



Изв. вузов «ПНД», т. 20, № 5, 2012

УДК 530.182, 537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ШУМА

T. E. Вадивасова, A. B. Слепnev

Исследуется влияние мультипликативного шума на автоколебательную среду у порога возникновения генерации. В качестве простейшей модели автоколебательной среды рассматривается цепочка идентичных квазигармонических генераторов с периодическими граничными условиями. Параметры генераторов промодулированы гауссовым белым шумом. Анализируются стохастические бифуркации для случая пространственно однородного и пространственно некоррелированного шума.

Ключевые слова: Автоколебательная среда, квазигармоническое приближение, стохастическая бифуркация, влияние шума.

Введение

Исследование влияния шума на активные распределенные системы и среды является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики. Вопросам влияния шума на распределенные системы посвящена монография [1], а также ряд статей, в которых рассматриваются те или иные вызванные шумом эффекты. Среди этих статей можно указать работы, посвященные явлениям когерентного резонанса в возбудимых средах и стохастического резонанса в бистабильных средах, а также связанный с ними эффект фазовой синхронизации стохастических колебаний [2–4]. Имеются работы, в которых исследуется воздействие шума на неоднородную автоколебательную среду в режиме частотных кластеров и показан эффект разрушения кластеров, сопровождающийся возникновением индуцированного шумом хаоса [5, 6]. В работах [7, 8] обнаружен эффект индуцированных шумом переключений мультистабильных режимов в кольце автогенераторов и автоколебательной среде, приводящие к установлению моды, соответствующей отсутствию фазового сдвига колебаний в среднем на длине системы. Вызванные шумом эффекты в таких сложных нелинейных системах, какими являются активные среды и их пространственно

дискретные модели (цепочки и решетки из активных элементов) могут быть чрезвычайно разнообразны. В целом этот круг проблем еще сравнительно мало исследован. В то же время, важность анализа влияния случайных сил очевидна, поскольку случайные воздействия присутствуют в любой реальной системе и никогда не могут быть полностью устранены.

Одним из важных направлений исследования роли шума в динамических системах является анализ стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций, протекающих в присутствии шума, в том числе вызванных изменениями шумовых параметров [9, 10]. Влияние шума на бифуркационные явления в распределенных системах всё еще мало изучено. В настоящей работе исследуется качественная модель динамики зашумленной квазигармонической автоколебательной среды, представляющая собой кольцо из конечного числа диссипативно связанных квазигармонических автогенераторов. Анализируется влияние мультиплекативного шума на режим возникновения генерации в случаях пространственно некоррелированного и пространственно однородного шума.

1. Исследуемая модель среды

Среда моделировалась с помощью конечной цепочки локально взаимодействующих генераторов, соединенной в кольцо. Такие простые пространственно дискретные модели позволяют выявить многие качественные закономерности, присущие непрерывным средам. В исходных переменных цепочка генераторов описывается уравнениями в безразмерных переменных

$$\ddot{x}_j - (\varepsilon - x_j^2)\dot{x}_j + (\omega_0^2 + \sqrt{2D}n_j(t))x_j = 2\gamma(\dot{x}_{j-1} + \dot{x}_{j+1} - 2\dot{x}_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

с граничными условиями $x_{m+1} = x_1$, $\dot{x}_{m+1} = \dot{x}_1$, где m – число элементов цепочки. Все генераторы полагаются идентичными. Их режим управляет параметром генерации ε . Собственная частота всех генераторов одинакова и в квазигармоническом режиме равна параметру ω_0 . Соседние генераторы взаимодействуют резистивно (диффузионное взаимодействие элементов среды). Степень взаимосвязи определяется параметром γ . В проведенных расчетах полагалось, что $\omega_0 = 1$ и $\gamma = 0.01$. На элементы цепочки действует параметрический шум, модулирующий собственную частоту генераторов. В случае пространственно неоднородного шума его воздействие в разных генераторах задается статистически независимыми нормированными белыми гауссовыми источниками $n_j(t)$: $\langle n_j(t) n_k(t + \tau) \rangle = \delta_{jk} \delta(\tau)$, где δ_{jk} – символ Кронеккера, $\delta(\tau)$ – функция Дирака. Все источники шума характеризуются одной и той же интенсивностью, задаваемой константой D . Пространственно однородный шум означает, что все генераторы находятся под действием одной и той же случайной силы: $n_j(t) \equiv n(t)$.

В рамках квазигармонического приближения от системы (1) можно перейти к усредненным уравнениям для амплитуд и фаз генераторов, используя замену переменных

$$x_j = a_j(t) \cos(\varphi_j(t)), \quad \dot{x}_j = -a_j(t) \sin(\varphi_j(t)), \quad (2)$$

где мгновенные амплитуды $a_j(t)$ и фазы $\varphi_j(t)$ генераторов предполагаются медленными функциями времени по сравнению с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$. Произво-

дится усреднение за период T_0 и преобразование источников шума. В результате приходим к следующим стохастическим уравнениям Стратоновича для мгновенных амплитуд и фаз колебаний парциальных генераторов

$$\begin{aligned}\dot{a}_j &= \frac{a_j}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} - \frac{a_j^2}{4} + \sqrt{D} n_j^{(1)}(t) \right) + \\ &\quad + \gamma (a_{j-1} \cos(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + a_{j+1} \cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) - 2a_j), \\ \dot{\varphi}_j &= \frac{\sqrt{D}}{2} n_j^{(2)}(t) + \gamma \left(\frac{a_{j+1}}{a_j} \sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j) - \frac{a_{j-1}}{a_j} \sin(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \right), \quad (3) \\ &\quad j = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями $a_{m+1} = a_1$, $\varphi_{m+1} = \varphi_1$. Здесь $n_j^{(1)}(t)$ и $n_j^{(2)}(t)$ – преобразованные источники шума. Они являются нормированными гауссовыми источниками белого шума, причем для любого значения дискретной координаты j источники $n_j^{(1)}(t)$ и $n_j^{(2)}(t)$ независимы: $\langle n_j^{(1)}(t) n_j^{(2)}(t + \tau) \rangle \equiv 0$.

В проведенных исследованиях численно интегрировались стохастические уравнения (3). Начальные условия выбирались случайным образом в окрестности нуля. По полученным достаточно длинным зависимостям амплитуд и фаз от времени строились стационарные распределения вероятности переменных $x_j(t) = a_j(t) \times \cos(t + \varphi_j(t))$ для некоторых выбранных элементов цепочки. Рассчитывались также распределения разности колебаний j -го и первого элементов ($x_j - x_1$), то есть при вычислении вероятностных характеристик восстанавливались исходные динамические переменные. Использование укороченных уравнений объясняется тем, что для одного отдельного генератора с параметрическим шумом амплитудно-фазовое приближение позволяет получить аналитическое выражения для стационарного распределения [11, 12]. Тогда результаты, полученные численно, для цепочки можно сравнивать с теоретическими результатами для отдельного генератора. Кроме того, в случае пространственно однородного шума ($n_j^{(1,2)}(t) \equiv n^{(1,2)}(t)$), используя укороченные стохастические уравнения, можно аналитически получить условие устойчивости однородного решения $a_j \equiv 0$, которое соответствует отсутствию стохастических колебаний.

2. Возникновение стохастических колебаний и эволюция стационарного распределения в одиночном генераторе

Укороченные стохастические уравнения для отдельного генератора имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} - \frac{a^2}{4} + \sqrt{D} n^{(1)}(t) \right), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D}}{2} n^{(2)}(t), \quad (4)\end{aligned}$$

где $n^{(1)}(t)$ и $n^{(2)}(t)$ – статистически независимые нормированные гауссовые источники белого шума. Очевидно, первое и второе уравнения системы (4) являются независимыми.

Устойчивость состояния равновесия генератора ($x = 0, y = 0$) легко проанализировать, используя линейное уравнение для малых отклонений амплитуды от нулевого значения $a = 0$

$$\dot{\rho} = \frac{\rho}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} + \sqrt{D} n^{(1)}(t) \right).$$

Показатель Ляпунова для решения $a = 0$ есть средняя скорость экспоненциального изменения возмущения ρ

$$\lambda_{a=0} = \left\langle \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \rho} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} \right).$$

Таким образом, получаем условие устойчивости равновесия

$$2\varepsilon < -D. \quad (5)$$

При $2\varepsilon = -D$ происходит бифуркация, а при $2\varepsilon > -D$ равновесие становится неустойчивым и возникают стохастические колебания. Они вызываются действием шума в подпороговом режиме и их следует отличать от автоколебаний, существующих при положительных значениях параметра ε .

Воспользовавшись независимостью амплитуды и фазы колебаний в модели (4), легко получить аналитические выражения для стационарной плотности вероятности амплитуды и ограниченной фазы $\phi \in [0, 2\pi]$, где $\phi = \varphi \pm 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$p(a) = N a^{2\alpha+1} \exp \left\{ -\frac{a^2}{2D} \right\}, \quad \alpha = \frac{2\varepsilon}{D},$$

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad (6)$$

где нормировочная константа

$$N = \left[\int_0^\infty a^{2\alpha+1} \exp \left\{ -\frac{a^2}{2D} \right\} da \right]^{-1}.$$

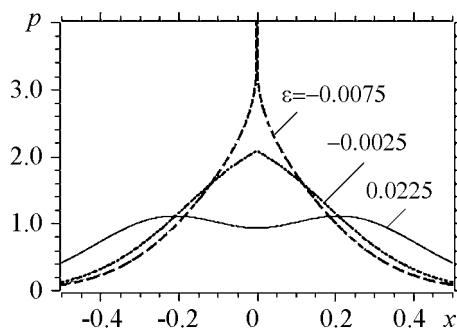


Рис. 1. Графики стационарного распределения переменной x , полученные с использованием аналитического результата (7) для $D = 0.05$ и различных значений параметра ε

Соответственно, переходя к переменным x и $y = \dot{x}$, получаем аналитически выражение для распределение $p(x, y)$

$$p(x, y) = C(x^2 + y^2)^\alpha \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2D} \right\}, \quad (7)$$

где $C = N/2\pi$. Стационарное распределение существует как в области стохастических колебаний при $\varepsilon < 0$, $D > -2\varepsilon$, так и в области автогенерации при $\varepsilon > 0$, однако с изменением параметров ε и D оно претерпевает качественные изменения, что позволяет говорить о феноменологических бифуркациях [10–12]. На рис. 1 приведены

графики стационарного распределения переменной x , полученные с использованием аналитического результата (7) и соотношения

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy.$$

Интегрирование и расчет нормировочного множителя проводились численно.

3. Модель среды с пространственно однородным шумом

Рассмотрим, как влияет на среду пространственно однородный шум. В этом случае положим, что на каждый генератор в модели (1) действует один и тот же источник шума. Тогда в (3) имеем $n_j^{(1,2)}(t) \equiv n^{(1,2)}(t)$.

Для анализа устойчивости однородного решения $a_j \equiv a_0 = \text{const}$, $\varphi_j \equiv \varphi_0 = \text{const}$ запишем линейные уравнения для малых возмущений $\rho_j(t) = a_j(t) - a_0$, $\psi_j = \varphi_j - \varphi_0$. При условии, что нас интересует равновесие в нуле ($a_0 = 0$), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_j &= \frac{\rho_j}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} + \sqrt{D} n^{(1)}(t) \right) + \gamma(\rho_{j+1} + \rho_{j-1} - 2\rho_j), \\ \dot{\psi}_j &= \gamma(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя пространственную периодичность системы (3), раскладываем возмущения по пространственным гармоникам:

$$\begin{aligned} \rho_j &= \sum_{k=0}^{m-1} R_k \cos \frac{\pi k}{m} (j - 1/2), \\ \psi_j &= \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_k \cos \frac{\pi k}{m} (j - 1/2), \end{aligned} \quad (9)$$

где R_k , Ψ_k – амплитуды пространственных гармоник. Подставляя (9) в (8), получаем уравнения для амплитуд гармоник

$$\begin{aligned} \dot{R}_k &= \frac{R_k}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} - 4\gamma \sin^2 \frac{\pi k}{m} + \sqrt{D} n^{(1)}(t) \right), \\ \dot{\Psi}_k &= -4\gamma \Psi_k \sin^2 \frac{\pi k}{m}. \end{aligned} \quad (10)$$

Условия невозрастания возмущений есть

$$\left\langle \frac{\partial \dot{R}_k}{\partial R_k} \right\rangle \leq 0, \quad \left\langle \frac{\partial \dot{\Psi}_k}{\partial \Psi_k} \right\rangle \leq 0.$$

Из (10) получаем

$$\varepsilon \leq -\frac{D}{2} + 4\gamma \sin^2 \frac{\pi k}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (11)$$

При увеличении параметра ε первой начинает возрастать пространственно однородная компонента возмущения ($k = 0$). Таким образом, приходим к условию (5), которое соответствует условию устойчивости точки равновесия в одиночном генераторе.

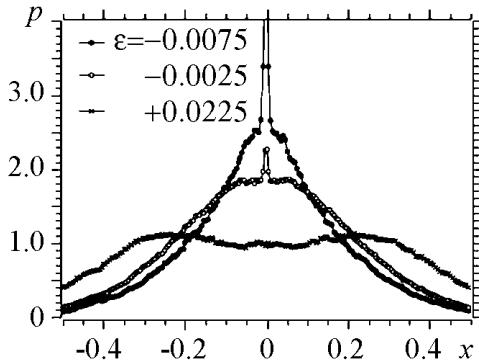


Рис. 2. Графики стационарного распределения переменной x_j , $j = 1$, полученные численно для модели (3) в случае однородного шума с интенсивностью $D = 0.05$ и различных значений параметра ε

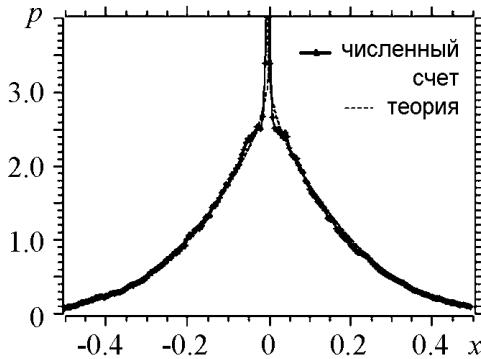


Рис. 3. Сравнение стационарного распределения, полученного для первого генератора цепочки (3) в случае однородного шума при $D = 0.05$ и $\varepsilon = -0.0075$, с соответствующим распределением в одиночном генераторе, построенным с использованием аналитического выражения (7)

окрестности нуля координат имеется некоторое расхождение результатов, связанное, по-видимому, с недостаточностью длины реализации процесса $x_j(t)$, используемой при численном построении распределения.

4. Модель среды с пространственно неоднородным шумом

Рассмотрим модель среды (3) с пространственно неоднородным шумом. В этом случае на генераторы действуют идентичные по своим характеристикам, но статистически независимые случайные силы n_j . В этом случае устойчивость равновесия в нуле координат исследовалась численно с использованием линеаризованных уравнений, задающих эволюцию возмущений амплитуд ρ_j относительно нулевого решения $a_j \equiv 0$.

$$\dot{\rho}_j = \frac{\rho_j}{2} \left(\varepsilon + \frac{D}{2} + \sqrt{D} n_j^{(1)}(t) \right) + \gamma(\rho_{j+1} + \rho_{j-1} - 2\rho_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При $\varepsilon > -D/2$ численно строились распределения $p(x_j)$. Они совпадали для различных j с точностью до численных погрешностей, при этом разность колебаний двух генераторов $(x_j - x_i)$ у порога генерации всегда оставалась вблизи нуля. Таким образом, стохастические колебания всех генераторов цепочки при однородном шуме полностью идентичны. Фазовая мультистабильность, которая может возникать в кольце идентичных автогенераторов [7,8] в области исследованных значений ε не наблюдается. На рис. 2 приведены графики плотности вероятности $p(x_1)$, полученные в цепочке с пространственно однородным шумом при $D = 0.05$ и различных значениях ε . При $\varepsilon > -D/2$ с ростом ε имеет место эволюция распределения $p(x_j)$, в результате которой резкий пик в окрестности нуля сменяется пологим максимумом. При $\varepsilon > 0$ возникает бимодальное распределение, характерное для режима зашумленных квазигармонических автоколебаний.

Рассчитанные для цепочки (3) распределения количественно достаточно точно совпадают с теоретическими кривыми, полученными для одного генератора. Сравнение результатов приведено на рис. 3. Можно отметить, что в

дальнейшем исследовании можно отметить, что в

Теперь, в отличие от (8), каждое уравнение содержит независимый источник белого гауссова шума $n_j^{(1)}(t)$. Интенсивность всех источников полагается одинаковой и равной D . Зависимость от интенсивности шумов D старшего ляпуновского показателя λ_1 , характеризующего изменение длины вектора амплитудных возмущений во времени, приведена на рис. 4. Как можно видеть из представленных на рис. 4 графиков, в случае однородного шума старший ляпуновский показатель решения $a_j \equiv 0$ (кривая 2) становится положительным в окрестности значения $D = -2\epsilon$, что соответствует теоретическим результатам. Некоторые колебания значения λ_1 вблизи нуля, наблюдающиеся для случая однородного шума, объясняются численными погрешностями. Значительные погрешности возникают в результате того, что на каждый элемент среды действует одна и та же случайная сила, в результате чего случайная составляющая в поведении вектора возмущения оказывается более существенной, чем в случае неоднородного шума, когда воздействия на разные элементы некоррелированы. Для неоднородного шума решение $a_j \equiv 0$ становится неустойчивым раньше, при заметно меньшей интенсивности шума (кривая 1). Соответственно область стохастических колебаний в модели (3) в подпороговом режиме генерации будет в этом случае шире. Та же закономерность наблюдается и при других значениях параметра ϵ .

При неоднородном шуме стохастические колебания различных элементов среды уже не будут идентичными. Типичный вид мгновенного пространственного распределения значений x_j представлен на рис. 5, a. Так как источники шума $n_j(t)$ некоррелированы, колебания различных генераторов имеют слабую взаимосвязь.

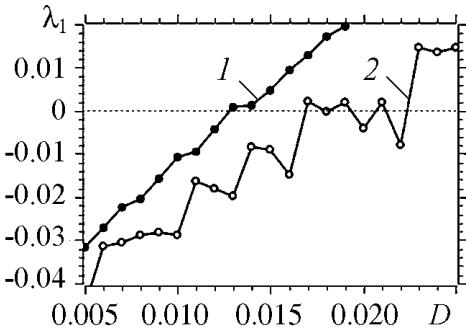


Рис. 4. Зависимость старшего ляпуновского показателя λ_1 решения $a_j \equiv 0$ от интенсивности шума D , полученная при $\epsilon = -0.01$ в случае неоднородного шума (кривая 1) и однородного шума (кривая 2)

(кривая 2) становится положительным в окрестности значения $D = -2\epsilon$, что соответствует теоретическим результатам. Некоторые колебания значения λ_1 вблизи нуля, наблюдающиеся для случая однородного шума, объясняются численными погрешностями. Значительные погрешности возникают в результате того, что на каждый элемент среды действует одна и та же случайная сила, в результате чего случайная составляющая в поведении вектора возмущения оказывается более существенной, чем в случае неоднородного шума, когда воздействия на разные элементы некоррелированы. Для неоднородного шума решение $a_j \equiv 0$ становится неустойчивым раньше, при заметно меньшей интенсивности шума (кривая 1). Соответственно область стохастических колебаний в модели (3) в подпороговом режиме генерации будет в этом случае шире. Та же закономерность наблюдается и при других значениях параметра ϵ .

При неоднородном шуме стохастические колебания различных элементов среды уже не будут идентичными. Типичный вид мгновенного пространственного распределения значений x_j представлен на рис. 5, a. Так как источники шума $n_j(t)$ некоррелированы, колебания различных генераторов имеют слабую взаимосвязь.

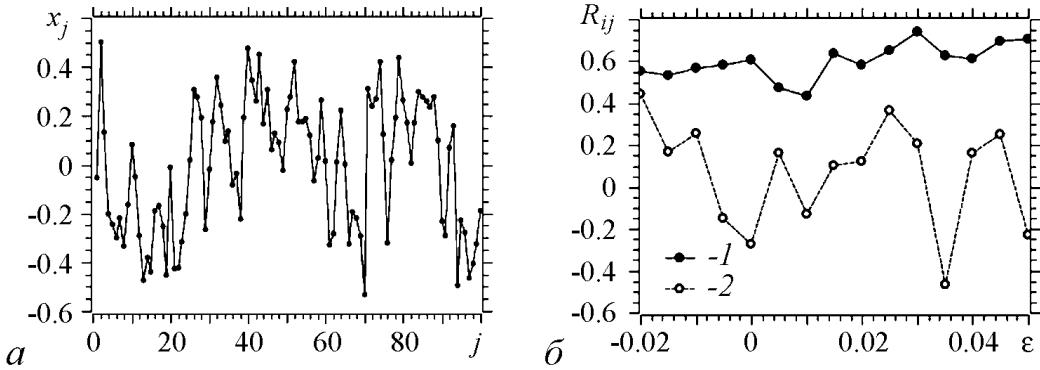


Рис. 5. Иллюстрация слабой пространственной взаимосвязи колебаний в среде с неоднородным шумом: a – мгновенное пространственное распределение значений x_j при $\gamma = 0.01$, $D = 0.05$ и $\epsilon = 0.0225$; б – зависимости коэффициента взаимной корреляции R_{ij} от параметра ϵ при $D = 0.05$ для элементов с номерами $i = 1$, $j = 2$ (кривая 1) и $i = 1$, $j = 50$ (кривая 2)

Рассмотрим коэффициент взаимной корреляции колебаний i -го и j -го генераторов в один момент времени

$$R_{ij} = \frac{\langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle \langle (x_j - \langle x_j \rangle)^2 \rangle}}. \quad (12)$$

Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций, которое, в предположении эргодичности процессов $x_j(t)$, при проведении численных расчетов заменялось на усреднение по времени. Случаю $x_i = x_j$ соответствует максимальное значение коэффициента корреляции $R_{ij} = 1$. Если x_i и x_j независимы, то $R_{ij} = 0$. На рис. 5, δ приведены зависимости коэффициента взаимной корреляции от параметра ε двух соседних элементов ($i = 1, j = 2$) и двух удаленных элементов ($i = 1, j = 50$). Можно видеть, что даже для двух соседних элементов корреляция колебаний не слишком велика. Можно отметить тенденцию незначительного роста коэффициента R_{12} с увеличением ε . Для удаленных генераторов ($i = 1, j = 50$) корреляция еще меньше. При некоторых значениях ε наблюдается антикорреляция ($R_{150} < 0$), что соответствует различным знакам переменных x_1 и x_{50} . Тенденция к росту взаимной корреляции при увеличении ε не наблюдается.

Численно были получены графики плотности вероятности $p(x_j)$ при различных значениях D и ε , и выделена граница возникновения бимодального распределения. Примеры графиков распределения $p(x_1)$, полученных для цепочки с пространственно неоднородным шумом при $D = 0.05$ и различных значениях ε , приведены на рис. 6, a . Можно отметить, что в случае пространственно неоднородного шума бимодальное распределение $p(x_j)$ наблюдается уже при слабо отрицательных значениях параметра ε . Для других элементов цепочки распределения совпадают с $p(x_1)$ в пределах точности вычислений, однако разности колебаний двух генераторов ($x_j - x_i$) отличны от нуля и имеют распределения, представленные на рис. 6, δ . С ростом параметра ε распределение разностных колебаний становится заметно шире, оставаясь при этом унимодальным с максимумом в начале координат.

На рис. 7 приведены графики спектральной плотности мощности колебаний первого генератора $x_1(t)$, рассчитанные для модели (3) в случае однородного и неоднородного шума. Как в режиме чисто стохастических колебаний (рис. 7, a), так и в режиме зашумленной генерации (рис. 7, δ) спектры имеют одну и ту же форму. С ростом параметра ε мощность всех спектральных компонент возрастает. Можно отметить, что спектры, полученные в случае неоднородного и однородного шума,

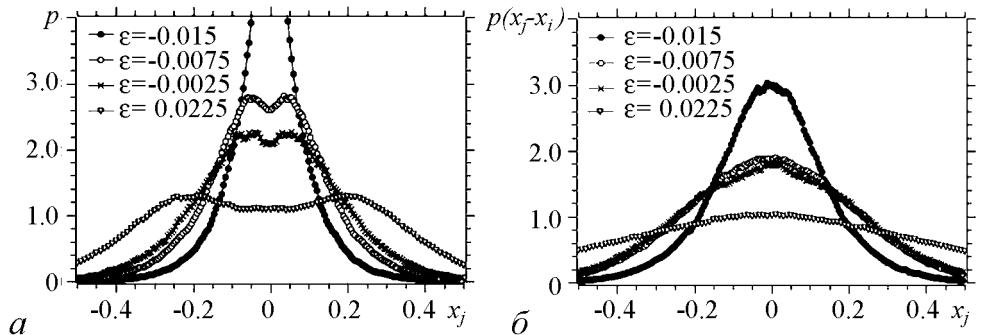


Рис. 6. Графики стационарного распределения переменной x_j , $j = 1$ (a) и $(x_j - x_i)$, $j = 1, i = 50$ (δ), полученные численно для модели (3) в случае неоднородного шума с интенсивностью $D = 0.05$ и различных значений параметра ε

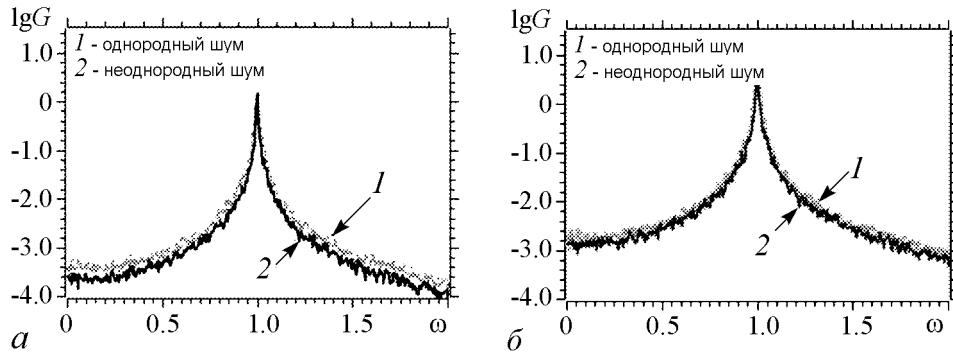


Рис. 7. Спектры мощности колебаний $x_1(t)$, рассчитанные с использованием модели (3) при $\varepsilon = -0.015$ (а) и $\varepsilon = 0.0225$ (б). Спектры даны в логарифмическом представлении и не нормированы (для удобства сравнения). Интенсивность шума фиксировалась $D = 0.05$

почти не отличаются друг от друга. Заметно лишь, что для модели с неоднородным шумом спектральная линия на частоте генерации выглядит чуть-чуть уже, а пьедестал спектра расположен чуть-чуть ниже. Однако эти различия очень незначительны. Таким образом, вероятностные распределения оказываются наиболее чувствительным инструментом в диагностике различий поведения модели среды с различным типом шума.

Границы областей различных режимов в модели среды (3) при однородном и неоднородном шуме приведены на рис. 8.

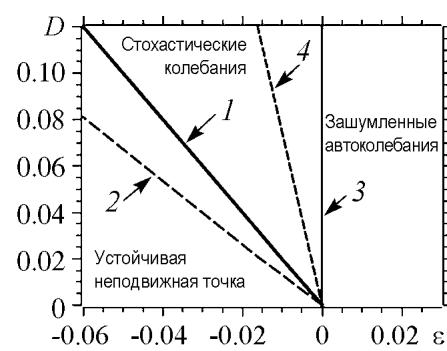


Рис. 8. Границы областей различных режимов в модели среды (3) при однородном и неоднородном шуме: линии 1 и 2 – границы возникновения стохастических колебаний, линии 3 и 4 – границы возникновения бимодального распределения для однородного и неоднородного шума, соответственно

Выводы

Проведенные исследования показали, что эффекты, связанные с влиянием параметрического шума на автоколебательную среду, у порога генерации в целом аналогичны эффектам, наблюдаемым в конечномерном генераторе, являющимся элементом среды. С ростом управляющего параметра при фиксированном уровне шума сначала наблюдается стохастическая бифуркация, в результате которой состояние равновесия в начале координат перестает быть устойчивым и возникают стохастические колебания, затем происходит качественное изменение характера вероятностного распределения колебаний, связанное с возникновением автоколебательного режима. Имеется заметное различие в поведении модели среды в случае пространственно однородного и неоднородного шума. В случае однородного шума границы возникновения стохастических колебаний и режима зашумленной автогенерации соответствуют бифуркациям в отдельно взятом генераторе. В случае неоднородного шума граница возникновения стохастических колебаний смещается в сторону меньших

значений параметра возбуждения и область стохастических колебаний расширяется. Возникновение бимодального распределения $p(x_j)$, с которым обычно связывают переход к режиму генерации, в случае неоднородного шума также происходит раньше и наблюдается уже при отрицательных значениях параметра генерации ε . Однако утверждать, что бимодальное распределение $p(x_j)$ однозначно связано с режимом генерации и, что таким образом неоднородный шум приводит к переходу автоколебательной среды в режим генерации уже при отрицательных значениях ε , на наш взгляд, было бы преждевременно. Здесь возможны численные ошибки, которые особенно значительны при расчете плотности вероятности в окрестности нуля. Кроме того, для более обоснованных утверждений требуется рассчитывать совместные плотности вероятностей двух переменных x_j и y_j , что существенно сложнее. Таким образом, вопрос о границе автоколебательного режима остается открытым и требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гос. контракты № 14.740.11.0074 и 14.B37.21.0751.

Библиографический список

1. *Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M.* Noise in spatially extended systems. New York: Springer, 1999.
2. *Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F.* Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // Phys.Rev.Lett. 1999. Vol. 83, № 23. P. 4896.
3. *Hu B., Zhou Ch.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 2. P. R1001(1–4).
4. *Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A.R., Löcher M., Ditto W.L.* Noise enhanced propagation // Phys.Rev.Lett. Vol.81(23). P. 5048.
5. *Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Anishchenko V.S.* Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 036225(1–8).
6. *Anishchenko V.S., Akopov A.A., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction // New Journal of Physics. 2006. Vol. 8. P. 84(1–11).
7. *Shabunin A.V., Feudel U., Astakhov V.V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators // Physical Review E. 2009. Vol. 80, № 2. P. 026211.
8. Слепnev A.B., Vadivasova T.E. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 4. С. 53.
9. Хорстхемке B., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
10. *Arnold L.* Random dynamical systems. Chapter 9. Bifurcation theory. Springer, 2003.
11. *Arnold L., Sri Namachchivaya N., Schenk-Hoppé K.R.* Toward an understanding of

- stochastic Hopf bifurcation: A case study // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947.
12. Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Стохастические бифуркции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 5. С. 3.
- Саратовский государственный
им. Н.Г. Чернышевского
- Поступила в редакцию 8.02.2012
После доработки 5.09.2012

**THE STUDIES OF THE ARISING OF OSCILLATIONS
IN THE QUASI-HARMONIC MODEL OF THE SELF-SUSTAINED
OSCILLATORY MEDIUM UNDER MULTIPLICATIVE NOISE EXCITATION**

T. E. Vadivasova, A. V. Slepnev

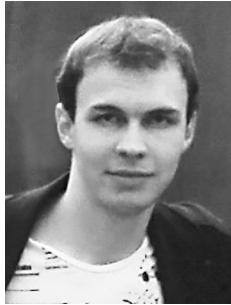
The multiplicative noise influence on the self-sustained oscillatory medium near the oscillation threshold is studied. The chain of the identical quasi-harmonic self-sustained oscillators with the periodic boundary conditions is taken as a simplest model of the oscillatory medium. The parameters of the oscillators are modulated with the white Gaussian noise. The stochastic bifurcations are analyzed for the cases of homogenous and spatially-nonhomogenous noise.

Keywords: Self-oscillatory medium, quasi-harmonic approximation, stochastic bifurcation, noise influence.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



Слепnev Андрей Вячеславович – родился в 1987 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). В 2011 году получил в СГУ степень магистра физики по направлению «Физика». Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы: динамика распределенных систем, пространственные структуры, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com