2019. Vol. 1, no. 15.
19. *Sizykh G.B.* Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow // Fluid Dyn. 2019. Vol. 54, no. 7. P. 907–911.

References

1. Arnold V.I. Sur la Topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *C. R. Acfd. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, no. 1, pp. 17–20.
2. Kozlov V.V. Notes on steady vortex motions of continuous medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 288–289.
3. Kozlov V.V. General Vortex Theory. Izhevsk: Udmurdskii universitet, 1998, 238 p. (in Russian).
4. Sizykh G.B. System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903.
5. Sizykh G.B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows. *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042.
6. Gromeka I.S. Collected Works. Moscow: Akad. Nauk SSSR, 1952.
7. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche. *Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett.*, 1889, vol. 22, pp. 122–131.
8. Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M. Compressible helical flows. *Comm. on Pure and Applied Math.*, 1995, vol. 48, no. 5, pp. 571–582.
9. Govorukhin V.N., Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M. Chaotic advection in compressible helical flow. *Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 1999, vol. 60, no. 3, pp. 2788–2798.
10. Torres M., Adrados J.P., Aragón J.L., Cobo P., Tehuacanero S. Quasiperiodic bloch-like states in a surface-wave experiment. *Physical Review Letters*, 2003, vol. 90, no. 11, p. 4.
11. Weng S. A new formulation for the 3-D Euler equations with an application to subsonic flows in a cylinder. *Indiana University Mathematics Journal*, 2015, vol. 64, no. 6, pp. 1609–1642.
12. Alves D.W.F., Hoyos C., Nastase H., Sonnenschein J. Knotted solutions for linear and nonlinear theories: Electromagnetism and fluid dynamics. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 2017, vol. 773, pp. 412–416.
13. Sedov L.I. A Cource in Continuum Mechanics. Vol. 1. Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.
14. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. New York, London: John Wiley & Sons, Inc., Chapman & Hall, Ltd, 1958.
15. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. Theoretical Hydromechanics. New York: Interscience Publishers, 1964, 1965.
16. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1967. 615 p.

17. Loytsyansky L.G. Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon Press, 1966. 804 p.
18. Golubkin V.N., Sizykh G.B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave. *Advances in Aerodynamics*, 2019, vol. 1, no. 15.
19. Sizykh G.B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow. *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911.

Марков Владимир Васильевич – родился в Павловском Посаде Московской области (1947). Окончил механико-математический факультет МГУ (1970). Доктор физико-математических наук (1989). Специалист в области течений жидкости, газов и пылегазовых смесей, в теории горения, детонации и взрыва, численного моделирования быстропротекающих процессов. Работает ведущим научным сотрудником отдела механики Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН (СССР). За последние 5 лет опубликовал 40 научных статей. Лауреат Государственной премии РФ в области науки и техники (2002). Награжден медалью и премией имени академика Г.Г. Черного (2019). Эксперт-рецензент РФФИ и эксперт РАН.

Россия, 119991 Москва, Губкина, 8
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: markov@mi-ras.ru

Сизых Григорий Борисович – родился в Ангарске (1961). Окончил факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (1985). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) в области исследования движения и горения пылегазовых смесей. Ведет научно-исследовательскую работу в теории движения жидкости, газа и пылегазовых смесей. За последние пять лет опубликовал по этой тематике 31 научную работу и доложил свои результаты на четырех международных конференциях. Работает доцентом на кафедре высшей математики Московского физико-технического института.

Россия, 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9
Московский физико-технический институт
E-mail: o1o2o3@yandex.ru