



## ДИНАМИКА ДВУХ НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ЛАНГА–КОБАЯШИ

*Л. А. Кочкуров, М. И. Балакин*

Представлен однопараметрический анализ динамики двух нелинейно связанных неидентичных осцилляторов Ланга–Кобаяши. Изучено влияние изменения времени запаздывания на колебательные режимы системы. Показано, что в системе возможны периодические и квазипериодические колебания. Изменение времени запаздывания приводит к бифуркациям, которые являются причиной чередования периодических и квазипериодических режимов. Возбуждение квазипериодических колебаний в системе происходит в результате бифуркации Неймарка–Сакера.

*Ключевые слова:* Уравнения Ланга–Кобаяши, нелинейная связь, бифуркации.

### Введение

Полупроводниковые лазеры с длинным внешним резонатором очень чувствительны к параметрам обратной связи. Время, затрачиваемое на один полный проход внутри резонатора, достаточно велико по сравнению с внутренним временным масштабом. Это становится причиной возникновения запаздывания во взаимодействиях полей и активной среды. В силу существования запаздывания даже слабая обратная связь оказывает существенное влияние на динамику системы [1,2].

Впервые модель одномодового полупроводникового лазера со слабой запаздывающей обратной связью была предложена Лангом и Кобаяши [3]. Она представляет собой систему из двух уравнений для комплексной амплитуды поля  $E(t)$  и числа носителей  $N(t)$ . Вывод уравнений для указанной системы можно найти в [4]

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (1 + i\alpha)NE + Ke^{-i\omega_0\tau}E(t - \tau), \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{T}(P - N - (1 + 2N)|E|^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $T$  – время жизни носителей,  $\tau$  – время обхода резонатора,  $\omega_0$  – безразмерная собственная частота резонатора,  $K$  – коэффициент обратной связи,  $P$  – ток накачки,  $\alpha$  – фактор уширения линии.

Модель описывается дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, то есть в них присутствует зависимость не только от текущих значений  $E(t)$ ,  $N(t)$ , но и от предшествующих состояний  $E(t - \tau)$ .

Отметим, что система (1) часто используется для моделирования динамики полупроводниковых лазеров и привлекает внимание многих исследователей [5–14]. Модель, исследуемая в данной работе в виде двух связанных осцилляторов Ланга–Кобаяши, применима для описания динамики генератора терагерцового излучения [15]. Как будет показано ниже, время запаздывания существенно влияет на динамику этой системы. Изменение времени запаздывания приводит к чередованию периодических и квазипериодических режимов. В результате проведенного бифуркационного анализа с помощью пакета DDE-BIFTOOL [16] выявлен бифуркационный механизм такого чередования режимов.

## 1. Математическая модель

Теоретическое исследование полупроводникового лазера с задержанной обратной связью обычно основано на модели Ланга–Кобаяши, включающая в себя все основные эффекты, наблюдаемые экспериментально [3]. Как уже упоминалось, модель Ланга–Кобаяши представляет собой систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, описывающую эволюцию комплексной амплитуды электрического поля и числа носителей. В данной работе рассматриваются две такие парциальные системы, связанные нелинейным образом, со значительной расстройкой по параметрам. Уравнения двух сильно неидентичных осцилляторов (двух взаимодействующих коротковолновой и длинноволновой мод) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}_s(t) &= \frac{1}{2}(1+i\alpha)\left[g\frac{n_s-N_T}{1+\varepsilon|\mathcal{E}_s|^2}-\gamma\right]\mathcal{E}_s+e^{i\varphi_s}k\mathcal{E}_s(t-\tau_{ec})-\chi_s\mathcal{E}_s|\mathcal{E}_l|^2, \\ \frac{d}{dt}n_s(t) &= P\zeta-\gamma_en_s-g\frac{n_s-N_T}{1+\varepsilon|\mathcal{E}_s|^2}|\mathcal{E}_s|^2, \\ \frac{d}{dt}\mathcal{E}_l(t) &= \frac{1}{2}(1+i\alpha)\left[g\frac{n_l-N_T}{1+\varepsilon|\mathcal{E}_l|^2}-\gamma\right]\mathcal{E}_l+e^{i\varphi_l}k\mathcal{E}_l(t-\tau_{ec})+\chi_l\mathcal{E}_l|\mathcal{E}_s|^2, \\ \frac{d}{dt}n_l(t) &= P\zeta-\gamma_en_l-g\frac{n_l-N_T}{1+\varepsilon|\mathcal{E}_l|^2}|\mathcal{E}_l|^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $\gamma$  – скорость распада фотонов в резонаторе;  $\gamma_e$  – скорость распада носителей;  $\tau_{ec}$  – время обхода полей внешнего резонатора;  $\alpha$  – альфа-фактор (фактор уширения линии);  $P$  – мощность накачки;  $k$  – амплитудный коэффициент возвращенной волны;  $g$  – дифференциальный коэффициент усиления;  $N_T$  – пороговое число носителей;  $\varepsilon$  – коэффициент насыщения усиления;  $\varphi$  – фаза обратной связи;  $\chi$  – нелинейная восприимчивость. Численные значения параметров приведены в табл. 1. Индексы  $s, l$  относятся к коротковолновой и длинноволновой модам, соответственно.  $\mathcal{E}_{s,l}$  – медленно меняющиеся безразмерные амплитуды электрического поля,  $n_{s,l}$  – характеризует число носителей.

Прежде чем приступить к численному моделированию, приведем систему (2) к безразмерному виду. Следуя результатам работы, где исследуется парциальная система Ланга–Кобаяши [17], введем безразмерное время  $S$  и новые динамические переменные как функции от  $S$ , которые выражаются через исходные переменные следующим образом:

$$S = t/t_c, \quad \mathcal{E}(t) = \varepsilon_c E(t/t_c), \quad n(t) = n_c N(t/t_c) + n_c^0.$$

Таблица 1

Численные значения параметров модифицированной модели Ланга–Кобаяши

Физическая величина	Обозначение	Значение
Скорость распада фотонов	$\gamma$	$10^{11} \text{ с}^{-1}$
Скорость распада носителей	$\gamma_e$	$10^9 \text{ с}^{-1}$
Время обхода внешнего резонатора	$\tau_{ec}$	$(10^{-22} - 1) \cdot 10^{-9} \text{ с}$
Альфа-фактор (фактор уширения линии)	$\alpha$	4
Мощность накачки	$P$	1.5 Вт
Доля возвращенной волны	$k$	$(0.01) \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$
Дифференциальное усиление	$g$	$10^4 \text{ с}^{-1}$
Пороговое число носителей	$N_T$	$10^8$
Коэффициент насыщения усиления	$\varepsilon$	$10^{-7}$
Фаза обратной связи (коротковолновое излучение)	$\varphi_s$	$0.650 \pi$
Фаза обратной связи (длинноволновое излучение)	$\varphi_l$	$0.585 \pi$
Нелинейная восприимчивость (коротковолновое излучение)	$\chi_s$	$9.41 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1}$
Нелинейная восприимчивость (длинноволновое излучение)	$\chi_l$	$9.14 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1}$
Коэффициент нормировки мощности накачки	$\zeta$	$10^{17} (\text{с} \cdot \text{Вт})^{-1}$

Здесь  $(t_c, \varepsilon_c, n_c)$  – характеристические множители, которые могут быть получены, исходя из следующих требований:

$$\begin{aligned}
 1 &= t_c g n_c, \\
 1 &= \frac{(n_c^0 - N_T)}{n_c}, \\
 1 &= t_c \gamma, \\
 1 &= \frac{g}{\gamma} |\varepsilon_c|^2.
 \end{aligned}$$

В результате получаем следующие соотношения:

$$t_c = \frac{1}{\gamma}, \quad \varepsilon_c = \sqrt{\frac{\gamma_e}{g}}, \quad n_c = \frac{\gamma}{g}, \quad n_c^0 = N_T + \frac{\gamma}{g}.$$

В новых переменных система (2) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dS} E_s(S) &= \frac{1}{2} (1 + i\alpha) \left[ \frac{1 + N_s}{1 + \mu |E_s|^2} - 1 \right] E_s + K e^{i\varphi_s} E_s(S - \tau) - c_s E_s |E_l|^2, \\
 \frac{d}{dS} N_s(S) &= \frac{1}{T} (p - N_s - (1 + N_s) |E_s|^2), \\
 \frac{d}{dS} E_l(S) &= \frac{1}{2} (1 + i\alpha) \left[ \frac{1 + N_l}{1 + \mu |E_l|^2} - 1 \right] E_l + K e^{i\varphi_l} E_l(S - \tau) + c_l E_l |E_s|^2, \\
 \frac{d}{dS} N_l(S) &= \frac{1}{T} (p - N_l - (1 + N_l) |E_l|^2).
 \end{aligned} \tag{3}$$

## 2. Результаты исследования динамики системы

Исследуем систему (3) при условии  $\mu = 0$ . Это допустимо, если лазер работает вблизи порога насыщения. Значения остальных параметров указаны в табл. 2.

При численном интегрировании системы (3) было выявлено, что по мере изменения запаздывания наблюдается смена устойчивых периодических и квазипериодических режимов. Такое чередование может быть обусловлено различными бифуркационными механизмами. Например, это может быть связано с пересечением языков синхронизации на плоскости управляющих параметров. Для выяснения бифуркационных механизмов смены режимов в системе (3) необходимо провести бифуркационный анализ периодических и квазипериодических колебательных режимов. Для того, чтобы исследовать устойчивость и бифуркации наблюдаемых двумерных торов в (3), можно воспользоваться методом, предложенным в работах [10–14]. Для анализа бифуркаций квазипериодических режимов авторы используют вспомогательную систему. Для перехода к этой системе сделаем следующую замену в системе (3):

$$E_{s,l}(S) = A_{s,l}(S)e^{i\omega_{s,l}S}. \quad (4)$$

После подстановки (4) в (3) при условии  $\mu = 0$  получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS}A_{s,l}(S) &= \frac{1}{2}A_{s,l}n_{0s,l} - i\omega_{s,l}A_{s,l} + Ke^{i(\psi_{s,l} - \omega_{s,l}\tau)}A_{s,l}(S - \tau) \mp c_{s,l}A_{s,l}|A_{l,s}|^2, \\ \frac{d}{dS}N_{s,l}(S) &= \frac{1}{T}(p - N_{s,l} - (1 + N_{s,l})|A_{s,l}|^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Система состоит из двух комплексных и двух действительных уравнений для комплексных переменных  $A_{s,l}$  и действительных переменных  $N_{s,l}$ . Периодические решения системы (3) могут быть найдены как состояния равновесия системы (5). Квазипериодические решения системы (3) соответствуют предельным циклам системы (5). Исследуем неподвижные точки в системе (5), которые соответствуют модами внешнего резонатора (external cavity modes), то есть будем искать решения с

Таблица 2

Численное значение нормированных параметров модели Ланга–Кобаяши

Физическая величина	Обозначение	Значение
Временной масштабирующий параметр	$T$	$\gamma/\gamma_e$
Время обхода внешнего резонатора	$\tau$	$\gamma\tau_{ee}$
Коэффициент насыщения усиления	$\mu$	$\varepsilon\gamma_e/\gamma$
Доля возвращенной волны	$K$	$k/\gamma$
Мощность накачки	$p$	$g/\gamma(P\zeta/\gamma_e - N_T) - 1$
Альфа-фактор	$\alpha$	4
Фаза обратной связи (коротковолновое излучение)	$\varphi_s$	$0.650\pi$
Фаза обратной связи (длинноволновое излучение)	$\varphi_l$	$0.585\pi$
Нормированная нелинейная восприимчивость (коротковолновое излучение)	$c_s$	$9.41 \cdot 10^{-22}$
Нормированная нелинейная восприимчивость (длинноволновое излучение)	$c_l$	$9.14 \cdot 10^{-22}$

постоянными амплитудой, частотой и числом носителей:  $A_{s,l}(S) = A_{s,l}, N_{s,l} = n_{0s,l}$ . В этом случае из системы (5) получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} i\omega_{s,l} &= \frac{1}{2}(1 + i\alpha)n_{0s,l} + Ke^{i(\psi_{s,l} - \omega_{s,l}\tau)} \mp c_{s,l}|A_{l,s}|^2, \\ |A_{s,l}|^2 &= \frac{p - n_{0s,l}}{1 + n_{0s,l}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем комплексную амплитуду  $A_{s,l} = x_{s,l} + iy_{s,l}$  и введем дополнительное условие  $y_{s,l} = 0$  в соответствии с методикой, описанной в [10–14]. Разделив действительные и мнимые части (6), получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}n_{0s,l} + K \cos(\psi_{s,l} - \omega_{s,l}\tau) \mp c_{s,l}|x_{l,s}|^2, \\ \omega_{s,l} &= \frac{1}{2}\alpha n_{0s,l} + K \sin(\psi_{s,l} - \omega_{s,l}\tau), \\ |x_{s,l}|^2 &= \frac{p - n_{0s,l}}{1 + n_{0s,l}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Численно решаем систему (7) и находим  $x_{s,l}, n_{0s,l}, \omega_{s,l}$ . Задав эти величины в системе уравнений (5), с помощью пакета DDE-BIFTOOL можно провести анализ состояний равновесия и предельных циклов. На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма для состояния равновесия системы (5). Из бифуркационной диаграммы следует, что при  $K = 0.01$  и малых значениях запаздывания в системе существует устойчивое состояние равновесия. Состояние равновесия сохраняет устойчивость до значения времени запаздывания  $\tau = 7$ . В этой бифуркационной точке действительные части старшей пары комплексно-сопряженных собственных значений переходят через ноль из левой полуплоскости в правую. Таким образом, имеет место суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа рождения цикла. В системе (5) происходит мягкое возбуждение автоколебаний. Из бифуркационной диаграммы (рис. 2) видно,

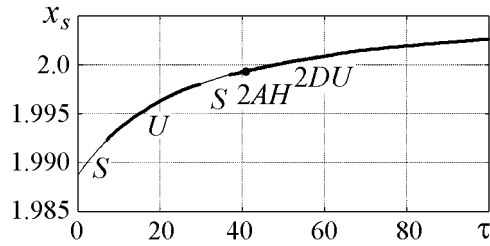


Рис. 1. Зависимость координаты состояния равновесия от времени запаздывания  $\tau$ . Условные обозначения:  $x_s$  – координата состояния равновесия;  $S$  – устойчивое состояние равновесия;  $U$  – неустойчивое состояние равновесия;  $2AH$  – вторая суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа;  $2DU$  – состояние равновесия, неустойчивое по двум направлениям  $K = 0.01$

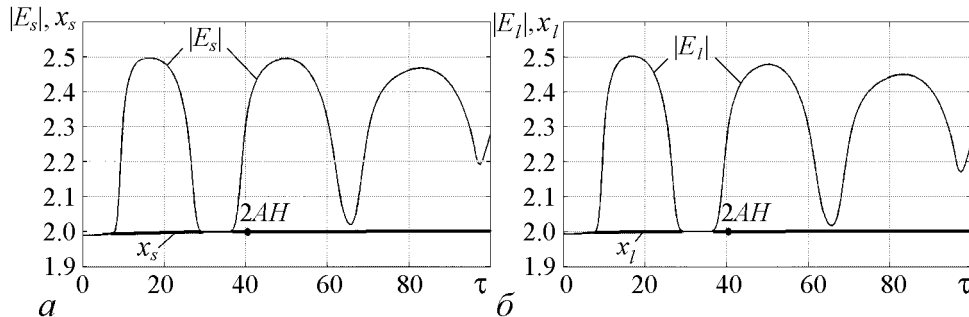


Рис. 2. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для случая  $K = 0.01$ :  $a$  – коротковолновая мода;  $b$  – длинноволновая мода

что амплитуда устойчивого предельного цикла с увеличением  $\tau$  растет до некоторого максимального значения. При дальнейшем увеличении запаздывания предельный цикл стягивается в неподвижную точку, которая вновь приобретает устойчивость. С увеличением времени запаздывания амплитуда колебаний непрерывно растет до значения  $\tau = 16.2$  (см. рис. 2). При дальнейшем увеличении запаздывания происходит уменьшение амплитуды колебаний, и при  $\tau = 29.5$  предельный цикл стягивается в неподвижную точку. Действительные части старшей пары комплексно-сопряженных собственных значений переходят из правой комплексной полуплоскости в левую – состояние равновесия приобретает устойчивость. Устойчивость сохраняется до значения времени запаздывания  $\tau = 37.1$ , при котором неподвижная точка вновь претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа и в системе (5) возбуждаются автоколебания. При дальнейшем увеличении  $\tau$  в точке  $\tau = 40.5$  происходит вторая бифуркация Андронова–Хопфа, седловое состояние равновесия становится неустойчивым по двум направлениям. Дальнейшее увеличение времени запаздывания в рассматриваемом диапазоне до  $\tau = 100$  не приводит к новым бифуркациям неподвижной точки. Выше  $\tau = 37.1$  для предельного цикла также не наблюдается никаких бифуркаций. В зависимости от  $\tau$  наблюдается изменение его параметров (см. рис. 2). Описанный сценарий имеет место для обеих мод  $E_s$  и  $E_l$ .

### Заключение

В работе представлено исследование динамики двух нелинейно связанных неидентичных осцилляторов Ланга–Кобаяши. Проведен однопараметрический бифуркационный анализ системы. Показано, что при определенных значениях параметров система может демонстрировать периодические и квазипериодические колебания. Изменение времени запаздывания может приводить к чередованию данных режимов. Моделирование производилось при мощности накачки, мало превышающей пороговую, и малом значении глубины обратной связи. При возрастании мощности накачки и увеличении коэффициента обратной связи следует ожидать появления новых характерных режимов и усложнение динамики.

Авторы выражают благодарность профессору Л.А. Мельникову и профессору В.В. Астахову за обсуждение и помощь в проведении исследований.

*Работа проводилась в рамках проекта «УМНИК» (государственный контракт № 10502п/16882 от 08.06.2012).*

### Библиографический список

1. Van Tartwijk G.H.M. and Lenstra D. Semiconductor lasers with optical injection and feedback // J. Opt. B. Quantum Semiclassical Opt. 1995. Vol. 7. P. 87.
2. Van Tartwijk G.H.M., and Agrawal G.P. Laser instabilities: A modern perspective // Prog. Quantum Electron. 1998. Vol. 22. P. 43.
3. Lang R., and Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum. Electron. 1980. Vol. 16. 347.
4. Alsing P.M., Kovanis V., Gavrielides A., and Erneux T. Mechanism for period doubling in a semiconductor laser subject to optical injection // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 53. 4429.

5. *Flunkert V., D'Huys O., Danckaert J., Fischer I., and Schöll E.* Bubbling in delay-coupled lasers // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 065201(R).
6. *Masoller C.* Noise-induced resonance in delayed feedback systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. 034102.
7. *Tronciu V.Z., Wünsche H.-J., Wolfrum M., and Radziunas M.* Semiconductor laser under resonant feedback from a Fabry–Perot resonator: Stability of continuous-wave operation // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 046205.
8. *Fiedler B., Yanchuk S., Flunkert V., Hövel P., Wünsche H.-J., and Schöll E.* Delay stabilization of rotating waves near fold bifurcation and application to all-optical control of a semiconductor laser // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. 066207.
9. *Többens A., and Parlitz U.* Dynamics of semiconductor lasers with external multicavities // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 016210.
10. *Haegeman B., Engelborghs K., Roose D., Pieroux D., and Erneux T.* Stability and rupture of bifurcation bridges in semiconductor lasers subject to optical feedback // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. 046216.
11. *Yanchuk S., and Wolfrum M.* A multiple time scale approach to the stability of external cavity modes in the Lang–Kobayshi system using the limit of large delay // *J. Applied Dynamical Systems.* 2010. Vol. 9, № 2. P. 519.
12. *Krauskopf B., van Tartwijk G.H.M., and Gray G.R.* Symmetry properties of lasers subject to optical feedback // *Opt. Commun.* 2000. Vol. 177. P. 347.
13. *Heil T., Fischer T., Elsässer W., Krauskopf B., Green K., and Gavrielides A.* Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67(6). 066214.
14. *Wolfrum M. and Turaev D.* Instabilities of lasers with moderately delayed optical feedback // *Opt. Commun.* 2002. Vol. 212. P. 127.
15. *Kochkurov L., Balakin M., Melnikov L., Astakhov V.* Numerical modeling of terahertz generation via difference-frequency mixing in two-color laser // *Proc. SPIE.* 2013. Vol. 8699. 869912.
16. *Engelborghs K., Luzyanina T., and Roose D.* Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // *ACM Trans. Math. Softw.* 2002. Vol. 28, № 1. P. 1.
17. *Flunkert V.* *Delay-Coupled Complex Systems and Applications to Lasers* // Springer Theses. 2011. 180 p.

*Саратовский государственный  
политехнический университет*

*Поступила в редакцию  
После доработки*

*28.02.2013  
10.07.2013*

## **DYNAMICS OF TWO NONLINEARLY COUPLED NONIDENTICAL LANG–KOBAYSHI OSCILLATORS**

*L. A. Kochkurov, M. I. Balakin*

One-parameter study of system of two nonlinearly coupled nonidentical Lang–Kobayshi oscillators is presented. The time delay influence on oscillation regimes in the system is studied. The possibility of periodic and quasiperiodic oscillations is shown.

Variation of delay time leads to bifurcations and an alternation of periodic and quasiperiodic oscillations. Quasiperiodic oscillations are excited as a result of Neimark–Sacker bifurcation.

*Keywords:* Lang–Kobayshi equations, nonlinear coupling, bifurcations.



*Кочуров Леонид Алексеевич* – родился в 1990 году в поселке Новые Бура-сы Саратовской области. Окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2012). В настоящее время является аспирантом кафедры «Приборостроение» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. Область научных интересов: лазерная физика, когерентная и нелинейная оптика. Автор 3 научных публикаций.

410054 Саратов, Политехническая, 77

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: lkochurov@gmail.com



*Балакин Максим Игоревич* – родился в 1988 году в Саратове, окончил Сара-товский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2011). В насто-ящее время является аспирантом кафедры «Радиотехника» Саратовского госу-дарственного технического университета им. Гагарина Ю.А. Область научных интересов: динамика систем с запаздывающей обратной связью, механизмы формирования мультистабильности в системах с запаздыванием. Автор 3 науч-ных публикаций.

410054 Саратов, Политехническая, 77

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: balakinmaxim@gmail.com