



## ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ОПОРНОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ ВБЛИЗИ ПОРОГА ГЕНЕРАЦИИ\*

*К. Н. Алексеев, А. Г. Баланов, А. А. Короновский,  
В. А. Максименко, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов*

В работе исследована эволюция возмущения равновесного состояния полупроводниковой сверхрешетки под действием приложенного постоянного напряжения вблизи порога генерации как в случае воздействия на систему внешнего наклонного магнитного поля, так и при его отсутствии. Для описания поведения малых возмущений стационарного состояния во времени и пространстве в работе проведена линеаризация уравнений, описывающих динамику полупроводниковой сверхрешетки. Показано, что при увеличении приложенной к сверхрешетке разности потенциалов коэффициент затухания возмущения уменьшается и стремится к нулю по мере приближения величины приложенного напряжения к пороговому значению. При этом приложенное внешнее магнитное поле оказывает существенное влияние как на величину порогового напряжения, так и на частоту колебаний возмущения и на его пространственное распределение. Для описания динамики возмущения в работе используется оператор, полученный путем линеаризации основных уравнений, описывающих динамику системы вблизи стационарного во времени состояния равновесия.

**Ключевые слова:** Пространственно распределенные системы, полупроводниковая сверхрешетка, возмущение основного состояния, линеаризованный оператор эволюции, развитие неустойчивости.

### Введение

Полупроводниковые сверхрешетки представляют собой сложные наноструктуры, состоящие из чередующихся тонких (порядка 10 нм) слоев различных полупроводниковых материалов. Особенности строения данной структуры обуславливают наличие у сверхрешетки дополнительного периодического потенциала, период которого оказывается больше периода кристаллической решетки веществ, входящих в ее

\*Статья написана по материалам доклада на XV Зимней школе по электронике сверхвысоких частот и радиофизике, Саратов, Россия, 6-11 февраля 2012.

состав. Идея создания одномерной полупроводниковой сверхрешетки принадлежит Л. Эсаки и Р. Тсу [1] в качестве объекта для экспериментального изучения квантово-механических эффектов, связанных с резонансным туннелированием и блоховскими колебаниями. В настоящее время полупроводниковые структуры активно используются для изучения нелинейных явлений [2, 3], таких как, например, отрицательная дифференциальная проводимость [4, 5] или нелинейные колебания поля и тока в полупроводниковой структуре под внешним периодическим воздействием терагерцового диапазона [6]. Кроме того, интерес к изучению полупроводниковых сверхрешеток тесно связан с перспективой их использования для создания приборов и устройств, работающих как в режиме генерации [7], так и в режиме усиления сигналов сверхвысоких частот [8–10]. Особое внимание исследователей привлекает возможность создания терагерцового генератора на блоховских колебаниях электронов в сверхрешетках [11, 12].

Известно, что приложенное к сверхрешетке постоянное напряжение при достижении определенного значения вызывает генерацию высокочастотных колебаний. При этом внешнее магнитное поле, приложенное к сверхрешетке, существенно изменяет и величину напряжения, необходимого для возникновения генерации в системе, и частоту возникающих колебаний тока [13, 14].

В настоящей работе исследуется предгенерационное поведение полупроводниковой сверхрешетки с позиций нелинейной динамики, для чего наряду с основным (стационарным во времени) состоянием системы рассматривается эволюция малого возмущения этого стационарного состояния вблизи порога генерации, как в случае воздействия наклонного магнитного поля, так и при его отсутствии.

## 1. Исследуемая система

Коллективная динамика носителей заряда в полупроводниковой сверхрешетке может быть описана с помощью самосогласованной системы дифференциальных уравнений, включающей уравнение непрерывности (1), описывающее изменение концентрации электронов с течением времени, и уравнение Пуассона (2), описывающее распределение электрического поля вдоль сверхрешетки,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\beta \frac{\partial J}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \nu (n - 1), \quad (2)$$

где  $\beta = 0.03074$  характеризует максимальную скорость электронов в минизоне, а коэффициент  $\nu = 15.769$  пропорционален равновесной концентрации заряда. Система уравнений (1)–(2) разрешается относительно безразмерных величин  $n(x, t)$  и  $F(x, t)$ , где  $n(x, t)$  – объемная плотность носителей заряда,  $F(x, t)$  – распределение электрического поля;  $J(x, t)$  – плотность тока, текущего через сверхрешетку,  $x$  и  $t$  – безразмерные координата и время. Переход к безразмерным величинам осуществляется

ется через следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &= x'/L', \quad t = t'/\tau', \quad n = n'/n'_D, \\ J &= J'/(en'_D v'_0), \quad F = F'/F'_c, \quad F_c = \hbar/(ed'\tau'), \\ \beta &= v'_0\tau'/L', \quad v = eL'n'_D/(F'_c\varepsilon_0\varepsilon_r), \quad v'_0 = \delta\Delta'd'/(2\hbar), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $d' = 8.3$  нм – период сверхрешетки,  $L' = 115.2$  нм – ее длина;  $n'_D = 3 \times 10^{22}$  м<sup>-3</sup> – равновесная концентрация электронов, определяемая уровнем легирования;  $\Delta' = 19.1$  мЭВ – ширина минизоны;  $e > 0$  – заряд электрона;  $F'_c = 3.1725 \times 10^5$  В/м – нормировочное значение электрического поля;  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_r = 12.5$  – электрическая постоянная и относительная диэлектрическая проницаемость материала, соответственно; параметры  $\delta = [\tau'_e/(\tau'_i + \tau'_e)] = 1/8.5$  и  $\tau' = \delta\tau'_i = 250$  фс характеризуют время рассеяния электронов и зависят от времени упругого  $\tau'_e$  и неупругого  $\tau'_i$  рассеяния. Размерные значения управляющих параметров выбирались в соответствии с параметрами полупроводниковых сверхрешеток, использованных ранее в экспериментальных работах [15].

В рамках дрейфового приближения с учетом диффузии плотность тока  $J(x, t)$  определяется как

$$J = nv_d(F) + D(F)\frac{\partial n}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $v_d(F)$  – безразмерное значение дрейфовой скорости электрона ( $v_d = v'_d/(v'_0)$ ),  $D(F)$  – коэффициент диффузии.

$$D(F) = v_d(F)d\frac{\exp(-\kappa F)}{1 - \exp(-\kappa F)}, \quad \kappa = \frac{\hbar}{k'_B T' \tau'}, \quad d = \frac{d'}{L'}. \quad (5)$$

При низких температурах  $T'$  распределение плотности тока (4) рассчитывается без учета диффузионного слагаемого (5)

$$J = nv_d(F). \quad (6)$$

Полагая, что контакты на эмиттере и коллекторе омические, а плотность тока через эмиттер  $J(0, t)$  определяется проводимостью контакта, в соответствии с законом Ома имеем граничное условие

$$J(0, t) = sF(0, t), \quad (7)$$

где  $s = \sigma'F'_0/(en'_D v_0) = 17.6511$  соответствует безразмерной электрической проводимости эмиттера,  $\sigma' = 3788$  См<sup>-1</sup>. Безразмерное значение напряжения  $V = V'/(F'_c L')$ , приложенного к сверхрешетке, может быть найдено из условия

$$V = U + U_{SL}, \quad U_{SL} = \int_0^1 F dx, \quad (8)$$

где интегрирование проводится по длине системы  $L = L'/d'$  (в данном случае  $L = 13.90$ ),  $U = U'/(F'_c L')$  – определяет падение напряжения на контактах, а  $U_{SL}$  – падение напряжения непосредственно на полупроводниковом образце.

Рассмотренная выше система уравнений интегрируется численно. По аналогии с [7] сверхрешетка разбивается на достаточно большое число  $N$  узких слоев с шириной  $\Delta x$ . В пределах каждого слоя концентрация электронов полагается постоянной. При этом также предполагается, что (1) транспорт электронов рассматривается в нижней минизоне сверхрешетки в приближении сильной связи; (2) межзонным туннелированием Ландау–Зинера можно пренебречь; (3) при определении плотности тока электронов в мезоскопической модели можно пренебречь диффузией; (4) равновесная концентрация носителей (в отсутствие поля) одинакова для всех слоев решетки. Следует отметить, что подобные приближения широко распространены при моделировании транспорта заряда в полупроводниковых сверхрешетках и во многих случаях хорошо описывают экспериментальные результаты [15, 16]. Обозначив концентрацию электронов в слое  $m$  как  $n_m$ , уравнение, описывающее эволюцию плотности заряда в слое  $m$ , представим в виде дискретного аналога уравнения (1)

$$\Delta x \frac{dn_m}{dt} = \beta(J_{m-1} - J_m), \quad m = 1 \dots N, \quad (9)$$

где  $J_{m-1}$  и  $J_m$  – плотности тока, протекающего через левую и правую границу  $m$ -го слоя, соответственно. Плотность тока  $J_m$  определяется как

$$J_m = n_m v_d(F_m), \quad (10)$$

где  $v_d$  описывает дрейфовую скорость электрона в зависимости от величины электрического поля  $F_m$  в слое  $m$  [15].

Для каждого слоя  $m$  справедливо дискретное представление уравнения Пуасона

$$F_{m+1} = v(n_m - 1) + F_m, \quad m = 1 \dots N. \quad (11)$$

Падение напряжения на сверхрешетке в данной конечно-разностной модели определяется с помощью соотношения (8), в котором интеграл заменяется суммированием по всем  $N$  слоям дискретизованной модели

$$V = U + \frac{\Delta x}{2} \sum_{m=1}^N (F_m + F_{m+1}). \quad (12)$$

В настоящей работе используются следующие параметры конечно-разностной схемы:  $N = 480$ ,  $\Delta x = 1/N = 2.08 \times 10^{-3}$ ,  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ . При этом сила тока, текущего через сверхрешетку, может быть найдена как

$$I' = \frac{A' e n'_D v_0}{N + 1} \sum_{m=0}^N J_m, \quad (13)$$

где  $A' = 5 \times 10^{-10} \text{ м}^2$  – площадь поперечного сечения полупроводниковой сверхрешетки.

## 2. Возмущения основного состояния

Результаты как экспериментальных исследований [15], так и численного интегрирования [13] показывают, что при приложении к сверхрешетке постоянного напряжения, превышающего некоторое пороговое значение, возможна генерация СВЧ-колебаний тока, текущего через данную структуру. При значениях напряжения меньших, чем пороговое, в системе устанавливается стационарное во времени состояние, которое однозначно задается распределениями концентрации носителей заряда  $n(x)$ , электрического поля  $F(x)$  и плотности тока  $J(x)$ , текущего через сверхрешетку. Как известно, установление в системе незатухающих периодических колебаний связано с потерей устойчивости стационарным состоянием. При этом важное значение имеет характер поведения возмущения стационарного состояния. Любое возмущение стационарного состояния, существующее в рассматриваемой системе, может быть разложено на ортогональный набор возмущений, каждое из которых будет характеризоваться своим инкрементом затухания/нарастания<sup>1</sup>. В том случае, если стационарное состояние оказывается однородным по пространству (то есть  $n = \text{const} \neq n(x)$ ,  $F = \text{const} \neq F(x)$ ), эволюция возмущений может быть охарактеризована с помощью дисперсионного соотношения; в общем же случае, когда стационарное состояние зависит от пространственной координаты, приходится прибегать к помощи численного моделирования [17]. Стационарное состояние оказывается неустойчивым, когда хотя бы одно возмущение характеризуется положительной величиной инкремента нарастания. Очевидно, что при переходе от стационарного режима к режиму генерации наиболее важную роль играет возмущение, которому соответствует наибольшая величина инкремента нарастания, поскольку именно у этого возмущения в точке бифуркации происходит смена знака у инкремента. Важно отметить, что именно это возмущение получается при численном исследовании способом, описанным ниже, тогда как для получения остальных возмущений приходится прибегать к дополнительным процедурам.

В настоящей работе исследуется поведение возмущения основного состояния полупроводниковой сверхрешетки в предгенерационном режиме. Следует отметить, что состояние данной системы характеризуется пространственно распределенными величинами, соответственно, возмущения также будут иметь пространственно распределенную природу. Интересной задачей в данном случае является исследование формы этих возмущений, частоты их колебаний, а также коэффициента затухания в зависимости от величины приложенного напряжения.

Как было показано выше, состояние рассматриваемой системы оказывается пространственно распределенным  $\mathcal{U}_0(x, t) = (n_0(x, t), F_0(x, t), J_0(x, t))^T$ . Для анализа динамики возмущения основной траектории можно одновременно моделировать поведение соседней «траектории»  $\mathcal{U}_1(x, t) = (n_0(x, t) + \tilde{n}(x, t), F_0(x, t) + \tilde{F}(x, t), J_0(x, t) + \tilde{J}(x, t))^T$ , отслеживая при этом поведение изначально малых, произвольно заданных отклонений  $\tilde{F}(x, t_0), \tilde{n}(x, t_0), \tilde{J}(x, t_0)$  во времени. Однако данный подход справедлив только при малом расстоянии между состояниями  $\mathcal{U}_0(x, t)$  и  $\mathcal{U}_1(x, t)$  по сравнению с характерными масштабами неоднородности распределения вектор-

---

<sup>1</sup> Величины этих инкрементов нарастания/убывания однозначно связаны со значениями спектра показателей Ляпунова исследуемой системы.

ного поля<sup>2</sup>. Поэтому в большинстве случаев, когда известен явный вид оператора эволюции рассматриваемой системы, для описания эволюции возмущений отдается предпочтение использованию уравнений в вариациях, хотя вывод таких уравнений зачастую оказывается достаточно сложной задачей. В настоящей работе проведена линеаризация исходных уравнений (1), (2), (6)–(8) и получен оператор

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = v \tilde{n}, \\ \tilde{J} &= \tilde{n} v_d(F) + n \frac{dv_d(F)}{dF} \tilde{F}, \\ \int_0^1 \tilde{F} dx &= 0, \quad \tilde{J}(0, t) = s \tilde{F}(0, t), \end{aligned} \quad (14)$$

описывающий линейную эволюцию возмущений с течением времени.

Таким образом, моделируя исходные уравнения (1), (2), (6)–(8) вместе с системой уравнений в вариациях (14), можно исследовать динамику возмущений в предгенерационном режиме в зависимости от приложенного напряжения, а также изучить влияние магнитного поля на динамику данных возмущений.

### 3. Влияние магнитного поля

Как было упомянуто выше, приложенное к сверхрешетке внешнее магнитное поле может существенно менять свойства системы. В данном разделе проводится анализ влияния магнитного поля на характер эволюции возмущения стационарного состояния полупроводниковой сверхрешетки с наибольшей величиной инкремента нарастания в предгенерационном режиме. Для этого исследуется эволюция возмущений стационарного состояния сверхрешетки вблизи порога генерации как при наличии внешнего магнитного поля, так и при его отсутствии.

Следует отметить, что магнитное поле не входит явным образом ни в уравнения (1), (2), (6)–(8), описывающие динамику системы, ни в линеаризованный оператор эволюции (14). В рамках используемого подхода вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}'$  наряду с такими важными параметрами, как ширина минизоны  $\Delta'$  (в нашем случае  $\Delta' = 19.1$  мэВ) и температура  $T'$ , используется при расчете зависимости дрейфовой скорости электрона  $v_d$  от напряженности электрического поля  $F$  и существенно влияет на характер этой зависимости.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда температура  $T'$  близка к нулю. При этом без внешнего магнитного поля зависимость  $v_d(F)$  может быть получена аналитически

$$v_d(F) = \frac{I_1(\Theta)}{I_0(\Theta)} \frac{F}{1 + F^2} \approx \frac{F}{1 + F^2}, \quad (15)$$

где  $\Theta = \Delta'/(2k_B T')$ ,  $I_{0,1}(x)$  – функции Бесселя первого порядка. Для случая воздействия на систему внешнего магнитного поля дрейфовая скорость может быть рассчитана численно с использованием соответствующих методов [18].

<sup>2</sup>При этом остается произвол в определении того, что считать «малым расстоянием».

На рис. 1 представлены зависимости  $v_d(F)$ , рассчитанные для случая воздействия на систему магнитного поля  $\mathbf{B}' = (B' \cos \theta, 0, B' \sin \theta)^T$  индукцией  $B' = 12$  Тл, вектор индукции которого направлен под углом  $\theta = 40^\circ$ , и для случая, когда внешнее магнитное поле отсутствует. Также на рисунке представлены зависимости  $dv_d(F)/dF$  для этих случаев, которые использованы при моделировании системы уравнений в вариациях (14).

Зависимость  $v_d(F)$  без воздействия магнитного поля (кривая 1) рассчитана по аналитической формуле (15). Из рисунка видно, что дрейфовая скорость линейно возрастает при малых значениях напряженности электрического поля  $F$  и достигает максимального значения при  $F = 1$ . Дальнейшее увеличение безразмерного значения  $F$  приводит к уменьшению значения  $v_d$ . Подобный вид зависимости обусловлен рассеянием носителей заряда [19]. Наличие падающего участка на кривой  $v_d(F)$  (отрицательной дифференциальной проводимости) приводит к возникновению токовой неустойчивости, сопровождающейся формированием областей повышенной концентрации электронов (доменов заряда), которые могут совершать высокочастотные колебания частотой от нескольких гигагерц до нескольких терагерц [20]. Из рис. 1 видно, что зависимости  $v_d(F)$ , рассчитанные для случаев отсутствия магнитного поля и воздействия наклонного магнитного поля на сверхрешетку при указанных выше значениях параметров, принципиально различны. Особое внимание привлекает наличие дополнительных максимумов на кривой 2  $v_d(F)$ , при воздействии магнитного поля на систему. В работе [18] было показано, что существование максимумов связано с резонансами между блоховской и циклотронной частотами. Таким образом, магнитное поле, приложенное к сверхрешетке, оказывает существенное влияние на динамику системы.

Для изучения влияния наклонного магнитного поля на динамику как основного состояния системы, так и возмущений, были построены пространственные распределения электрического поля  $F(x)$  (рис. 2, *a*) и соответствующего возмущения  $\tilde{F}(x)$  (рис. 2, *б*) в сверхрешетке при значении напряжения  $V = 9.71$  ( $V' = 355$  мВ). При таком значении напряжения ток, текущий через сверхрешетку (рис. 2, *в*), яв-

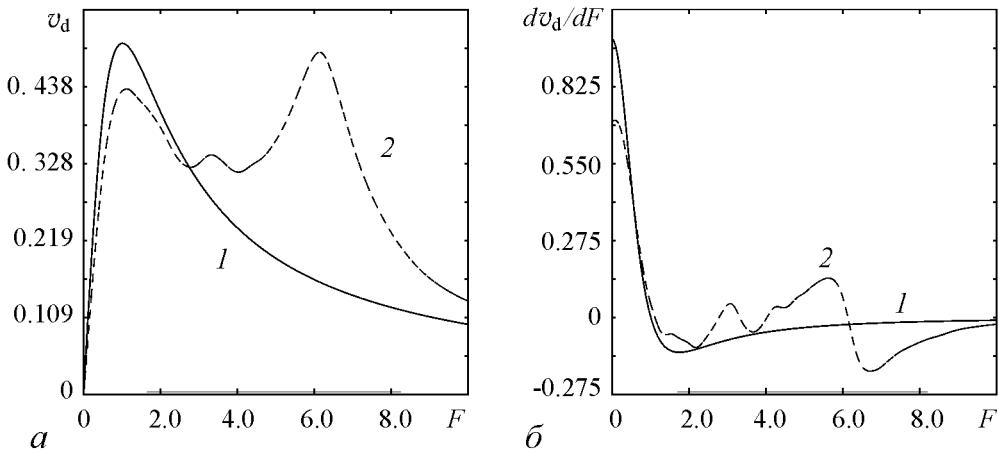


Рис. 1. Зависимости дрейфовой скорости электрона  $v_d$  (*а*) и  $dv_d(F)/dF$  (*б*) от величины электрического поля без воздействия магнитного поля (кривая 1) и при воздействии на систему наклонного магнитного поля (кривая 2)

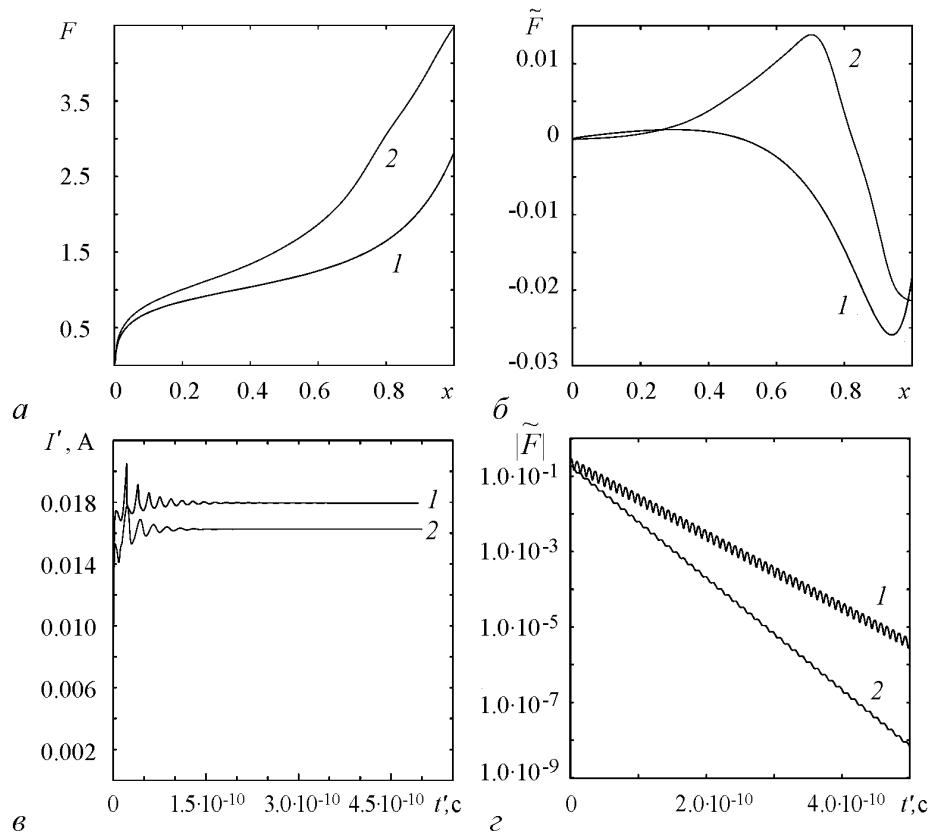


Рис. 2. Пространственные распределения: *a* – напряженности электрического поля в сверхрешетке  $F(x)$ , *б* – возмущения основного состояния  $\tilde{F}(x)$ ; зависимости от времени: *в* – силы тока  $I'$  и *г* – модуля возмущения  $|\tilde{F}|$  (шкала  $|\tilde{F}|$  показана в логарифмическом масштабе). Кривая 2 на графиках соответствует случаю воздействия на систему магнитного поля  $\mathbf{B}' = (B' \cos \theta, 0, B' \sin \theta)^T$ , где  $B' = 12$  Тл,  $\theta = 40^\circ$ , кривая 1 – случаю, когда магнитное поле отсутствует

ляется постоянным во времени<sup>3</sup> для случаев наличия и отсутствия магнитного поля. Однако величина тока оказывается различной в этих случаях. Как показывает рис. 2, *а*, магнитное поле также меняет вид зависимости  $F(x)$  (кривая 2).

Следует отметить, что магнитное поле влияет и на величину коэффициента затухания возмущения стационарного состояния. На рис. 2, *г* показана временная эволюция модуля возмущения стационарного состояния  $|\tilde{F}|$

$$|\tilde{F}| = \sqrt{\int_0^1 \tilde{F}^2(x, t) dx}. \quad (16)$$

При выбранном значении напряжения, как уже было сказано, в системе реализуется устойчивое стационарное состояние. Малое возмущение опорного состояния затухает с течением времени по экспоненциальному закону  $\tilde{F}(x, t) \sim e^{\lambda t}$ . Однако рис. 2, *г* свидетельствует о том, что абсолютная величина коэффициента затухания  $|\lambda|$  оказывается меньше в отсутствие магнитного поля. Следует отметить, что в данных

<sup>3</sup> Для иллюстрации поведения полупроводниковой сверхрешетки на рис. 2, *в* показана зависимость тока от времени с учетом переходного процесса.

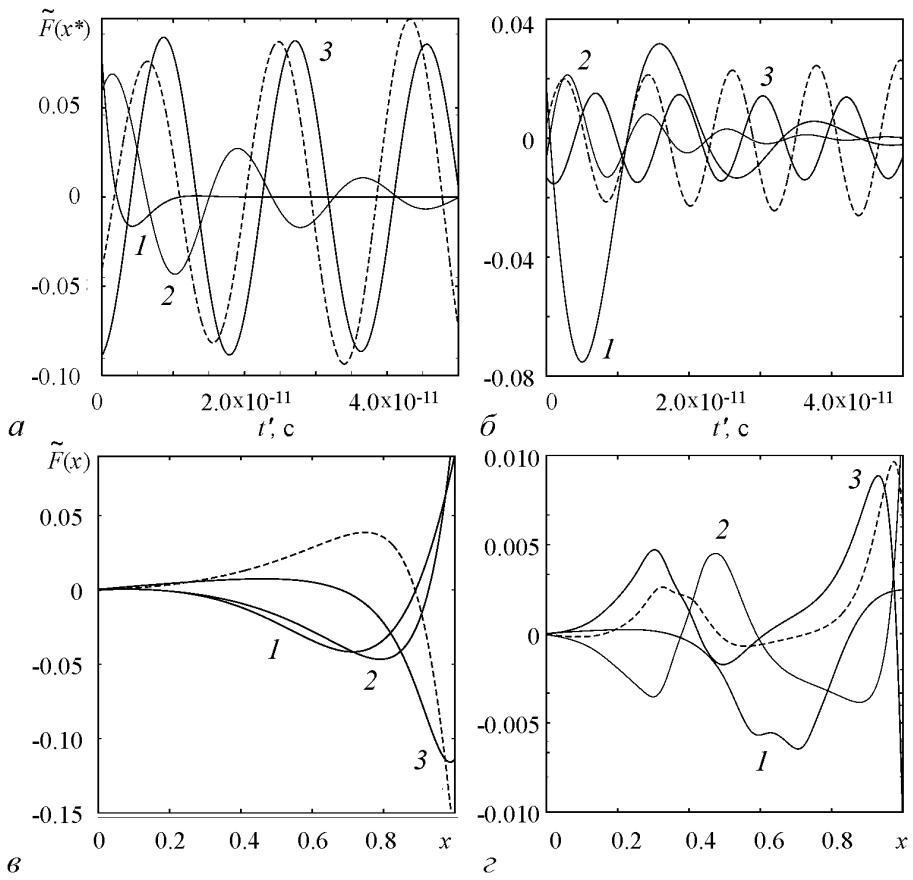


Рис. 3. Зависимости возмущения основного состояния  $\tilde{F}(x^*, t')$  от времени в точке  $x^* = 0.83$ :  $a$  – в отсутствие магнитного поля,  $B' = 0$  Тл,  $V' = 320$  мВ (кривая 1),  $V' = 350$  мВ (2),  $V' = 359$  мВ (3),  $V' = 361$  мВ (штриховая линия),  $b$  – при воздействии магнитного поля  $B' = 12$  Тл,  $V' = 400$  мВ (кривая 1),  $V' = 500$  мВ (2),  $V' = 520$  мВ (3),  $V' = 522$  мВ (штриховая линия); пространственные распределения возмущений, соответствующие тем же значениям напряжения в случае  $B' = 0$  Тл ( $c$ ) и  $B' = 12$  Тл ( $d$ )

случаях старший показатель Ляпунова является комплексным числом  $\lambda + i\omega$ , действительная часть которого  $\lambda$  характеризует уменьшение абсолютной величины возмущения с течением времени, а мнимая  $i\omega$  обуславливает колебательную временную динамику модуля возмущения  $|\tilde{F}|$  (незатухающие колебания на рис. 2,  $\varepsilon$ ).

При увеличении разности потенциалов на сверхрешетке величина  $|\lambda|$  уменьшается и обращается в ноль в точке возникновения генерации в системе. Основываясь на характере поведения возмущения  $\tilde{F}(x, t)$ , можно полагать, что в случае воздействия на систему магнитного поля (с указанными выше параметрами) порог генерации сдвигается в сторону больших напряжений. При этом может изменяться вид пространственного распределения возмущения и частота его колебаний. Для проверки этих предположений были построены временные зависимости  $\tilde{F}(x^*)$  в точке пространства  $x^* = 0.83$  для различных значений напряжения, приложенного к системе в случае отсутствия магнитного поля (рис. 3,  $a$ ) и в случае воздействия магнитного поля (рис. 3,  $b$ ). Видно, что при увеличении напряжения значение модуля коэффициента затухания уменьшается. Без воздействия магнитного поля генерация в системе

начинается при значении напряжения  $V = 9.85$  ( $V' = 360$  мВ) и в этой точке амплитуда колебаний возмущения уже не уменьшается с течением времени, поскольку инкремент затухания становится равным нулю. Кривые на рис. 3, *а* соответствуют следующим параметрам: кривая 1 –  $V = 8.7558$  ( $V' = 320$  мВ), 2 –  $V = 9.577$  ( $V' = 350$  мВ), 3 –  $V = 9.823$  ( $V' = 359$  мВ). Такая же картина наблюдается в случае воздействия наклонного магнитного поля на систему, однако переход к генерации наблюдается при напряжении  $V = 14.23$  ( $V' \approx 520$  мВ). При приближении значения напряжения к этой пороговой величине модуль коэффициента затухания возмущения также уменьшается. На рис. 3, *б* изображены зависимости, полученные при следующих значениях напряжения: кривая 1 –  $V = 10.94$  ( $V' = 400$  мВ), 2 –  $V = 13.68$  ( $V' = 500$  мВ), 3 –  $V = 14.23$  ( $V' = 520$  мВ). Видно, что при значении напряжения  $V = 14.23$  ( $V' = 520$  мВ) возмущение  $\tilde{F}(x, t)$  совершают незатухающие колебания, что свидетельствует о возникновении генерации в системе. Таким образом, как обсуждалось выше, коэффициент затухания возмущения действительно меняет знак в точке бифуркации. Дальнейшее увеличение бифуркационного параметра приводит к росту абсолютной величины возмущения с течением времени. Штриховыми линиями показаны зависимости от времени возмущения  $\tilde{F}(x^*)$  в точке пространства  $x^* = 0.83$ , соответствующие значениям напряжения, превышающим критическое. Видно, что, как при воздействии на структуру магнитного поля, так и при его отсутствии, амплитуда колебаний возмущения нарастает с течением времени, что свидетельствует о развитии неустойчивости в полупроводниковой сверхрешетке. Для иллюстрации влияния магнитного поля на пространственное распределение возмущения были построены зависимости  $\tilde{F}(x)$  для рассмотренных выше случаев отсутствия магнитного поля и его воздействия на сверхрешетку. Видно, что пространственное распределение  $\tilde{F}(x, t)$  при воздействии на систему магнитного поля (рис. 3, *в*) становится более коротковолновым. При этом следует отметить, что частота колебаний возмущения, соответствующая бифуркационным значениям, также оказывается различной в рассмотренных случаях. Можно ожидать, что генерация колебаний тока, протекающего через сверхрешетку, происходит именно на частоте колебаний соответствующего возмущения. На рис. 4 проводится сопоставление вре-

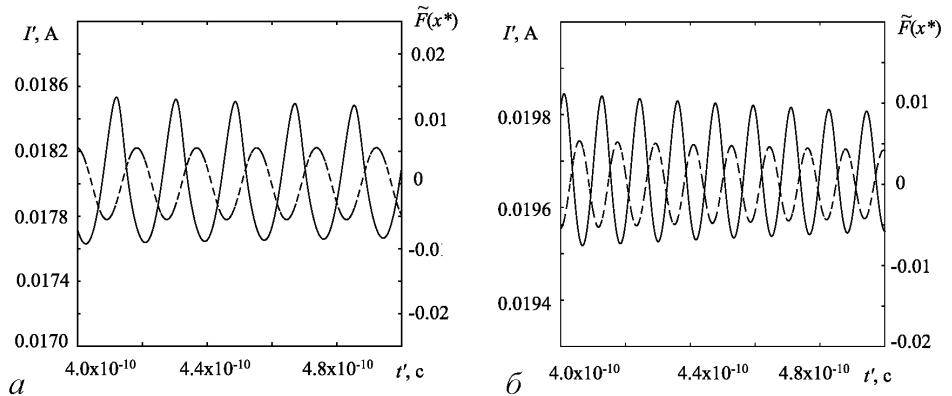


Рис. 4. Зависимости от времени силы тока  $I'(t')$ , текущего через сверхрешетку (сплошная линия), и возмущения основного состояния  $\tilde{F}(x^*, t')$  в точке  $x^* = 0.83$  (штриховая линия), соответствующие следующим случаям: *а* –  $B' = 0$  Тл, при напряжении на сверхрешетке, близком к бифуркационному значению,  $V' \approx 360$  мВ; *б* –  $B' = 12$  Тл, при напряжении на сверхрешетке, близком к бифуркационному значению,  $V' \approx 520$  мВ

менных рядов  $I'(t')$  и  $\tilde{F}(x^*, t')$  в точке пространства  $x^* = 0.83$ , соответствующих значениям напряжения, близким к бифуркационным:  $V = 9.85$  ( $V' \approx 360$  мВ) – рис. 4, *а*;  $V = 14.23$  ( $V' \approx 520$  мВ) – рис. 4, *б*. Видно, что ток и возмущение совершают колебания на одинаковой частоте, однако эта частота в случае воздействия магнитного поля отличается от частоты колебаний при его отсутствии. Таким образом, при достижении значением напряжения критической величины в системе устанавливается одночастотный колебательный режим, частота которого определяется частотой колебания возмущения основного состояния.

### Заключение

В работе исследовано влияние магнитного поля на динамику возмущения основного состояния полупроводниковой сверхрешетки в предгенерационном режиме. Показано, что магнитное поле оказывает влияние как на динамику основного состояния системы, так и на динамику его возмущения. Для исследования пространственно-временной динамики возмущения основного состояния в работе проведена линеаризация модельных уравнений в окрестности опорного состояния и получены уравнения в вариациях. Моделирование основных уравнений и уравнений в вариациях позволяет проследить эволюцию возмущения с течением времени. Полученные результаты показывают, что временная динамика возмущения носит колебательный характер, причем частота колебаний возмущения различна в случаях воздействия магнитного поля на полупроводниковую сверхрешетку и при его отсутствии. Показано также, что при достижении напряжением порогового значения возникает генерация колебаний тока, протекающего через полупроводниковую структуру. При этом колебания оказываются близкими к синусоидальным и имеют частоту, равную частоте колебаний возмущения. Следует отметить, что приложенное внешнее магнитное поле оказывает существенное влияние как на величину порогового напряжения, так и на частоту колебаний возмущения и на его пространственное распределение. Полученные в работе результаты могут быть полезны как в разработке теории устойчивости динамических режимов в полупроводниковой сверхрешетке, так и для потенциальных практических приложений, где сверхрешетка в предпороговом состоянии могла бы использоваться в качестве усилителя или детектора высокочастотных полей.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-672.2012.2) и ведущих научных школ (проект НШ-1430.2012.2), а также Фонда некоммерческих программ «Династия».*

### Библиографический список

1. *Esaki Leo and Tsu R.* Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors // IBM Journal of Research and Development. 1970. Vol. 14, № 1. P. 61.
2. *Романов Ю.А.* О нелинейных эффектах в периодических полупроводниковых структурах // Оптика и спектроскопия. 1972. Т. 33. С. 917.
3. *Mourokh L.G., Horng N.J.M., Romanov Y.A., Romanova Ju.Yu.* Nonlinear terahertz

- oscillations in a semiconductor superlattice // *Journal of Applied Physics*. 2001. Vol. 89, № 7. P. 3836.
4. *Horing N.J.M., Lei X.L. and Cui H.L.* Theory of negative differential conductivity in a superlattice miniband // *Phys Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 25. P. 3277.
  5. *Демидов Е.В. Романов Ю.А.* Нелинейная проводимость и вольт-амперные характеристики двумерных полупроводниковых сверхрешеток // *Физика и техника полупроводников*. 1997. Т. 31, № 3. Р. 308.
  6. *Романова Ю.Ю., Романов Ю.А.* Автоколебания в полупроводниковых сверхрешетках // *ЖЭТФ*. 2000. Т. 118, № 5. Р. 1193.
  7. *Greenaway M.T., Balanov A.G., Schöll E., and Fromhold T.M.* Controlling and enhancing terahertz collective electron dynamics in superlattices by chaos-assisted miniband transport // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 80. 205318.
  8. *Hyart Timo, Mattas J. and Alekseev Kirill N.* Model of the influence of an external magnetic field on the gain of terahertz radiation from semiconductor superlattices // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 103, № 117401.
  9. *Пискарев В.И., Синицын М.А., Шашкин В.И., Явич Б.С., Яковлев М.Л., Белянцев А.М., Игнатов А.А.* Новые нелинейные высокочастотные эффекты и ОДП *s*-типа в многослойных гетероструктурах // *Письма в ЖТФ*. 1986. Т. 43, № 7. Р. 339.
  10. *Ignatov A.A. and Romanov Y.A.* Nonlinear electromagnetic properties of semiconductors with superlattice // *Phys. St. Sol.* 1976. Vol. 73. P. 327.
  11. *Романова Ю.Ю., Романов Ю.А.* Блоховские колебания в сверхрешетках. Проблема терагерцового генератора // *Физика и техника полупроводников*. 2005. Т. 39, № 1. С. 162.
  12. *Зинченко Д.И., Ноздрин Ю.Н., Андронов А.А., Додин Е.П.* Транспорт в сверхрешетках *gaas/alxgal-xas* с узкими запрещенными мини-зонами: низкочастотная отрицательная дифференциальная проводимость и токовые осцилляции // *Физика и техника полупроводников*. 2009. Т. 43, № 2. С. 248.
  13. *Balanov A.G., Fowler D., Patane A., Eaves L., Fromhold T.M.* Bifurcations and chaos in semiconductor superlattices with a tilted magnetic field // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, № 2. 026209.
  14. *Selskii A.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Moskalenko O.I., Alekseev K.N., Greenaway M.T., Wang F., Fromhold T.M., Shorokhov A.V., Khvastunov N.N., and Balanov A.G.* Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices // *Phys. Rev. B*. 2011. Vol. 84. 235311.
  15. *Fromhold T.M., Patane A., Bujkiewicz S., Wilkinson P.B., Fowler D., Sherwood D., Stapleton S.P., Krokhin A.A., Eaves L., Henini M., Sankeshwar N.S., and Sheard F.W.* Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices // *Nature*. 2004. Vol. 428. P. 726.
  16. *Wacker R.* Semiconductor superlattices: A model system for nonlinear transport // *Physics Reports*. 2002. Vol. 357. P. 1.
  17. *Bonilla L.L. and Teitsworth Stephen W.* Nonlinear wave methods for charge transport. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2010.

18. Баланов А.Г., Короновский А.А., Сельский А.О., and Храмов А.Е. Влияние температуры на дрейфовую скорость электронов в полупроводниковой сверхрешетке в продольном электрическом и наклонном магнитном полях // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 3. С. 128.
19. Wacker A. Semiconductor superlattices: A model system for nonlinear transport // Physics Reports. 2002. Vol. 357. P. 1.
20. Raspopin A.S., Zharov A.A., and Cui H.L. Spectrum of electromagnetic excitations in a dc-biased semiconductor superlattice // Journal of Applied Physics. 2005. № 98. 103517.

Саратовский государственный  
Loughborough University, England

Поступила в редакцию 8.05.2012

**NONLINEAR DYNAMICS OF SMALL PERTURBATION  
OF SEMICONDUCTOR SUPERLATTICE REFERENCE STATE NEAR  
GENERATION THRESHOLD**

*K. N. Alekseev, A. G. Balanov, A. A. Koronovskii,  
V. A. Maximenko, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov*

Present research is focused on the dynamics of the perturbation of semiconductor superlattice (SL) reference state near the generation threshold as for the case of influence of titled magnetic field as for the case when the magnetic field is absent. The evolution of the considered perturbation is described with the help of linearized evolution operator. It has been shown that increase of the applied voltage leads to decrease of the attenuation coefficient, which becomes zero in bifurcation point where stationary state loses its stability. Meanwhile, the applied titled magnetic field has a strong effect on the perturbation dynamics, value of applied voltage corresponding to the threshold point and the frequency of arising current oscillations.

*Keywords:* Spatially-extended media, semiconductor superlattice, perturbation of reference state, linear evolution operator, instability development.



Алексеев Кирилл Николаевич – кандидат физико-математических наук, специалист в области теоретической физики. В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания).

England, Loughborough, LE11 3TU  
Loughborough University



*Баланов Александр Геннадьевич* – родился в Саратове (1973), окончил Саратовский государственный университет (1995). После окончания СГУ работал инженером в том же университете. Защитил диссертацию на соисканиеченной степени кандидата физико-математических наук (2000). В настоящее время на постоянной основе работает в университете Лафборо (Великобритания), по совместительству является ведущим научным сотрудником СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика классических и квантовых систем. Опубликовал около 100 научных работ по вышеуказанной тематике.

England, Loughborough, LE11 3TU  
Loughborough University  
E-mail: a.balanov@lboro.ac.uk



*Максименко Владимир Александрович* – родился в городе Аткарске Саратовской области (1989), является студентом 5 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Параллельно с обучением работает лаборантом-исследователем в лаборатории № 5 ОФНС НИИ ЕН СГУ. Областью научных интересов является нелинейная динамика пространственно-распределенных систем и анализ устойчивости динамических режимов. Автор более 10 научных публикаций, лауреат конкурса фонда некоммерческих программ «Династия» (2012).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: maximenkovl@gmail.com



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с односторонней и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru