



БИФУРКАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ: УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова

Подход, в рамках которого картина бифуркаций дискретных отображений рассматривается в пространстве инвариантов матрицы возмущений (матрицы Якоби), распространен на случай трех и четырех измерений. Выявлена картина поверхностей, линий и точек бифуркаций в этом случае, которая является универсальной для всех отображений. Представлены примеры отображений, параметры которых регулируются непосредственно инвариантами матрицы Якоби.

Ключевые слова: Отображения, бифуркации, мультипликатор, матрица возмущений.

Введение

Отображения являются важным классом динамических систем, которые интересны как сами по себе, так и в контексте разнообразных приложений в радиофизике, электронике, биофизике, популяционной биологии и т.д. [1–7]. Отображения могут выступать в качестве сечений Пуанкаре потоков (систем дифференциальных уравнений), а могут конструироваться и непосредственно для конкретной задачи, «из первых принципов». В то же время, исследование отображений гораздо проще, нежели дифференциальных уравнений [1–10]. При этом время, затрачиваемое для необходимых вычислений на компьютере, сокращается на порядки.

Как известно, характер устойчивости неподвижных точек (и циклов), а также тип бифуркаций отображений определяется их мультипликаторами. В свою очередь, мультипликаторы являются собственными числами матрицы возмущений (матрицы Якоби) и их число равно размерности отображения. Для двумерных отображений известен удобный в методическом плане подход, в рамках которого картина бифуркаций представляется на плоскости специальных параметров – инвариантов матрицы возмущений [4,11]. В случае двух измерений – это след и якобиан этой матрицы. Удобство и важность такого подхода обусловлены тем, что получаемая картина оказывается, во-первых, достаточно *полной*, а во-вторых, *универсальной* для всех двумерных отображений. Представляется интересным и методически важным развить аналогичный подход для случая большего числа измерений.

Кроме того, в работе [12] было предложено и исследовано двумерное отображение, параметры которого являются непосредственно инвариантами матрицы возмущений. Его можно интерпретировать как своего рода универсальное отображение, демонстрирующее основные бифуркации коразмерности один и два. (В этом заключается его преимущество перед отображением Эно, для которого не наблюдаются бифуркация Неймарка–Сакера, система языков Арнольда, а также бифуркации типа резонанс 1:1 и 1:2.) Таким образом, возникает также задача о построении аналогичных отображений для случаев большего числа измерений.

Соответствующие задачи решаются в настоящем сообщении. В качестве первого шага напомним основные моменты теории двумерных отображений в рамках развиваемого подхода.

1. Бифуркации двумерных отображений и универсальная модель

Двумерное отображение в общем случае задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Оно может иметь неподвижные точки (x_0, y_0) , такие что

$$\begin{aligned} x_0 &= f(x_0, y_0), \\ y_0 &= g(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Характер устойчивости неподвижной точки определяется вычисленной в такой точке матрицей Якоби системы (1)

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}. \quad (3)$$

Собственные числа матрицы (3) представляют собой мультипликаторы отображения μ_1 и μ_2 , для которых справедливо соотношение

$$\mu^2 - S\mu + J = 0, \quad (4)$$

где S и J – след и якобиан матрицы возмущений (3).

Бифуркации двумерных отображений, как мы отмечали во введении, удобно представить на плоскости след–якобиан (S, J) [4,11]. В этом случае на плоскости (S, J) имеет место характерный «треугольник устойчивости», показанный на рис. 1. Его стороны отвечают основным **бифуркациям коразмерности один** [8–10]:

- касательная бифуркация (*fold*), $\mu = +1$: $1 - S + J = 0$;
- бифуркация удвоения периода (*flip*), $\mu = -1$: $1 + S + J = 0$;
- бифуркация Неймарка–Сакера, $J = 1$.

Вершины треугольника соответствуют простейшим **бифуркациям коразмерности два** [8–10]:

- резонанс 1 : 1, R_1 , когда $\mu_1 = \mu_2 = +1$: $S = 2, J = 1$;
- резонанс 1 : 2, R_2 , когда $\mu_1 = \mu_2 = -1$: $S = -2, J = 1$;
- бифуркация *fold-flip*, *ff*, когда $\mu_1 = +1$ и $\mu_2 = -1$: $S = 0, J = -1$.

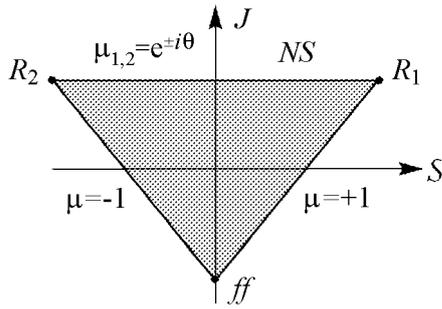


Рис. 1. Треугольник устойчивости двумерных отображений на плоскости след – якобиан матрицы возмущений

Представленная картина является универсальной в том смысле, что при исследовании конкретного отображения достаточно установить связь его параметров с параметрами след и якобиан матрицы возмущений (S, J) , и тогда «автоматически» будет выполнен бифуркационный анализ с помощью соотношений (5а) и (5б). Это очень удобно при решении конкретных задач.

В [12] было предложено **универсальное двумерное отображение**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jx_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Особенность отображения (6) состоит в том, что его параметрами являются непосредственно след и якобиан матрицы возмущений (S, J) . Поэтому картина основных бифуркаций тривиальной неподвижной точки этого отображения будет даваться непосредственно «треугольником устойчивости» (см. рис. 1). Более полно свойства динамики отображения (6) описаны в [12].

2. Трехмерные отображения. Бифуркации в пространстве инвариантов матрицы возмущений

В общем виде трехмерное отображение задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n). \end{aligned} \quad (7)$$

Оно может иметь неподвижную точку (x_0, y_0, z_0) , для которой одна итерация отображения (7) приводит его в ту же точку. Малые возмущения в окрестности неподвижной точки эволюционируют в соответствии с матрицей Якоби, вычисленной в этой точке

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{pmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)}. \quad (8)$$

Для трехмерных отображений матрица \hat{M} – это матрица 3×3 , так что уравнение для определения мультипликаторов

$$\det(\hat{M} - \mu \hat{E}) = 0 \quad (9)$$

имеет третий порядок, где \hat{E} – единичная матрица. Поскольку уравнение для определения собственных чисел действительное, то либо все три мультипликатора могут быть действительными числами, либо один из них является действительным, а два оставшихся – комплексно-сопряженными. Таким образом, критерий устойчивости состоит в том, что неподвижная точка будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы.

Как и в случае двух измерений, для анализа картины бифуркаций используем в качестве параметров инварианты матрицы возмущений. Для этого надо найти связь этих параметров с мультипликаторами. Обозначим мультипликаторы отображения (7) через μ_1, μ_2, μ_3 . Тогда уравнение третьего порядка (9) может быть записано в форме

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) = 0. \quad (10)$$

Раскрывая в (10) скобки, приходим к соотношению

$$\mu^3 - S\mu^2 + H\mu - J = 0, \quad (11)$$

в котором введены обозначения

$$\begin{aligned} S &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ H &= \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3, \\ J &= \mu_1\mu_2\mu_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины S, H, J и есть три инварианта матрицы возмущений (матрицы Якоби).

Сначала выясним, как в случае трехмерных отображений представлены бифуркации, характерные для одного и двух измерений. Обсудим их по возрастающей коразмерности.

Бифуркации коразмерности один.

- *Касательная бифуркация*, $\mu = +1$. Подставляя $\mu = +1$ в соотношение (11), получаем условие этой бифуркации

$$H = J - 1 + S. \quad (13)$$

- *Бифуркация удвоения периода*, $\mu = -1$. Подставляя $\mu = -1$ в (11), получаем

$$H = -J - 1 - S. \quad (14)$$

- *Бифуркация Неймарка–Сакера*. Условием этой бифуркации является обращение в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов, так что $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_2 = e^{-i\theta}$. Подставим эти значения в соотношения (12). Тогда получим уравнения, содержащие только третий мультипликатор и фазу θ

$$S = 2 \cos \theta + \mu_3, \quad H = 2\mu_3 \cos \theta + 1, \quad J = \mu_3. \quad (15)$$

Исключая их, получаем условие бифуркации Неймарка–Сакера

$$H = SJ - J^2 + 1. \quad (16)$$

Бифуркации коразмерности два.

- *Резонанс 1:1, R_1 .* Для этой бифуркации два мультипликатора обращаются в единицу: $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1$. Подставляя эти соотношения в (12) и исключая третий мультипликатор, имеем

$$S = J + 2, \quad H = 2J + 1. \quad (17)$$

- *Резонанс 1:2, R_2 .* Условием бифуркации являются равенства $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1$. Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем

$$S = J - 2, \quad H = -2J + 1. \quad (18)$$

- *Бифуркация $fold$ - $flip$, ff .* Для этой бифуркации $\mu_1 = +1, \mu_2 = -1$, так что из (12) следует

$$S = -J, \quad H = -1. \quad (19)$$

В трехмерной системе появляются также новые бифуркации коразмерности два, обусловленные наличием трех измерений и трех мультипликаторов. Действительно, бифуркация Неймарка–Сакера связана с комплексно-сопряженными мультипликаторами, лежащими на единичной окружности: $\mu_1 = e^{i\theta}, \mu_2 = e^{-i\theta}$. В трехмерной системе появляется дополнительное условие устойчивости, связанное с третьим мультипликатором: $-1 < \mu_3 < 1$. Таким образом, возможны новые бифуркации коразмерности два, когда одновременно выполняются условие бифуркации Неймарка–Сакера и условие обращения в $+1$ или -1 третьего мультипликатора. Новые бифуркации носят названия *фолд–Неймарк–Сакер* ($fold$ - NS) и *флип–Неймарк–Сакер* ($flip$ - NS) [8,9].

Найдем условия реализации таких бифуркаций. Поскольку, в соответствии с третьим уравнением (15), $\mu_3 = J$, то равенство $\mu_3 = \pm 1$ приводит к условию $J = \pm 1$. Таким образом, с учетом (16) для новых бифуркаций имеем

- $fold$ - NS : $H = S, \quad J = 1,$ (20)

- $flip$ - NS : $H = -S, \quad J = -1.$ (21)

Рассмотрим вложение описанной картины бифуркаций в пространство инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) .

В пространстве (J, S, H) бифуркациям коразмерности один будут отвечать некоторые *поверхности*, а бифуркациям коразмерности два – *линии*. Для выяснения структуры пространства (J, S, H) построим сначала его сечения плоскостями $S = \text{const}$ (рис. 2).

Сечение $S = 0$ (рис. 2, *a*) – можно видеть линию бифуркации Неймарка–Сакера NS , которая в соответствии с (16) представляет собой отрезок параболы $H = 1 - J^2$. Эта линия ограничена двумя новыми точками, характерными для трехмерных отображений: $fold$ - NS ($J = 1, H = 0$) и $flip$ - NS ($J = -1, H = 0$). Через эти точки проходят также ограничивающие область устойчивости линии бифуркаций $\mu = +1$: $H = J - 1$ и $\mu = -1$: $H = -J - 1$. Они, в свою очередь, пересекаются в точке $fold$ - $flip$ с координатами $(J = 0, H = -1)$. Заметим, что резонансы R_1 и R_2

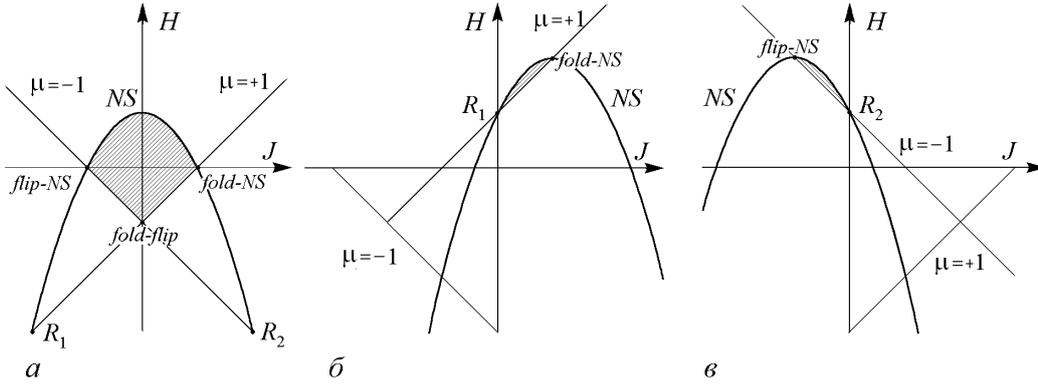


Рис. 2. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы Якоби (J, S, H) плоскостями $S = 0$ (а), 2 (б), -2 (в). Область устойчивости неподвижной точки заштрихована

не попадают в область устойчивости – для них третий мультипликатор оказывается по модулю больше единицы.

Сечение $S = 2$ (рис. 2, б) – область устойчивости ограничена линией бифуркации Неймарка–Сакера, концевыми точками которой являются теперь точки *fold-NS* и резонанса R_1 . Второй границей области устойчивости является линия $\mu = +1$.

Сечение $S = -2$ (рис. 2, в) – отрезок линии Неймарка–Сакера ограничен точками *flip-NS* и резонанса R_2 . Второй границей области устойчивости является линия мультипликатора $\mu = -1$.

Представленные рисунки иллюстрируют возможные типичные варианты устройства границы области устойчивости неподвижной точки трехмерных отображений.

Используя рис. 2, построим картину вложения бифуркаций в трехмерное пространство инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) , на которой (рис. 3) можно видеть следующие поверхности:

- поверхность $H = SJ - J^2 + 1$ отвечает условию обращения в единицу модуля двух комплексно-сопряженных мультипликаторов;
- поверхности $H = J - 1 + S$ и $H = -J - 1 - S$ показаны на рисунке при помощи нанесенной сетки координат. Они являются плоскостями в трехмерном пространстве параметров и отвечают условиям обращения одного из мультипликаторов в $+1$ и -1 .

Можно видеть, что за бифуркацию Неймарка–Сакера отвечает лишь часть поверхности $H = SJ - J^2 + 1$. Ее устройство удобно исследовать, обратившись к показанной на рис. 4 проекции поверхности бифуркации Неймарка–Сакера на плоскость (J, S) . В соответствии с этим рисунком, в пространстве инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) бифуркации Неймарка–Сакера отвечает поверхность, ограниченная линиями *fold-NS*, *flip-NS*, резонансов R_1 и R_2 .

Из рис. 3 и рис. 4 можно видеть, что имеются также точки новых **бифуркаций коразмерности три**. Они обозначены буквами A и бывают четырех типов.

- A_1 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *flip-NS* и R_1 .
- A_2 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1, \mu_3 = +1$, общая точка бифуркаций *fold-NS* и R_1 .
- A_3 : $\mu_1 = +1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *fold-NS* и R_2 .
- A_4 : $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -1$, общая точка бифуркаций *flip-NS* и R_2 .

Координаты точек таких бифуркаций в пространстве параметров (J, S, H) :

$$A_1(-1, 1, -1); \quad A_2(1, 3, 3); \quad A_3(1, -1, -1); \quad A_4(-1, -3, 3).$$

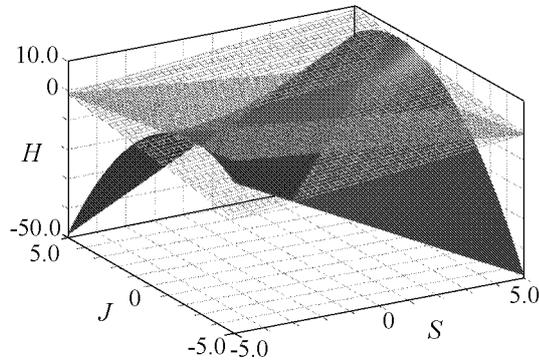


Рис. 3. Поверхность бифуркации Неймарка–Сакера, плоскости мультипликаторов $\mu = +1$ и $\mu = -1$ трехмерных отображений в пространстве инвариантов матрицы возмущений (J, S, H)

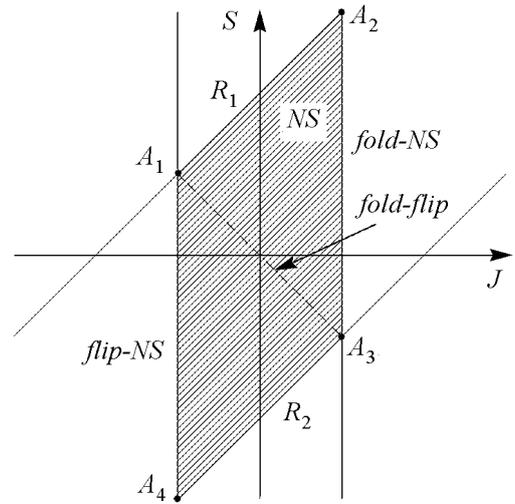


Рис. 4. Проекция поверхности Неймарка–Сакера NS и ограничивающих ее линий *flip-NS*, *fold-NS*, R_1 и R_2 на плоскость (J, S) . Пунктир – проекция линии *fold-flip*

В соответствии со свойствами матрицы возмущения, ее якобиан J отвечает за величину диссипации в системе. С ростом якобиана диссипация уменьшается, так что случай $J = 1$ соответствует *консервативной* системе. Поэтому с физической точки зрения важно построить также и сечения пространства параметров плоскостями $J = \text{const}$.

- *Сечение $J = 0$* . Это очень сильная диссипация, система редуцируется к двумерному отображению. Из уравнений для мультипликаторов (11) получаем, что $\mu^2 - S\mu + H = 0$. Таким образом, картине бифуркаций отвечает классический треугольник устойчивости на плоскости (S, H) . Интересно, что при переходе к двумерному отображению роль якобиана играет третий инвариант матрицы возмущений H .
- *Сечение $J = 0.5$* . Картине бифуркационных линий и точек отвечает искаженный по форме «треугольник устойчивости», показанный на рис. 5. При этом линии и точки бифуркаций качественно отвечают случаю двумерных отображений.
- *Сечение $J = 1$* . Это случай нулевой диссипации, отвечающий переходу к консервативному пределу. При этом линия Неймарка–Сакера и линия $\mu = +1$ в соответствии с (13) и (16) даются одним и тем же соотношением: $H = S$. Таким образом, эти линии сливаются, и область устойчивости неподвижной точки исчезает. Это интересная особенность трехмерных отображений. В двумерных отображениях это не так: при приближении якобиана к единице область устойчивости не стремится к нулю, а заключена в интервале $-1 < S < 1$.
- *Сечение $H = \text{const}$* . Для полноты картины построим сечение пространства параметров плоскостью $H = 0$. В этом случае бифуркация Неймарка–Сакера (16) дается отрезками линии $S = (J^2 - 1)/J$. В соответствии с (13), (14) бифуркации $\mu = +1$ отвечает условие $S = 1 - J$, а бифуркации $\mu = -1$ – условие $S = -1 - J$. Суммарная картина показана на рис. 6. Можно видеть, что одна

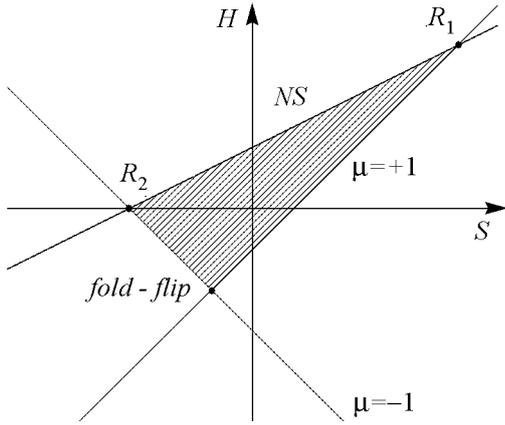


Рис. 5. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $J = 0.5$

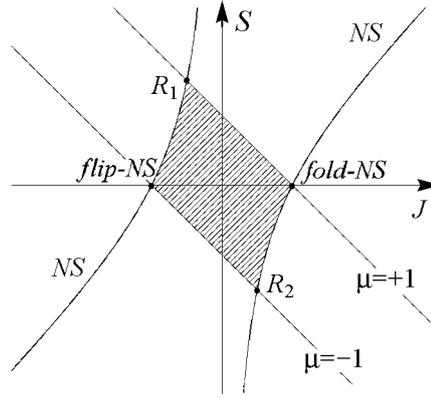


Рис. 6. Бифуркационные линии и точки трехмерных отображений в сечении пространства инвариантов матрицы возмущений (J, S, H) плоскостью $H = 0$

ветвь линии бифуркации Неймарка–Сакера ограничена точкой резонанса 1:1 R_1 ($J = -1/2, S = 3/2$) и точкой $flip-NS$ ($J = -1, S = 0$). Вторая ветвь ограничена точкой резонанса 1:2 R_2 ($J = 1/2, S = -3/2$) и точкой $fold-NS$ ($J = 1, S = 0$).

Представленные иллюстрации дают картину возможных вариантов устройства бифуркационных поверхностей и линий в трехмерном пространстве параметров.

3. Примеры трехмерных отображений. Универсальное трехмерное отображение

Обсудим теперь в контексте проведенного рассмотрения некоторые примеры трехмерных отображений. Трехмерные отображения, известные в литературе, встречаются обычно как достаточно искусственные конструкции.

Отображение Рихтера [13]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - y_n^2 + bz_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Автор называет его «обобщенным отображением Эно» (generalized Henon map), хотя структура первого уравнения не вполне отвечает отображению Эно. Система (22) – это двухпараметрическая модель. Нетрудно показать, что это отображение имеет две неподвижных точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = [b - 1 \pm \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}]/2, \tag{23}$$

а его матрица Якоби имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2y_0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Уравнение (9) в этом случае приводит к характеристическому уравнению $\mu^3 + 2y_0\mu - b = 0$. Сравнивая его с (11), с учетом выражения для неподвижной точки, заключаем, что инварианты матрицы Якоби даются соотношениями

$$S = 0, \quad J = b, \quad H = b - 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}. \quad (25)$$

Таким образом, модель Рихтера (22) характеризуется равным нулю следом матрицы возмущений $S = 0$. Поэтому она дает частный случай трехпараметрической картины, отвечающий рис. 2, а. Причем на плоскости параметров (b, a) в соответствии с (16), (20), (21) имеет место линия Неймарка–Сакера $4a = 3b^2 + 2b - 1$, ограниченная точками *fold-NS* ($a = 0, b = 1$) и *flip-NS* ($a = 0, b = -1$).

Отображение Спротта. Задача о трехмерном квадратичном отображении (7) формулируется Спроттом в общем виде, когда функции $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ являются квадратичными формами. В этом случае отображение содержит 30 коэффициентов. Спротт развивает определенную классификацию, однако, существенным оказывается все же очень большое число моделей. Простейшие варианты отображений Спротта [14]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + ax_n + by_n - z_n^2, & x_{n+1} &= 1 + ax_n y_n + by_n - z_n^2, & x_{n+1} &= 1 + az_n + bx_n y_n, \\ y_{n+1} &= x_n, & y_{n+1} &= x_n, & y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= y_n, & z_{n+1} &= y_n, & z_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \quad (26)$$

Это, впрочем, тоже двухпараметрические модели, так что их бифуркационный анализ дает лишь некоторую частную картину.

Трехмерное отображение Эно (3D Hénon map) [15] может быть построено как обобщение известного двумерного отображения Эно.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + by_n + cz_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \quad (27)$$

Отображение (27) имеет две неподвижные точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{b + c - 1 \pm \sqrt{(b + c - 1)^2 + 4a}}{2}. \quad (28)$$

При этом надо оставить только верхний знак, так как знак « \leftarrow » отвечает всегда неустойчивой точке. Действуя стандартным образом, нетрудно получить связь параметров отображения и инвариантов матрицы возмущений с параметрами трехмерного отображения Эно

$$S = 1 - b - c - \sqrt{(1 - b - c)^2 + 4a}, \quad H = -b, \quad J = c. \quad (29)$$

Это уже трехпараметрическая модель. В [15] представлены некоторые интересные свойства такого отображения. В частности, установлено, что наряду с *Эно-подобным* хаотическим аттрактором (*Henon-like attractor*) в системе возможен другой тип аттрактора – *Лоренце-подобный* (*Lorenz-like attractor*).

Отметим, что анализ трехмерных консервативных отображений (случай $J = 0$) на плоскости двух оставшихся инвариантов (S, H) проведен Дуллином и Мейсом в [16].

Представляется полезным по аналогии с [12] построить **универсальное трехмерное отображение**. Можно сформулировать требования к такому отображению:

- оно должно характеризоваться тремя существенными параметрами;
- его параметры должны совпадать с инвариантами матрицы возмущений;
- в случае сильной диссипации $J = 0$ отображение должно редуцироваться к двумерному, отвечающему картине на рис. 1¹.

Для построения такого отображения используем ту же нелинейность, что и для двумерного случая (6), плюс введем дополнительное запаздывание на один шаг дискретного времени

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2) + Jy_{n-1}, \\ y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда в традиционной форме

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2) + Jz_n, \\ y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2), \\ z_{n+1} &= y_n. \end{aligned} \quad (31)$$

Полученное отображение имеет неподвижную точку в нуле $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Матрица Якоби для (31) в этой точке и уравнение (9) для поиска мультипликаторов имеют вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} S & -H & J \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\det \begin{pmatrix} S - \mu & -H & J \\ 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & -\mu \end{pmatrix} = \mu^3 - S\mu^2 + H\mu - J = 0. \quad (33)$$

Таким образом, матрица Якоби действительно имеет своими инвариантами набор параметров (S, J, H) .

¹То есть должны наблюдаться оба бифуркационных сценария: удвоение периода и переход к квазипериодическим режимам через бифуркацию Неймарка–Сакера. Отметим, что трехмерное отображение Эно (27) этому критерию не удовлетворяет.

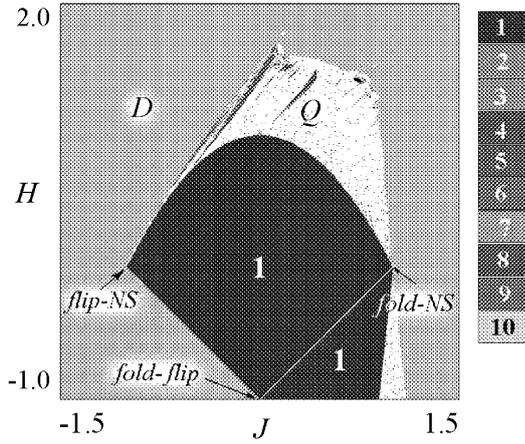


Рис. 7. Карта динамических режимов универсального трехмерного отображения в сечении $S = 0$

Карта построена следующим образом [4]: в каждой точке плоскости параметров численно определяется период цикла отображения (31), а затем эта точка окрашивается в цвет, соответствующий величине периода. Непериодические режимы (квазипериодические и хаос) показаны белым цветом, а область разбегания траекторий D – оттенком серого. Отметим, что на линии, соединяющей точки $fold-flip$ и $fold-NS$ наблюдается жесткий переход от одной неподвижной точки к другой. Рис. 7 следует сопоставить с рис. 2, а.

В целом отображение (31) при вариации параметров (S, J, H) дает картину бифуркаций, отвечающую всем перечисленным выше вариантам сечений пространства параметров на рис. 2, 5 и 6.

4. Бифуркации четырехмерных отображений. Двойная бифуркация Неймарка–Сакера

Четырехмерное отображение в общем виде задается соотношениями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n, z_n, w_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n, z_n, w_n), \\ z_{n+1} &= v(x_n, y_n, z_n, w_n), \\ w_{n+1} &= h(x_n, y_n, z_n, w_n). \end{aligned} \quad (35)$$

Оно может иметь неподвижные точки (x_0, y_0, z_0, w_0) . Проведем анализ таких отображений аналогично тому, как это было сделано для случая трех измерений, то есть выясним условия существования основных бифуркаций в пространстве параметров инвариантов матрицы возмущений.

Уравнение для поиска мультипликаторов $\det(\hat{M} - \mu\hat{E}) = 0$ в рассматриваемом случае имеет четвертый порядок, так что справедливо соотношение

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) = 0. \quad (36)$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению

$$\mu^4 - S\mu^3 + H\mu^2 - L\mu + J = 0, \quad (37)$$

При нулевом якобиане $J = 0$ уравнение (31) редуцируется к двумерному отображению, полностью аналогичному универсальному двумерному отображению (6). Его след равен S , а роль якобиана выполняет параметр H

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Итак, отображение (31) удовлетворяет всем сформулированным выше критериям. На рис. 7 показана карта динамических режимов такого отображения

в котором введены следующие обозначения для инвариантов матрицы возмущений

$$\begin{aligned}
S &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4, \\
H &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4, \\
L &= \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4, \\
J &= \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.
\end{aligned} \tag{38}$$

Действуя аналогично случаю трехмерных систем, нетрудно найти условия уже известных бифуркаций для случая четырех измерений.

Условия для **бифуркаций коразмерности один**.

- *Касательная бифуркация*, $\mu = +1$. Подставляем в (37) $\mu = +1$ и находим

$$H = S + L - J - 1. \tag{39}$$

- *Бифуркация удвоения периода*, $\mu = -1$. Подставляем в (37) $\mu = -1$ и находим

$$H = -S - L - J - 1. \tag{40}$$

- *Бифуркация Неймарка–Сакера*. Условием этой бифуркации является обращение в единицу модулей двух комплексно–сопряженных мультипликаторов, то есть $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\mu_1 = e^{-i\theta}$. Тогда из (38) следует

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cos \theta + \mu_3 + \mu_4, \\
H &= 1 + 2(\mu_3 + \mu_4) \cos \theta + \mu_3\mu_4, \\
L &= \mu_3 + \mu_4 + 2\mu_3\mu_4 \cos \theta, \\
J &= \mu_3\mu_4.
\end{aligned} \tag{41}$$

Исключая μ_3 , μ_4 и θ , получаем условие бифуркации Неймарка–Сакера в терминах инвариантов матрицы Якоби

$$(S - L)(L - SJ) = (1 - J)^2(H - 1 - J). \tag{42}$$

Условия для **бифуркаций коразмерности два**.

- *Резонанс 1:1*, R_1 ($\mu_1 = +1$, $\mu_2 = +1$). Подставляя эти значения в соотношения (38) и исключая затем третий и четвертый мультипликаторы, получаем

$$H = 2S + J - 3, \quad L = S + 2J - 2. \tag{43}$$

Действуя аналогично, находим условия реализации всех бифуркаций коразмерности два.

- *Резонанс 1:2*, R_2 ($\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -1$):

$$H = -2S + J - 3, \quad L = S - 2J + 2. \tag{44}$$

- Бифуркация *fold-flip* ($\mu_1 = +1, \mu_2 = -1$):

$$S = -L, \quad H = -J - 1. \quad (45)$$

- Бифуркация *fold-NS* ($|\mu_{1,2}| = 1, \mu_3 = +1$):

$$H = (1 + J)(S - J), \quad L = 1 + J(S - J). \quad (46)$$

- Бифуркация *flip-NS* ($|\mu_{1,2}| = 1, \mu_3 = -1$):

$$H = -(1 + J)(S + J), \quad L = -1 + J(S + J). \quad (47)$$

Кроме того, в четырехмерной системе появляется новая бифуркация коразмерности два [8,9]. Этот факт можно пояснить следующим образом. Бифуркация Неймарка–Сакера характеризуется потерей устойчивости, связанной с обращением модуля комплексно-сопряженных мультипликаторов в единицу, так что $\mu_1 = e^{i\theta}, \mu_2 = e^{-i\theta}$. В четырехмерной системе появляется дополнительная возможность и второй паре мультипликаторов стать комплексно-сопряженными. Обращение их модулей в единицу является вторым дополнительным условием: $\mu_3 = e^{i\alpha}, \mu_4 = e^{-i\alpha}$. Таким образом, соответствующая бифуркация имеет достаточно низкую коразмерность – два, и называется двойной бифуркацией Неймарка–Сакера (*double Neimark–Sacker, NS–NS*) [8,9]. Найдем ее условие в пространстве инвариантов матрицы возмущений. Для этого подставляем

$$\mu_1 = e^{i\theta}, \quad \mu_2 = e^{-i\theta}, \quad \mu_3 = e^{i\alpha}, \quad \mu_4 = e^{-i\alpha} \quad (48)$$

в соотношения (38) и исключаем угловые переменные θ и α . В результате получаем

$$S = L, \quad J = 1. \quad (49)$$

Соотношения (49) задают условия двойной бифуркации Неймарка–Сакера в пространстве параметров.

Обсудим более подробно новую бифуркацию, характерную для четырехмерных отображений, и выясним, как она вложена в пространство параметров – инвариантов матрицы возмущений (S, H, L, J) . Благодаря низкой коразмерности этой бифуркации, для ее наблюдения можно фиксировать два параметра. Поэтому обратимся к сечению $L = 0$. В этом случае бифуркация Неймарка–Сакера в соответствии с (42) дается соотношением

$$S = \pm \sqrt{\frac{J+1-H}{J}}(1-J). \quad (50)$$

Аналогично из (39) и (40) следуют условия для бифуркаций $\mu = +1$ и $\mu = -1$:

$$S = J + 1 + H, \quad S = -J - 1 - H. \quad (51)$$

Зафиксируем теперь и второй параметр $H = 0$. Конфигурация области устойчивости неподвижной точки на плоскости двух оставшихся параметров (J, S) в этом случае показана на рис. 8. Она ограничена двумя ветвями линии бифуркации Неймарка–Сакера (50) и линиями мультипликаторов $\mu = +1$ и $\mu = -1$ (51). Эти линии пересекаются в точках резонансов R_1 ($J = 1/3, S = 4/3$) и R_2 ($J = 1/3, S = -4/3$)².

²Заметим, что в соответствии с рис. 8 в точке $J = -1, S = 0$ имеется определенное вырождение, которое, впрочем, исчезает при $H > 0$ с возникновением точек *fold-NS* и *flip-NS*. Этот момент не является существенным для описания точки *NS-NS*.

Линия (50), отвечающая условию бифуркации Неймарка–Сакера, имеет точку пересечения двух своих ветвей при условии

$$J = 1, \quad S = 0. \quad (52)$$

Это и есть точка двойной бифуркации Неймарка–Сакера $NS-NS$.

В точке $NS-NS$ две ветви линии бифуркации Неймарка–Сакера пересекаются под некоторым конечным углом. Действительно, из (50) при $J \approx 1$ находим, что $S \approx \pm\sqrt{2}(1-J)$. Отметим, что правее точки $NS-NS$ линия (50) перестает быть границей области устойчивости.

Изменим теперь параметр H . При возрастании H происходит изменение конфигурации линий и точек бифуркации, причем при условии $H = 1$ имеет место качественная перестройка наблюдаемой картины. Для значения $H < 1$ реализуется ситуация, аналогичная рис. 8; при $H > 1$ типичной становится конфигурация, показанная на рис. 9, *a*. В этом случае единственной границей области устойчивости неподвижной точки является линия (50), отвечающая бифуркации Неймарка–Сакера, а точка $NS-NS$ представляет собой точку самопересечения этой линии.

С дальнейшим ростом H область устойчивости, ограниченная линией Неймарка–Сакера, стягивается при $H = 2$ в точку, а затем исчезает, как показано на рис. 9, *a–в*. Точно при выполнении условия $H = 2$ точка самопересечения превращается в особенность типа «сборки», имеющую острие с законом «трех вторых». Это легко показать с помощью (50), полагая $H = 2$ и $J \approx 1$:

$$S \approx (J - 1)^{3/2}. \quad (53)$$

Таким образом, при

$$J = 1, \quad S = 0 \quad H = 2 \quad (54)$$

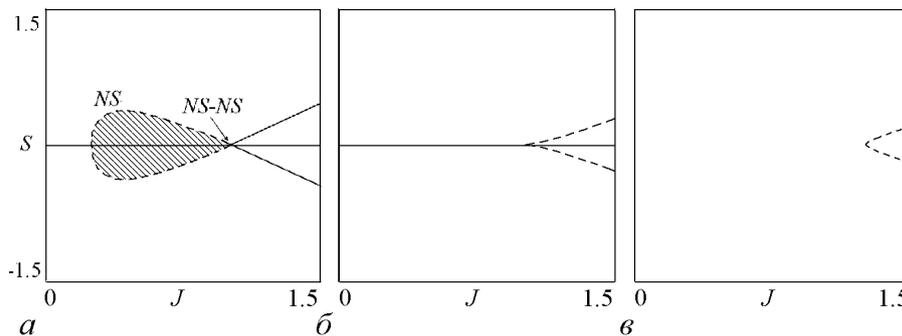


Рис. 9. Бифуркационные линии и точки на плоскости инвариантов матрицы возмущений (J, S) для четырехмерных отображений. Значения остальных инвариантов, $L = 0$; $H = 1.25$ (*a*), 2.0 (*b*), 2.25 (*в*). Заштрихована область устойчивости неподвижной точки

располагается новая точка более высокой коразмерности, в окрестности которой поверхность бифуркации Неймарка–Сакера исчезает через особенность, связанную с законом «трех вторых».

Мы рассмотрели случай $L = 0$. Нетрудно показать, что и при $L \neq 0$ имеет место аналогичная картина.

Пример системы с двойной бифуркацией Неймарка–Сакера можно найти, например, в работе [17], где рассматривается модель динамики двух популяций хищник–жертва (*predator–prey model*) с дополнительным запаздыванием на один шаг дискретного времени по каждой переменной. Это приводит к модели в виде четырехмерного отображения.

Однако простейшим примером системы с двойной бифуркацией Неймарка–Сакера может служить *четырёхмерное отображение Эно*

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -a - x_n^2 - by_n + cz_n - dw_n, \\y_{n+1} &= x_n, \\z_{n+1} &= y_n, \\w_{n+1} &= z_n.\end{aligned}\tag{55}$$

(Такой выбор знаков в отображении оказывается удобным.) Отображение (55) имеет неподвижные точки

$$x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = \frac{-b + c - d - 1 \pm \sqrt{(b - c + d + 1)^2 - 4a}}{2}.\tag{56}$$

Далее оставляем только верхний знак, поскольку нижний отвечает неустойчивой точке. Действуя стандартным образом, легко находим связь параметров отображения и инвариантов матрицы Якоби

$$S = 1 + b - c + d - \sqrt{(1 + b - c + d)^2 - 4a}, \quad H = b, \quad L = c, \quad J = d.\tag{57}$$

В случае $L = c = 0$, $H = b = 0$ с помощью (50), (51) можно аналитически найти основные бифуркации неподвижной точки:

- бифуркация $\mu = +1$: $a = \frac{1}{4}(1 + d)^2$,
- бифуркация $\mu = -1$: $a = -\frac{3}{4}(1 + d)^2$,
- бифуркация Неймарка–Сакера: $a = \frac{d^2 - 1}{4} \left(\frac{1 - d}{d} \pm 2\sqrt{\frac{1 + d}{d}} \right)$.

Первые две линии пересекают линию Неймарка–Сакера в точках резонансов 1:1 и 1:2, которые находим из (43), (44):

- резонанс 1:1, R_1 : $d = 1/3$, $a = 4/9$,
- резонанс 1:2, R_2 : $d = 1/3$, $a = -4/3$.

На рис. 10, *a* показаны карты динамических режимов четырехмерного отображения Эно на плоскости (d, a) для случая $c = 0$, $b = 0$, а на рис. 10, *б* – для случая $c = 0$, $b = 1.25$.

Можно видеть, что они качественно отвечают двум характерным ситуациям рис. 8 и рис. 9, *a*. Точки двойной бифуркации Неймарка–Сакера *NS–NS*, а также резонансы 1:1 и 1:2 отмечены стрелочками.

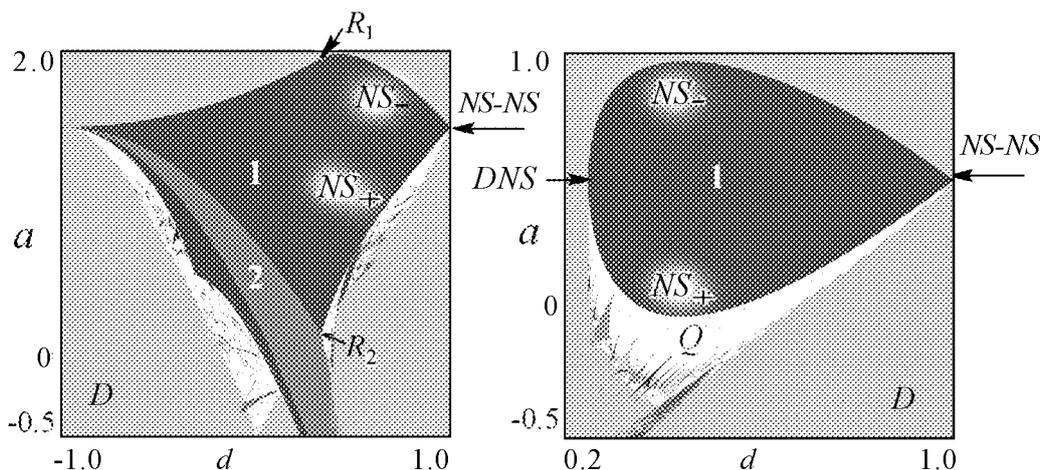


Рис. 10. Карты динамических режимов четырехмерного отображения Эно для $c = 0; b = 0$ (а), 1.25 (б)

Численный анализ обнаруживает некоторые особенности картины. Так только одна из ветвей линии бифуркации Неймарка–Сакера NS_+ на рис. 10, а является суперкритической, то есть отвечает потере устойчивости неподвижной точки с рождением устойчивой инвариантной кривой. Вторая ветвь соответствует субкритической форме бифуркации NS_- , для которой исчезновение устойчивой неподвижной точки происходит в результате слияния с неустойчивой инвариантной кривой [8,9]. Особенность случая на рис. 10, б – наличие бифуркации коразмерности два – вырожденной точки бифуркации Неймарка–Сакера DNS (degenerate Neimark–Sacker bifurcation), в которой линия суперкритической бифуркации Неймарка–Сакера превращается в субкритическую. При этом на карте рис. 10, б, соответственно, только нижняя часть линии Неймарка–Сакера ограничивает область устойчивых квазипериодических режимов Q со встроенной системой языков Арнольда.

Отметим, что можно также построить четырехмерное отображение, параметры которого являются непосредственно инвариантами матрицы возмущения, по аналогии с (6) и (31):

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= Sx_n - Hy_n + Lz_n - Jw_n - (x_n^2 + y_n^2), \\
 y_{n+1} &= x_n - \frac{1}{5}(x_n^2 + y_n^2), \\
 z_{n+1} &= y_n, \\
 w_{n+1} &= z_n.
 \end{aligned} \tag{58}$$

В этом случае также наблюдается картина, аналогичная рис. 8 и рис. 9, но особенность состоит в том, что линия $\mu = -1$ является не линией удвоения периода, а линией жесткого перехода «через мультипликатор минус единица».

Заключение

Подход, в рамках которого бифуркации двумерных отображений рассматриваются в пространстве инвариантов матрицы возмущений, может быть распространен на трехмерные и четырехмерные отображения. Его преимущество состоит в том, что картина бифуркаций в этом случае является универсальной. Развитый подход дает

«рабочие формулы», которые значительно облегчают исследование конкретных трех- и четырехмерных отображений – достаточно найти связь параметров отображения с инвариантами матрицы возмущений. Предложены простые примеры трехмерного и четырехмерного отображений, параметры которых являются непосредственно инвариантами матрицы возмущений.

Работа выполнена частично в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, № 11.G34.31.0039 и гранта РФФИ № 12-02-00342.

Библиографический список

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 529 с.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240 с.
3. *Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A.* Chaos: An introduction to dynamical systems. New York: Springer, 1997. 603 p.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
5. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. 367 с.
6. *Постнов Д.Э.* Введение в динамику итерируемых отображений. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2007. 160 с.
7. *Кузнецов А.П., Савин Д.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
8. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.
9. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Doctoral thesis Utrecht University, 2006.
<http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
10. *Wiggins S.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. New York: Springer-Verlag, 2003. 836 p.
11. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos: Geometrical methods for engineers and scientists. New York: Wiley, 1986. 392 p.
12. *Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р.* О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 1. С. 12; *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Поздняков М.В., Седова Ю.В.* Универсальное двумерное отображение и его радиофизическая реализация // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 3. С. 461.
13. *Richter H.* The generalized Henon maps: Examples for higher-dimensional chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 6. P. 1371.
14. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Classification of three-dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian // Frontiers of Physics in China. 2009. Vol. 4, № 1. P. 111.
15. *Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simo C., Turaev D.* Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3493.

16. *Dullin H.R., Meiss J.D.* Quadratic volume-preserving maps: Invariant circles and bifurcations // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2009. Vol. 8, № 1. P. 76.
17. *Han W., Liu M.* Stability and bifurcation analysis for a discrete-time model of Lotka–Volterra type with delay // *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 217, № 12. P. 5449.

*Саратовский госуниверситет
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН*

Поступила в редакцию 15.02.2012

BIFURCATIONS OF THREE- AND FOUR-DIMENSIONAL MAPS: UNIVERSAL PROPERTIES

A. P. Kuznetsov, J. V. Sedova

The approach, in which the picture of bifurcations of discrete maps is considered in the space of invariants of perturbation matrix (Jacobi matrix), is extended to the case of three and four dimensions. In those cases the structure of surfaces, lines and points for bifurcations, that is universal for all maps, is revealed. We present the examples of maps, whose parameters are governed directly by invariants of the Jacobian matrix.

Keywords: Maps, bifurcations, multiplier, perturbation matrix.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 15 статей в отечественной и зарубежной печати.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sedovayv@rambler.ru