



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(1)

Научная статья

УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-136-159

Синхронизация связанных генераторов квазипериодических колебаний при разрушении инвариантной кривой

А. П. Кузнецов¹, Н. В. Станкевич^{1,2,3}✉, Н. А. Щеголева³

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, Россия

²Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Нижний Новгород, Россия

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия

E-mail: apkuz@rambler.ru, ✉stankevichnv@mail.ru, migunovanatasha@mail.ru

Поступила в редакцию 20.11.2020, принята к публикации 11.12.2020, опубликована 1.02.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – описать полную картину синхронизации двух связанных генераторов квазипериодических колебаний, классифицировать различные типы синхронизации, изучить особенности возникновения и разрушения многочастотных квазипериодических колебаний. *Методы.* Объектом исследования являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений различной размерности. В работе используется метод Рунге–Кутты 4-го порядка для решения системы дифференциальных уравнений. Анализ динамики проводится на основе рассчитанного спектра показателей Ляпунова в зависимости от параметров систем, так называемых карт показателей Ляпунова. Также были визуализированы бифуркационные деревья, числа вращения, фазовые портреты и отображения Пуанкаре. *Результаты.* Проведено исследование динамики двух связанных генераторов квазипериодических колебаний для двух наборов рабочих параметров подсистем. Были изучены два случая, когда в первом осцилляторе наблюдается двухчастотный тор или хаотические колебания (разрушенный тор). Второй осциллятор демонстрирует различные типы динамики при вариации частотной расстройки: периодические, квазипериодические и хаотические. Показано, что для всех параметров наблюдается фазовая синхронизация генераторов, широкополосная синхронизация, явление гибели колебаний. Структура плоскости параметров частотная расстройка – сила связи имеет универсальное устройство. Выход из области широкополосной синхронизации с уменьшением силы связи сопровождается квазипериодической бифуркацией Хопфа и рождением трехчастотного тора. *Заключение.* Взаимодействие простейших генераторов квазипериодических колебаний дает богатую картину динамических режимов: многочастотные квазипериодические колебания с различным количеством частот, хаотическое поведение, характеризующееся различным спектром показателей Ляпунова. Несмотря на многообразие динамических режимов картина синхронизации двух диссипативно связанных квазипериодических генераторов имеет универсальную структуру. Наблюдаются квазипериодические фазовая и широкополосная синхронизации. Разрушение тора в подсистеме приводит к разрушению многочастотных торов в системе связанных осцилляторов, а также уменьшению разнообразия типов хаотических аттракторов.

Ключевые слова: квазипериодические колебания, синхронизация, связанные генераторы, хаос, показатели Ляпунова.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-31.2019.8). Работа А.П.К. выполнена в рамках государственного

задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Работа Н.В.С. выполнена частично при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Для цитирования: Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Щеголева Н.А. Синхронизация связанных генераторов квазипериодических колебаний при разрушении инвариантной кривой // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 136–159. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-136-159

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-136-159

Synchronization of coupled generators of quasi-periodic oscillations upon destruction of invariant curve

A. P. Kuznetsov¹, N. V. Stankevich^{1,2,3}✉, N. A. Shchegoleva³

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia

²National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

E-mail: apkuz@rambler.ru, ✉stankevichnv@mail.ru, migunovanatasha@mail.ru

Received 20.11.2020, accepted 11.12.2020, published 1.02.2021

Abstract. The *purpose* of this study is to describe the complete picture of synchronization of two coupled generators of quasi-periodic oscillations, to classify various types of synchronization, to study features of occurrence and destruction of multi-frequency quasi-periodic oscillations. *Methods.* The object of the research is systems of ordinary differential equations of various dimensions. The work uses the fourth-order Runge–Kutta method to solve a system of differential equations. Main analysis of the dynamics is carried out on the basis of calculated spectrum of Lyapunov exponents depending on parameters of systems, so-called charts of Lyapunov exponents. Bifurcation trees, winding numbers, phase portraits and Poincaré maps were also visualized. *Results.* Study of the dynamics of two coupled quasi-periodic generators for two sets of operating parameters of the subsystems is carried out. Two cases were studied when a two-frequency torus or chaotic oscillations (destroyed torus) are observed in the first oscillator. The dynamics of the second oscillator demonstrates different types of dynamics with a variation of the frequency detuning: periodic, quasi-periodic and chaotic. It is shown that for all parameters, phase synchronization of generators, broadband synchronization, and the phenomenon of oscillator death are observed. Dynamical regimes picture of the parameter plane frequency detuning – the coupling strength has a universal structure. Exit from the broadband synchronization region with a decrease in the coupling strength is accompanied by a quasi-periodic Hopf bifurcation and the birth of a three-frequency torus. *Conclusion.* The interaction of the simplest generators of quasi-periodic oscillations gives a rich picture of dynamic regimes: multi-frequency quasi-periodic oscillations with a different numbers of frequencies, chaotic behavior characterized by a different spectrum of Lyapunov exponents. Despite the variety of dynamic regimes, the synchronization picture of two dissipatively coupled quasi-periodic generators has a universal structure. Quasi-periodic phase and broadband synchronization are observed. The destruction of a torus in a subsystem leads to the destruction of multi-frequency tori in the system of two coupled oscillators, as well as a decrease in the variety of types of chaotic attractors.

Keywords: quasi-periodic oscillations, synchronization, coupled generators, chaos, Lyapunov exponents.

Acknowledgements. This work was supported by grant of the President of the Russian Federation for young Russian scientists – candidates of sciences (МК-31.2019.8). The work of A.P.K. was performed in the framework of a state order to the Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences and Megagrant. N.V.S. is partially supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications NRU HSE, of the Ministry of science and higher education of the RF grant ag. No 075-15-2019-1931.

For citation: Kuznetsov AP, Stankevich NV, Shchegoleva NA. Synchronization of coupled generators of quasi-periodic oscillations upon destruction of invariant curve. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(1):136–159. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-136-159

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Квазипериодические колебания весьма распространены в различных областях науки и техники [1–4]. В последнее время квазипериодические колебания привлекают к себе внимание исследователей, поскольку существенно обогащают фундаментальные представления о динамике автоколебательных систем [5–18]. Также существуют прикладные области науки, где наблюдаются как автономные, так и неавтономные квазипериодические колебания. Необходимо отметить распространенность данного динамического поведения в технике, например, в оптоэлектронике и лазерах [19–21], магнитных пленках [22–25], клистронных генераторах [26, 27] и т.д. В недавней работе [28] были описаны особенности динамики одиночного нейрона через разрушение тора.

В связи с этим проблема синхронизации квазипериодических колебаний является важной задачей нелинейной теории. Как ни парадоксально, задача о синхронизации двух связанных генераторов квазипериодических колебаний изучена гораздо меньше, чем для случая регулярных (классическая синхронизация) или хаотических режимов (хаотическая синхронизация) [29–31]. При этом достаточно полная теория синхронизации квазипериодических колебаний предполагает широкий круг возможных задач. Фундаментальные вопросы, связанные с особенностями синхронизации квазипериодических колебаний, важны не только для теории колебаний, но также будут полезны при анализе взаимодействия оптоэлектронных систем, лазерных систем, нейронов и т. д. В работе [32] рассматривалась синхронизация полупроводниковых лазеров, где также наблюдались квазипериодические колебания и их синхронизация. В работе [33] рассматривается задача синхронизации квазипериодических колебаний в эксперименте на примере термоакустической системы, и авторы получили только малую часть картины синхронизации квазипериодических колебаний, такую как фазовая синхронизация.

Базовыми объектами при исследовании квазипериодических колебаний являются как неавтономные системы в виде различных связанных осцилляторов с предельными циклами, так и новые примеры автономных моделей с квазипериодическим поведением [34–37]. В 2010 году С.П. Кузнецовым был предложен простейший автономный генератор квазипериодических колебаний [34, 35]. Данный генератор представлял собой гибрид генератора с жестким возбуждением и релаксационного генератора, описывался трехмерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и демонстрировал устойчивые автономные квазипериодические колебания. Впоследствии на базе данного генератора были развиты несколько модификаций, обладающие различными спецификами [38]¹.

Как известно, квазипериодические колебания соответствуют квазиаттракторам [39], основным свойством которых является сильная чувствительность реализующегося динамического режима к вариации параметров и начальных условий. Квазипериодика неотъемлемо связана с резонансами на торе, а также его разрушением, потерей гладкости и переходом в хаотическое поведение. Таким образом, проблема синхронизации квазипериодических генераторов допускает три основных варианта, рассмотрение которых даст достаточно полную картину:

- синхронизация резонансного цикла на торе;
- синхронизация квазипериодического режима с несоизмеримыми частотами;
- синхронизация режима начинающейся разрушаться инвариантной кривой (синхронизация разрушенного тора).

Первый случай обсуждался в [10, 11] в рамках модели из возбуждаемых связанных элементов. Однако наиболее важные и существенно новые моменты возникают, когда колебания в автоном-

¹Предложенные модели, несмотря на то, что называются генераторами квазипериодических колебаний, демонстрируют все многообразие режимов, возможное в трехмерной динамической системе: устойчивое состояние равновесия, периодические, квазипериодические и хаотические автоколебания.

ной системе уже не регулярные, а квазипериодические или слабо хаотические. Случай квазипериодических колебаний был рассмотрен в работах [40–43]. В настоящей работе мы рассмотрим третий случай, когда инвариантная кривая уже разрушается.

В случае классической синхронизации квазипериодические колебания являются новым типом динамического поведения, возникающим как результат взаимодействия двух автоколебательных систем. В случае, когда взаимодействуют квазипериодические генераторы, аналогичным образом в результате взаимодействия в связанной системе возникают четырех- и трехчастотные квазипериодические колебания. Разрушение инвариантной кривой в базовом объекте в значительной мере усложнит динамику, и сохранить квазипериодические колебания в таких системах удастся довольно редко. О возможности квазипериодических колебаний в связанных системах с хаосом указывалось в работах [44–46]. В работе [47] обсуждалась проблема влияния связи на амплитудную динамику двух связанных хаотических осцилляторов Ресслера, и авторы обратили внимание на возможность двухчастотной квазипериодичности. Однако подробно этот феномен не обсуждался. В [48] было показано, что при определенном выборе параметров можно наблюдать квазипериодические колебания в связанных системах Ресслера. В работах [44–46] исследовалось кольцо из трех односторонне связанных идентичных систем Лоренца. Были обнаружены режимы не только двух-, но и трехчастотной квазипериодичности. Однако авторами был выполнен только однопараметрический анализ. При этом трехчастотные торы зафиксированы в очень узкой области изменения параметра (одна тысячная). Появление новой частоты в работах [45, 46] объяснялось возможностью вращательного движения в системе и высокой степенью ее симметрии, обусловленной идентичностью взаимодействующих подсистем.

В рамках данной работы проводится исследование возбуждения и особенностей многочастотных квазипериодических и хаотических колебаний на примере минимального ансамбля – два связанных осциллятора. При этом рассматривается такая ситуация, когда в автономных системах возможно наблюдать переход от периодических колебаний к квазипериодическим и затем их разрушение, переход в хаотические колебания.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 представлен объект исследования: краткая характеристика автономной системы, ее динамика; представлена также система связанных квазипериодических осцилляторов. В разделе 2 изучена система связанных осцилляторов в случае, когда в первом осцилляторе наблюдаются квазипериодические колебания, а во втором – переход от квазипериодических к хаотическим и периодическим. В разделе 3 описана ситуация, когда первый осциллятор всегда демонстрирует хаос, а во втором помимо хаоса – переход от хаоса к квазипериодическим и периодическим колебаниям.

1. Объект исследования

1.1. Автономный генератор. В качестве объекта исследования в данной работе мы обратимся к простейшей модели, в которой возможны автономные квазипериодические колебания [38]

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \kappa \dot{x}^2,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x, y = \dot{x}, z$ – динамические переменные системы. Модель (1) представляет собой трехмерную динамическую систему, состоящую из двух подсистем – осцилляторная подсистема и «энергетический ресурс». Осцилляторная подсистема – первое уравнение в системе (1) – соответствует модели автогенератора с жестким возбуждением. Осцилляторная подсистема имеет тривиальное состояние равновесия, параметр λ в нем отвечает за возбуждение автоколебаний в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа. К параметру λ аддитивно добавляется новая динамическая переменная z , зависимость от времени которой определяется вторым уравнением системы (1). Переменная z представляет собой «энергетический ресурс» цепи обратной связи

автогенератора. Состояние равновесия «энергетического ресурса» определяется параметром ε : $z_0 = \varepsilon$. Следовательно, параметры λ и ε оказываются эквивалентными, и на динамику полной системы (1) влияет лишь их сумма; данные качественные выводы далее подтверждены анализом устойчивости состояния равновесия системы (1). Параметр b отвечает за инерционные свойства цепи питания. Член, содержащий коэффициент k , отвечает за отбор энергии в автогенератор пропорционально квадрату скорости в осцилляторной системе. Таким образом, модель (1) имеет одно положение равновесия с координатами

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = \varepsilon. \quad (2)$$

Состояние равновесия может терять устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа при выполнении условия

$$\lambda = -\varepsilon. \quad (3)$$

При $\lambda < -\varepsilon$ – состояние равновесия устойчиво, для $\lambda > -\varepsilon$ – неустойчиво.

В качестве основного инструмента для исследования хаотических и квазипериодических колебаний удобно использовать метод карт показателей Ляпунова. Такие карты строятся следующим образом: плоскость параметров покрывается сеткой точек с заданным шагом, для каждой точки сетки рассчитывается полный спектр показателей Ляпунова, в соответствии с сигнатурой спектра точка на плоскости параметров окрашивается в тот или иной цвет. Система (2) является трехмерной, соответственно, анализ динамики производится по анализу трех показателей Ляпунова. Расчет показателей Ляпунова проводился по алгоритму Бенеттина [49]. В табл. 1 представлено соответствие цветовой палитры, сигнатуры спектра показателей Ляпунова и буквенного обозначения.

Таблица 1. Соответствие сигнатуры спектра показателей Ляпунова и буквенного обозначения для трехмерной модели

Table 1. Correspondence the signature of the Lyapunov exponent spectrum and the letter designation for three-dimensional model

Обозначение	Сигнатура спектра ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$)	Цвет на карте
Е	(-, -, -) – устойчивое состояние равновесия	коричневый
Р	(0, -, -) – периодические автоколебания	красный
Т	(0, 0, -) – квазипериодические автоколебания	желтый
С	(+, 0, -) – хаотические автоколебания	серый

На рис. 1 представлено устройство двух плоскостей параметров: (λ, β) (рис. 1, а) и (ω_0, λ) (рис. 1, б). На рисунках хорошо видна линия потери устойчивости состояния равновесия и рождения предельного цикла (АН), в соответствии с условием бифуркации Андронова–Хопфа (3). Для фиксированного параметра $\varepsilon = 4$ выполнение условия (3) соответствует линии $\lambda = -4$. На рис. 1, а для $\lambda > -4$ хорошо видна линия бифуркации Неймарка–Сакера (NS), в результате которой рождается двухчастотный тор. Вдоль бифуркационной линии наблюдается набор языков синхронизации, соответствующих рациональному соотношению частот. При движении вверх по карте (с уменьшением параметра β) языки синхронизации начинают перекрываться и формируется хаос в соответствии со сценарием Афраймовича–Шильникова (часто этот сценарий называют также «через потерю гладкости инвариантной кривой») [50–53]. Для исследования динамики связанных систем в случае, когда наблюдается разрушение двухчастотных квазипериодических колебаний, зафиксируем параметр $\beta = 1/30$ (соответствующая линия обозначена на рис. 1, а). При $\beta = 1/30$ с увеличением параметра λ сначала теряет устойчивость состояние равновесия, и рождается предельный цикл, затем появляется двухчастотный тор, далее происходит разрушение квазипериодических колебаний, и наблюдается чередование языков синхронизации

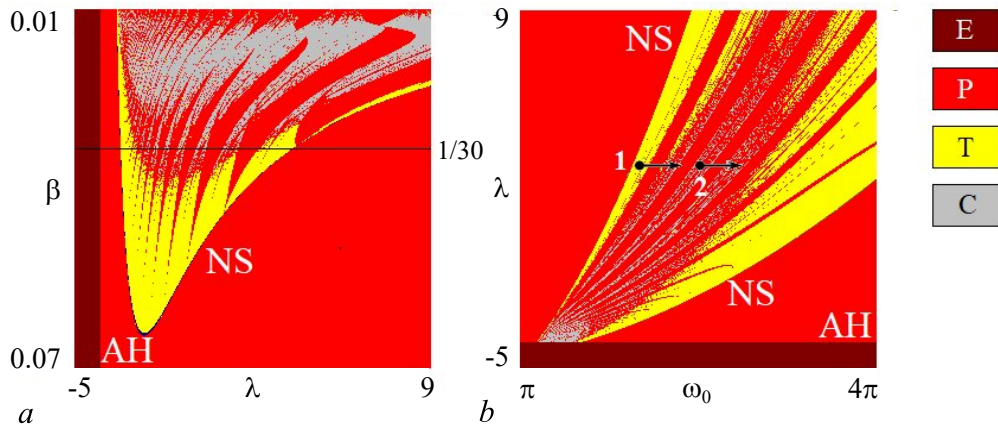


Рис. 1. Карты показателей Ляпунова генератора квазипериодических колебаний (1) на двух плоскостях параметров: $a - (\lambda, \beta)$ при $\varepsilon = 4, b = 1, \kappa = 0.02, \omega_0 = 2\pi$; $b - (\omega_0, \lambda)$ при $\varepsilon = 4, b = 1, \kappa = 0.02, \beta = 1/30$. **1, 2** – рабочие точки. АН – линия бифуркации Андронова–Хопфа, NS – линия бифуркации Неймарка–Сакера

Fig. 1. Charts of Lyapunov exponents of the generator of quasi-periodic oscillations (1) in two parameter planes: $a - (\lambda, \beta)$ at $\varepsilon = 4, b = 1, \kappa = 0.02, \omega_0 = 2\pi$; $b - (\omega_0, \lambda)$ at $\varepsilon = 4, b = 1, \kappa = 0.02, \beta = 1/30$. **1, 2** – working points. AH is the line of Andronov–Hopf bifurcation, NS is the line of Neimark–Sacker bifurcation

с областями хаотических режимов. При $\lambda \approx 3.6$ происходит обратная бифуркация Неймарка–Сакера, и тор трансформируется в предельный цикл.

Для исследования особенностей синхронизации моделей квазипериодических генераторов мы вводим между подсистемами связь и частотную расстройку, поэтому для нас принципиально важным является изменение динамики автономной модели при вариации параметра, ответственного за частоту колебаний ω_0 . Для отслеживания динамики при вариации частоты рассмотрим карту показателей Ляпунова на плоскости собственная частота – управляющий параметр (ω_0, λ) , которая показана на рис. 1, b для $\beta = 1/30$.

На карте так же, как и на рис. 1, a наблюдается линия бифуркации Андронова–Хопфа (3), являющаяся границей между областями устойчивого состояния равновесия (E) и автоколебаний, и которая для выбранных значений параметров соответствует линии $\lambda = -4$. Часть линии бифуркации Андронова–Хопфа (АН) граничит с областью хаотических колебаний, для данных параметров наблюдается субкритическая бифуркация. В область существования базового предельного цикла встроен достаточно широкий язык автономных квазипериодических колебаний. Граница областей соответствует линии бифуркации Неймарка–Сакера (NS). Внутри области квазипериодических колебаний наблюдаются языки синхронизации, которые чередуются с областями хаотических режимов.

1.2. Два диссипативно связанных генератора. Два диссипативно связанных генератора квазипериодических колебаний описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4) \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_C (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\
 \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - \kappa \dot{x}_1^2, \\
 \dot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4) \dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta)^2 x_2 + M_C (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\
 \dot{z}_2 &= b(\varepsilon - z_2) - \kappa \dot{x}_2^2,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $x_1, y_1 = \dot{x}_1, z_1$ – переменные, характеризующие первый генератор; $x_2, y_2 = \dot{x}_2, z_2$ – переменные второго генератора; Δ – частотная расстройка генераторов; M_C – коэффициент диссипативной связи.

Система (4) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые определяются параметрами. В качестве управляющих параметров мы рассматриваем собственную частоту ω_0 и параметр λ , ответственный за возбуждение автоколебаний каждого генератора. Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания и их разрушение. Как видно из рис. 1, область квазипериодических колебаний ограничена в пространстве параметров линиями бифуркации Неймарка–Сакера. Система (4) позволяет рассмотреть ситуации, когда динамика в первом осцилляторе не изменяется, и постоянно демонстрирует двухчастотные квазипериодические или хаотические колебания, а с помощью параметра Δ изменяется частота и режим во втором осцилляторе.

1.3. Выбор параметров ω_0 и λ . Для $\beta = 1/30$ можно рассмотреть различные варианты выбора рабочей точки на плоскости (ω_0, λ) автономного осциллятора. Интересный выбор будет в том случае, когда первый генератор зафиксирован в точке, где реализуются двухчастотные квазипериодические режимы, а второй будет стартовать из двухчастотного квазипериодического, затем пересекать языки синхронизации и полосы хаотической динамики. Такой маршрут можно реализовать при $\omega_0 = 2\pi$, $\lambda = 3$, соответствующая точка обозначена цифрой 1 на рис. 1, b. Стрелка указывает маршрут на плоскости параметров, по которому будет изменяться частота во втором генераторе в результате увеличения параметра частотной расстройки Δ . На рис. 2 представлено отображение Пуанкаре секущей плоскостью $y = 0$ автономного генератора (1) при $\omega_0 = 2\pi$, $\lambda = 3$. Как видно из рисунка, в отображении Пуанкаре наблюдается инвариантная кривая – гладкая замкнутая линия. Так как в пространстве параметров автономного генератора в окрестности точки 1 наблюдаются языки синхронизации, а также возможен переход на хаотические колебания, мы рассчитали показатели Ляпунова для конкретно этой точки: $\Lambda_1 = 0.0$, $\Lambda_2 = 0.0$, $\Lambda_3 = -0.2257$. Полученные значения подтверждают, что наблюдаемый режим – квазипериодический. Динамику системы для указанных параметров мы рассмотрим в разделе 2.

Другой не менее интересный случай представляет собой выбор рабочей точки первого осциллятора в режиме хаотических колебаний, соответствующих разрушающейся инвариантной кривой. При этом с помощью вариации частотной расстройки динамика второго генератора будет изменяться от хаотической до квазипериодической через языки синхронизации и от предельного цикла периода 1 до порога бифуркации Неймарка–Сакера. Такая ситуация будет реализоваться при $\omega_0 = 7.85$, $\lambda = 3$; соответствующая точка обозначена цифрой 2 на рис. 1, b. На рис. 2, b

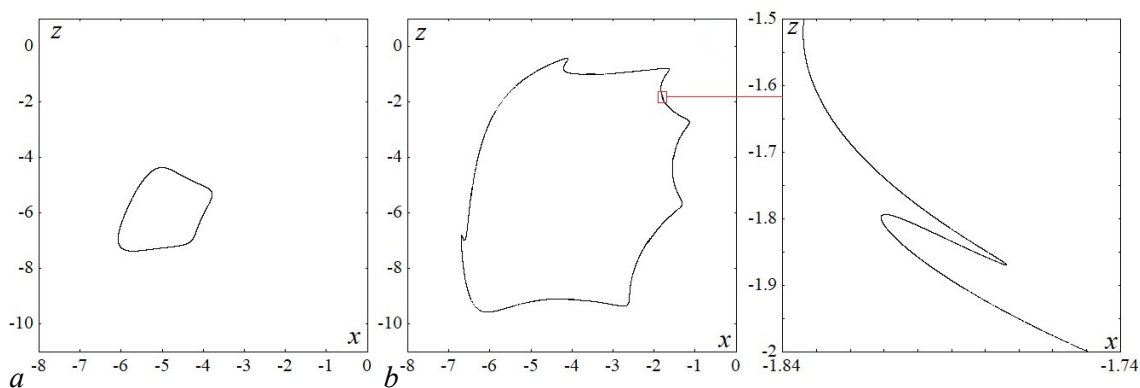


Рис. 2. Двумерные проекции отображений Пуанкаре автономного квазипериодического генератора (1) при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, a – квазипериодические колебания, $\omega_0 = 2\pi$, точка 1 на рис. 1, b; b – хаотические колебания, $\omega_0 = 7.85$, точка 2 на рис. 1, b. Секущая Пуанкаре $y = 0$

Fig. 2. Two-dimensional projections of Poincaré maps of autonomous quasi-periodic generator (1) at $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, a – quasi-periodic oscillations, $\omega_0 = 2\pi$, point 1 in Fig. 1, b; b – chaotic oscillations, $\omega_0 = 7.85$, point 2 in Fig. 1, b. Poincaré section is $y = 0$

представлено отображение Пуанкаре аттрактора и его увеличенный фрагмент для данных параметров. Как видно, инвариантная кривая стала более сложной, потеряла гладкость, но осталась непрерывной. Расчет показателей Ляпунова для трехмерной системы (1) показывает, что наблюдаемый режим является хаотическим: $\Lambda_1 = 0.0557$, $\Lambda_2 = 0.0$, $\Lambda_3 = -0.9111$. Особенности картины динамических режимов для этого случая рассмотрены в разделе 3.

2. Динамика связанных осцилляторов, $\omega_0 = 2\pi$, $\lambda = 3$, переход от автономной квазипериодичности к хаосу

Перейдем к исследованию динамики связанных систем. Как и в предыдущем разделе, в качестве основного инструмента исследования используем метод карт показателей Ляпунова. Однако для данного случая анализировать необходимо шесть показателей Ляпунова, и в системе возможны новые типы динамического поведения, такие как четырех- и трехчастотные квазипериодические режимы, а также два новых типа хаотических режимов: гиперхаос и хаос с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. Сигнатура спектра показателей Ляпунова и буквенное обозначение режимов для шестимерной системы представлены в табл. 2. На рис. 3 представлена карта показателей Ляпунова на плоскости параметров частотная расстройка – сила связи.

Таблица 2. Соответствие сигнатуры спектра показателей Ляпунова и буквенного обозначения для шестимерной модели

Table 2. Correspondence the signature of the Lyapunov exponent spectrum and the letter designation for six-dimensional model

Обозначение	Сигнатура спектра ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6$)
Е	(-, -, -, -, -, -) – устойчивое состояние равновесия
Р	(0, -, -, -, -, -) – периодические автоколебания
T2	(0, 0, -, -, -, -) – двухчастотные квазипериодические автоколебания
T3	(0, 0, 0, -, -, -) – трехчастотные квазипериодические автоколебания
T4	(0, 0, 0, 0, -, -) – четырехчастотные квазипериодические автоколебания
С	(+, 0, -, -, -, -) – хаотические автоколебания
С0	(+, 0, -, -, -, -) – хаотические автоколебания, характеризующиеся дополнительным нулевым показателем Ляпунова
НС	(+, 0, -, -, -, -) – гиперхаотические автоколебания

При малых связи и расстройке частот генераторов наблюдается область фазовой синхронизации (PS) квазипериодических колебаний со встроенной системой языков периодических колебаний, соответствующих языкам синхронизации внутри области двухчастотной квазипериодичности в автономной системе. С увеличением частотной расстройки и коэффициента связи наблюдается область полной синхронизации (CS). Дальнейшее увеличение силы связи и расстройки приводит к гашению колебаний в систем (OD). Порог стабилизации состояния равновесия, соответствующий возникновению области гибели колебаний в этом случае, определяется следующим соотношением:

$$M_C^{OD} = \lambda - \lambda_{АН} = 3 - (-4) = 7, \quad (5)$$

где $\lambda_{АН}$ – значение параметра, соответствующее бифуркации Андронова–Хопфа состояния равновесия из условия (3). При больших частотных расстройках и меньшей силе связи наблюдается область широкополосной квазипериодичности (BS), которая появляется в результате вырожденной бифуркации Андронова–Хопфа, когда в результате бифуркации после потери устойчивости состояния равновесия в системе сразу возникает устойчивый двухчастотный тор. Ниже показано,

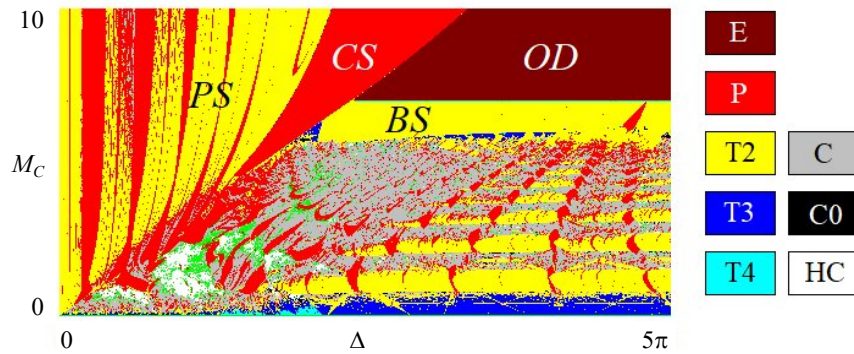


Рис. 3. Карта показателей Ляпунова связанных квазипериодических генераторов (4) при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$. PS – область фазовой синхронизации, CS – полной синхронизации, BS – квазипериодической широкополосной синхронизации (широкополосной квазипериодичности), OD – область гибели колебаний

Fig. 3. Chart of Lyapunov exponents of coupled quasi-periodic generators (4) for $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$. PS is area of phase synchronization, CS is complete synchronization, BS is quasi-periodic broadband synchronization (broadband quasi-periodicity), OD is area of oscillator death

что с уменьшением силы связи при больших частотных расстройках наблюдается область хаотического режима со встроенными полосами двухчастотных режимов и островов синхронизации, соответствующих разрушению резонансной паутины Арнольда.

При малых значениях силы связи и частотной расстройке на карте показателей Ляпунова наблюдаются четырехчастотные и трехчастотные квазипериодические режимы. Далее мы опишем особенности устройства карты режимов подробнее.

2.1. Слабая связь и расстройка по частоте. На рис. 4, а и 4, б показаны увеличенные фрагменты карты показателей Ляпунова для малых значений параметров частотной расстройке и силы связи. На рисунке хорошо видно, что при малой связи имеют место четырехчастотные и трехчастотные квазипериодические колебания. Разрушение высокочастотных торов приводит к

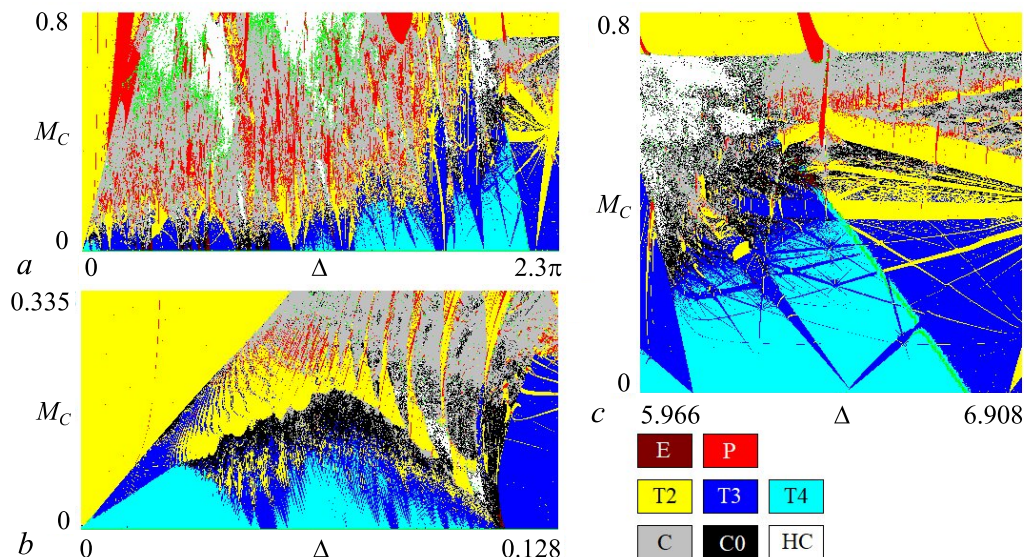


Рис. 4. Увеличенные фрагменты карты показателей Ляпунова, представленной на рис. 3

Fig. 4. Enlarged fragments of the chart of Lyapunov exponents shown in Fig. 3

возникновению различных типов хаотической динамики: так, хорошо видны области гиперхаоса, а также области хаоса с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. Такой тип поведения характерен для связанных систем с квазипериодической динамикой и подробно был рассмотрен в [43].

На рис. 4, с представлен фрагмент карты показателей Ляпунова в окрестности перехода от четырехчастотной к трехчастотной квазипериодичности. Такой переход соответствует пересечению линии бифуркации Неймарка–Сакера во втором генераторе, то есть когда во втором автономном генераторе возникает предельный цикл. На карте хорошо видна структура резонансной паутины Арнольда на базе четырехчастотной и трехчастотной квазипериодической динамики. Внутри области четырехчастотных квазипериодических режимов наблюдаются полосы трехчастотных квазипериодических режимов, на пересечении которых возникают двухчастотные квазипериодические режимы, а также окна периодичности. Аналогичная структура наблюдается и для трехчастотного режима. При увеличении силы связи структуры разрушаются, появляется хаос с дополнительной нулевой экспонентой. При дальнейшем увеличении параметра связи в результате разрушения двухчастотных квазипериодических режимов формируется хаос с одним положительным и одним нулевым показателями Ляпунова, а также гиперхаос.

2.2. Фазовая и широкополосная синхронизация. В работах [6, 7, 40–42] было показано, что для взаимодействующих квазипериодических систем можно наблюдать фазовую и широкополосную синхронизацию. Как упоминалось выше, для рассматриваемой в рамках данной работы системы также можно наблюдать данные типы синхронизации. Центральный язык, выходящий из точки нулевой частотной расстройки на плоскости параметров, соответствует фазовой синхронизации (PS). Внутри языка наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания с языками синхронизации, соответствующими резонансам, наблюдающимся во втором генераторе при вариации частотной расстройки. Для больших значений силы связи фазовая синхронизация двухчастотных колебаний сменяется областью полной синхронизации (CS). При достаточно сильной диссипации и частотной расстройке в системе наблюдается область гибели колебаний, на карте она обозначена коричневым цветом и символом OD. Характерным атрибутом явления гибели колебаний является широкополосная синхронизация (BS), появляющаяся при выходе из области гибели колебания с уменьшением связи. Для генераторов квазипериодических колебаний, идентичных по параметру возбуждения автоколебаний в каждой подсистеме, возникают сразу квазипериодические колебания. Если продолжать уменьшать силу связи в области широкополосной квазипериодичности, то на карте хорошо видны полосы двухчастотной квазипериодичности, чередующиеся с областями хаотической динамики. Полосы торов соответствуют широкополосной синхронизации с различными числами вращения. Аттракторы в различных полосах различаются между собой количеством связанных компонент инвариантных кривых в отображении Пуанкаре (далее мы рассмотрим эту особенность подробнее).

Для более детального анализа фазовой и широкополосной синхронизации проведем сравнительный анализ динамики числа вращения, бифуркационных деревьев и графиков показателей Ляпунова при вариации частотной расстройки Δ для различных значений силы связи. Данные иллюстрации представлены на рис. 5. Бифуркационные деревья совмещены с зависимостями числа вращения от параметра, слева на диаграмме представлен масштаб для дерева, справа для числа вращения (w). На графиках представлена зависимость динамической переменной x первого генератора (x_1) в сечении Пуанкаре гиперповерхностью $y_1 = 0$. Число вращения рассчитывалось следующим образом: оценивалось количество оборотов фазовой траектории первого генератора относительно сечения Пуанкаре $y_1 = 0$ и количество оборотов траектории второго генератора относительно $y_2 = 0$, и подсчитывалось отношение количества оборотов за достаточно длительное время, что эквивалентно пределу отношения набегов фаз осцилляторов. В наших численных экспериментах мы брали отношение количества витков во втором генераторе к количеству вит-

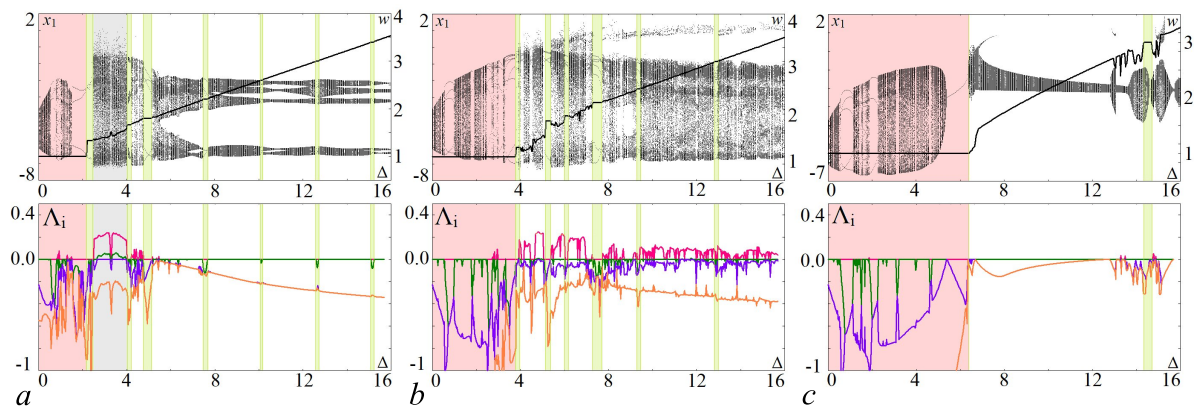


Рис. 5. Бифуркационное дерево, зависимость числа вращения от параметра Δ (верхняя панель) и соответствующие графики четырех старших показателей Ляпунова (нижняя панель) для системы связанных квазипериодических генераторов (4) при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$ и различных значениях силы связи: $a - M_C = 1.0$, $b - M_C = 2.9$, $c - M_C = 6.0$

Fig. 5. Bifurcation tree, dependence of the winding number on the parameter Δ (top panel) and corresponding plots of the four largest Lyapunov exponents (bottom panel) for a system of coupled quasi-periodic generators (4) for $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$ and different values of the coupling strength: $a - M_C = 1.0$, $b - M_C = 2.9$, $c - M_C = 6.0$

ков в первом. Когда количество оборотов за одно и то же время в подсистемах совпадает, число вращения равно 1. Также, аналогично [42], осуществлялась проверка ограниченности разности фаз осцилляторов. Выполнение этих двух условий говорит о наличии в системе фазовой синхронизации.

Мы выбрали три характерных значения силы связи: $M_C = 1$ – малая связь, внутри первой полосы двухчастотной квазипериодичности, $M_C = 2.9$ – внутри одной из полос хаотической динамики, $M_C = 6$ – сильная связь, внутри области квазипериодичности (частичная широкополосная синхронизация).

Для всех трех случаев на бифуркационном дереве и графике показателей Ляпунова, при малой частотной расстройке реализуются двухчастотные квазипериодические колебания (два старших показателя Ляпунова равны нулю), при этом число вращения равно единице, что соответствует фазовой синхронизации квазипериодических колебаний (данная область на рис. 5 отмечена розовым фоном). Внутри области фазовой синхронизации наблюдаются небольшие интервалы периодических колебаний, где только один показатель Ляпунова равен нулю, а второй меньше нуля. Данные области соответствуют полосам синхронизации второго автономного осциллятора. С увеличением силы связи область фазовой синхронизации увеличивается, что соответствует расширению языка фазовой синхронизации на плоскости параметров частотная расстройка – сила связи.

Выход из языка фазовой синхронизации для малых значений связи происходит через язык синхронизации на высших гармониках. При $M_C = 1$ на бифуркационном дереве хорошо виден цикл периода 3, внутри которого число вращения системы равно 1. Затем происходит перестройка режима на другой периодический режим, в результате которой число вращения скачком становится отличным от единицы. При этом на графике числа вращения наблюдается характерная «полочка», когда число вращения отлично от единицы, но при этом равно константе, что соответствует фазовой синхронизации более высокого порядка, с некоторым соотношением частот. Интервалы связи фазовой синхронизации с числом вращения, отличным от единицы, но равным константе, на рис. 5 обозначены светло-зеленым фоновым цветом. С дальнейшим увеличением параметра частотной расстройки наблюдается нарастание числа вращения. На интервалах с квазипериодической динамикой нарастание монотонное. При малых силах связи разрушение

фазовой синхронизации сопровождается переходом в область хаотической динамики. Как видно из карты показателей Ляпунова, в системе могут быть различные типы хаотической динамики в зависимости от спектра показателей Ляпунова. Для $M_C = 1$ (рис. 5, a) формируется гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова, для $M_C = 2.9$ – хаос с одним положительным показателем Ляпунова.

Для большей силы связи ($M_C = 6.0$, рис. 5, c) область фазовой синхронизации квазипериодических колебаний граничит с языком полной синхронизации (в данном случае под полной синхронизацией мы понимаем ситуацию, когда оба осциллятора демонстрируют предельный цикл периода 1). Соотношение чисел вращения в области полной синхронизации также равно единице. В случае большой силы связи при разрушении фазовой синхронизации не возникает хаотических колебаний, наблюдается переход в область широкополосной квазипериодичности, или частичной широкополосной синхронизации [26, 42, 54]. На рис. 5, c на графиках показателей Ляпунова хорошо видно, что при дальнейшем увеличении частотной расстройки в основном наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания. Бифуркационное дерево в области широкополосной квазипериодичности имеет отличную от квазипериодичности в области фазовой синхронизации структуру: оно более сжато, поскольку аттракторы в фазовом пространстве приближены к базовому состоянию равновесия. Число вращения в области частичной широкополосной синхронизации монотонно нарастает. При больших частотных расстройках двухчастотный тор испытывает различные бифуркации, при этом не хаотизируется.

На рис. 6, a представлены двумерные проекции отображений Пуанкаре системы (4) на плоскости динамических переменных каждой из подсистем, визуализирующие характерные инвариантные кривые в случае фазовой синхронизации квазипериодических колебаний и в случае широкополосной синхронизации квазипериодических колебаний для $M_C = 6.0$. Как видно из рисунка, при малой расстройке и фазовой синхронизации инвариантные кривые каждой из подсистем очень близки друг к другу. Когда расстройка большая, и в системе разрушилась фазовая синхронизация, то инвариантные кривые сильно отличаются друг от друга. Для первого осциллятора инвариантная кривая близка к той, что была при фазовой синхронизации. А во втором генераторе инвариантная кривая похожа на предельный цикл до порога бифуркации Неймарка–Сакера, который реализуется при таких параметрах в автономной подсистеме. Таким образом, получается, что первый осциллятор с автономной квазипериодикой вносит возмущения в автоколебания второго осциллятора, и вокруг цикла возникает двухчастотный тор. На рис. 6, b представлен пример отображения Пуанкаре после бифуркации удвоения инвариантной кривой внутри области широкополосной квазипериодичности. На рис. 6, d показано отображение Пуанкаре из области захвата частот осцилляторов с числом вращения, отличным от единицы.

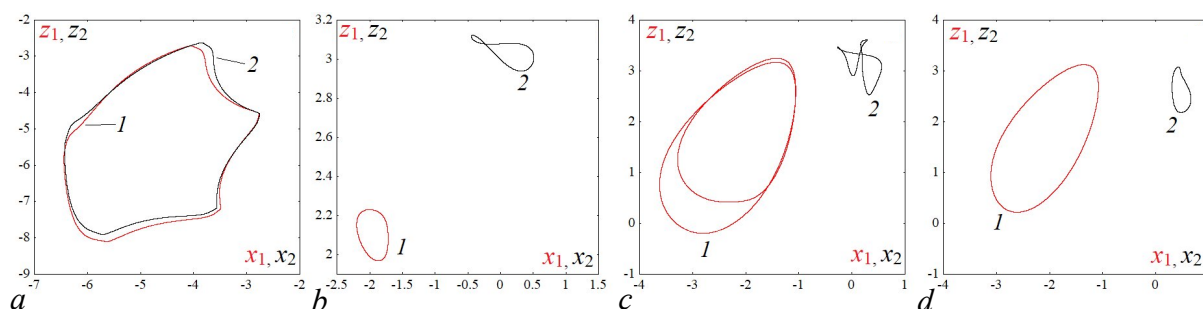


Рис. 6. Двумерные проекции отображений Пуанкаре на плоскости (x_1, z_1) и (x_2, z_2) связанных квазипериодических генераторов (4) при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$, $M_C = 6.0$. $a - \Delta = 0.5$, $b - \Delta = 11.5$, $c - \Delta = 14.0$, $d - \Delta = 14.5$

Fig. 6. Two-dimensional projections of the Poincaré maps on the planes (x_1, z_1) and (x_2, z_2) of coupled quasi-periodic generators (4) for $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$, $M_C = 6.0$. $a - \Delta = 0.5$, $b - \Delta = 11.5$, $c - \Delta = 14.0$, $d - \Delta = 14.5$

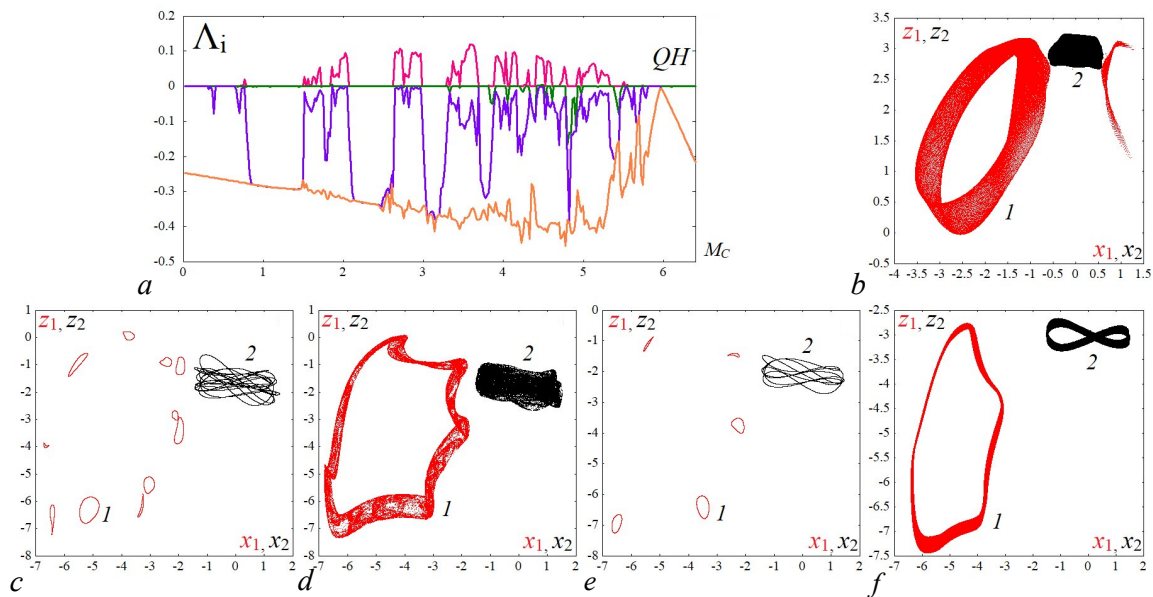


Рис. 7. *a* – График четырех старших показателей Ляпунова связанных квазипериодических генераторов (4) в зависимости от параметра силы связи M_C при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$, $\Delta = 11.5$ и двумерные проекции отображений Пуанкаре на плоскости (x_1, z_1) и (x_2, z_2) связанных квазипериодических генераторов (4) для некоторых точек на графике: *b* – $M_C = 5.9$, *c* – $M_C = 1.8$, *d* – $M_C = 1.7$, *e* – $M_C = 1.4$, *f* – $M_C = 0.5$

Fig. 7. *a* – Plot of the four largest Lyapunov exponents of coupled quasi-periodic generators (4) depending on the coupling strength parameter M_C for $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$, $\Delta = 11.5$ and two-dimensional projections of the Poincaré maps on the planes (x_1, z_1) and (x_2, z_2) for some points on the plot: *b* – $M_C = 5.9$, *c* – $M_C = 1.8$, *d* – $M_C = 1.7$, *e* – $M_C = 1.4$, *f* – $M_C = 0.5$

Уменьшение силы связи в режиме широкополосной квазипериодичности приводит к рождению трехчастотного тора. На рис. 7, *a* представлен график зависимости четырех старших показателей Ляпунова от силы связи при фиксированной частотной расстройке $\Delta = 11.5$. На графике хорошо идентифицируется квазипериодическая бифуркация Хопфа (QH). До порога бифуркации два показателя Ляпунова (Λ_1 и Λ_2) равны нулю, два следующих (Λ_3 и Λ_4) – отрицательные и одинаковые по абсолютному значению, после бифуркации третий показатель Ляпунова (Λ_3) становится нулевым. Динамический режим, характеризующийся тремя нулевыми показателями Ляпунова, в фазовом пространстве представляет собой трехчастотный квазипериодический режим (пример проекции отображения Пуанкаре представлен на рис. 7, *b*).

На графике показателей Ляпунова хорошо видно, что при дальнейшем уменьшении параметра связи наблюдается чередование полос хаотической и квазипериодической динамики. Полосы двухчастотной квазипериодичности имеют свою специфику. На рис. 7, *c* и 7, *e* представлены примеры проекций отображений Пуанкаре для двух различных полос квазипериодики. Отображение Пуанкаре в проекции на переменные первого осциллятора представляет собой несколько связанных компонент инвариантных кривых – на плоскости наблюдаются десять (рис. 7, *c*) и пять (рис. 7, *e*) гладких замкнутых инвариантных кривых. Такие торы называют многослойными (multi-layered torus [55–57]). В проекции на плоскость динамических переменных второго генератора инвариантная кривая представляет собой многооборотную инвариантную кривую. В различных полосах двухчастотной квазипериодичности количество связанных компонент и оборотов различны, что соответствует различным числам вращения этих торов. Полосы квазипериодики чередуются с полосами хаотического поведения, на рис. 7, *d* представлен пример отображения Пуанкаре для хаотического аттрактора в одной из полос. При приближении к нулевой силе связи в системе вновь наблюдается трехчастотный тор (рис. 7, *f*). Таким образом, рис. 7 хорошо демонстрирует сценарий потери гладкости трехчастотного тора в соответствии со сценарием Афраймовича–Шильникова. Двухчастотные многослойные торы являются результатом захвата

одной частоты и частичной синхронизации на поверхности трехчастотного тора. Перекрытие таких языков частичной синхронизации приводит к разрушению трехчастотного тора и формированию хаоса.

2.3. Мультистабильность. Для системы связанных квазипериодических генераторов (4) характерен еще один широко распространенный нелинейный эффект – мультистабильность [58, 59]. В рамках данного исследования были обнаружены два вида мультистабильности.

Одна из наблюдаемых мультистабильностей связана с внутренней симметрией, характерной для базового генератора (1)

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z. \quad (6)$$

Наличие такой симметрии приводит к тому, что в языках внутренней синхронизации автономной подсистемы (1) фазовое пространство может иметь два вида устройства. В первом – на границе языка синхронизации рождается симметричный аттрактор, который затем претерпевает бифуркацию потери симметрии, и уже два симметричных сосуществующих аттрактора демонстрируют дальнейшее развитие. Во втором – на границе языка синхронизации сразу рождается пара симметричных циклов, подробно структура фазового пространства в языках описана в [37]. Аналогичная особенность проявляется и в связанных системах, но только для двухчастотных режимов, которые появились на базе резонансных циклов. На рис. 8, *a* представлены двумерные проекции фазовых портретов сосуществующих аттракторов, представляющих собой два симметричных в соответствии с условием (6) двухчастотных тора. Начальные условия для построения каждого аттрактора были выбраны также в соответствии с условием (6): точка (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5) для красного портрета на рис. 8, *a* и (−0.5, −0.5, 0.5, −0.5, −0.5, 0.5) – для фиолетового

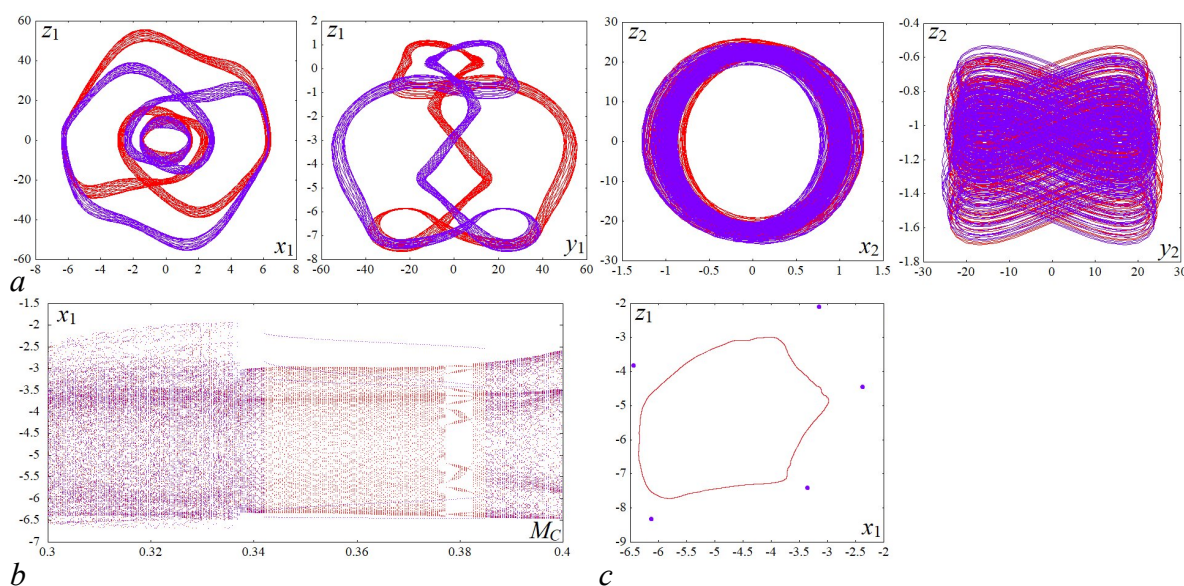


Рис. 8. Иллюстрации мультистабильности в связанных квазипериодических генераторах (4): *a* – пример сосуществующих симметричных аттракторов в виде двухчастотных торов при $\Delta = 5\pi$, $M_C = 2.21$; *b* – два бифуркационных дерева (фиолетовые и красные точки), построенных для разных начальных условий при $\Delta = 0.38$; *c* – двумерные проекции отображений Пуанкаре сосуществующих резонансного цикла (фиолетовые точки) и тора (красная инвариантная кривая) при $\Delta = 0.38$, $M_C = 0.36$. Остальные параметры: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$

Fig. 8. Illustrations of multistability in coupled quasi-periodic generators (4): *a* – an example of coexisting symmetric attractors in the form of two-frequency tori for $\Delta = 5\pi$, $M_C = 2.21$; *b* – two bifurcation trees (purple and red dots) constructed for different initial conditions at $\Delta = 0.38$; *c* – two-dimensional projections of the Poincaré maps of a resonance cycle (purple points) and a torus (red invariant curve) coexisting in the Poincaré section by the hypersurface $y_1 = 0$ at $\Delta = 0.38$, $M_C = 0.36$. Other parameters: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 2\pi$

портрета. В проекциях на плоскости динамических переменных первого генератора (x_1, y_1) и (y_1, z_1) симметрия хорошо просматривается. Проекция на переменные второго генератора более сжаты, поэтому отследить симметрию на них сложнее.

Также в системе возможна мультистабильность между различными типами аттракторов, не связанная с симметрией в системе. На рис. 8, *b* представлены два бифуркационных дерева, построенных для различных стартовых условий с наследованием начальных условий. На деревьях ясно отслеживается интервал по параметру связи, в котором предельный цикл периода 5 сосуществует с различными аттракторами. На рис. 8, *c* представлены двумерные проекции отображения Пуанкаре, визуализирующие сосуществующую инвариантную кривую и цикл периода 5. На бифуркационном дереве хорошо видно, что при изменении силы связи инвариантная кривая может трансформироваться в предельный цикл периода 12, на базе которого происходит вторичная бифуркация Неймарка–Сакера, и рождается многослойный тор (12-оборотный), который также сосуществует с циклом периода 5.

3. Динамика связанных осцилляторов, $\omega_0 = 7.85$, $\lambda = 3$, разрушенная инвариантная кривая

Теперь перейдем к случаю, когда в первом автономном генераторе параметры зафиксированы таким образом, что он демонстрирует хаотическое поведение, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 7.85$. На рис. 9, *a* представлена карта показателей Ляпунова для связанных квазипериодических генераторов (4) при указанных параметрах. На рис. 9, *b* представлен увеличенный фрагмент карты, визуализирующий структуру плоскости параметров при малых силе связи и частотной расстройке.

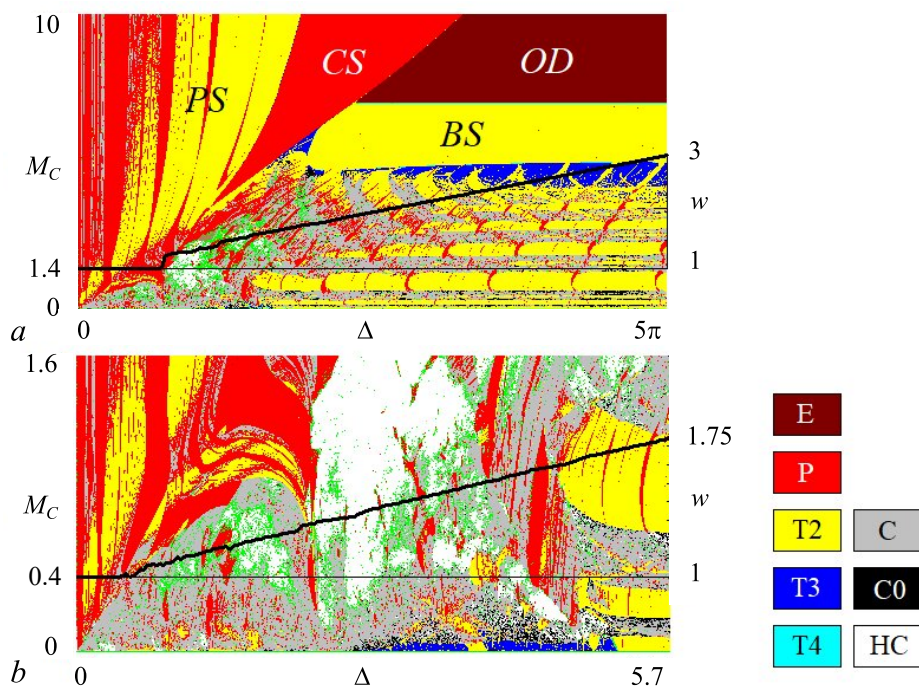


Рис. 9. Карта показателей Ляпунова связанных квазипериодических генераторов (4) (a) и ее увеличенный фрагмент (b) с зависимостями числа вращения от частотной расстройки (черная толстая линия) при $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 7.85$

Fig. 9. Chart of Lyapunov exponents of coupled quasi-periodic generators (4) (a) and its enlarged fragment (b) with dependences of the winding number on the frequency detuning (black thick line) at $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\kappa = 0.02$, $\beta = 1/30$, $\lambda = 3$, $\omega_0 = 7.85$

Структура карты аналогична предыдущему случаю (см. раздел 2, рис. 3). Имеется язык фазовой синхронизации, где число вращения равно 1. На рис. 9 на карты наложены графики чисел вращения для фиксированных параметров связи: $M_C=1.4$ – на рис. 9, а и $M_C=0.4$ – на рис. 9, б. Хорошо видно, что от нулевой частотной до определенного порога по частотной расстройке числа вращения равны единице, с увеличением силы связи порог увеличивается. Несмотря на то, что базовым режимом первого генератора является хаотический, внутри области фазовой синхронизации доминируют периодические и двухчастотные квазипериодические режимы.

Граница языка фазовой синхронизации при сильной связи соответствует переходу в область гибели колебаний или в область широкополосной квазипериодической синхронизации. При уменьшении силы связи из области широкополосной квазипериодической синхронизации наблюдается рождение трехчастотного тора и дальнейшее чередование полос двухчастотной квазипериодичности и хаоса. Необходимо отметить наличие системы языков двухчастотной квазипериодичности с основаниями на линии рождения трехчастотного тора. Такие языки представляют частичную синхронизацию на поверхности трехчастотного тора. Хорошая выраженность данной структуры связана с тем, что при $\omega_0 = 7.85$ в автономной подсистеме на границе бифуркации Неймарка–Сакера область двухчастотных торов наблюдается в довольно широком диапазоне по параметру λ .

С уменьшением силы связи наблюдается отличие карты режимов от случая, рассматриваемого в разделе 2. При малой силе связи почти вся многочастотная квазипериодика разрушается. На рис. 9, б показан фрагмент карты в области малой связи, где хорошо видно, что при малой расстройке наблюдаются хаотические режимы, с увеличением появляются небольшие области трехчастотных торов, которые с увеличением силы связи довольно быстро разрушаются. Четырехчастотная квазипериодика не наблюдается.

Заключение

Задача о взаимодействии простейших генераторов квазипериодических колебаний является очень многоплановой, поскольку описание полной картины синхронизации предполагает решение нескольких задач. В зависимости от типа поведения подсистем и изменения динамики при вариации параметров в картине синхронизации возникают свои особенности. В рамках данной работы изучена картина динамических режимов взаимодействующих квазипериодических генераторов для двух случаев: 1) когда один генератор всегда демонстрирует двухчастотные квазипериодические колебания, а динамика второго меняется при вариации параметра от квазипериодической к хаотической и периодической; 2) когда один генератор зафиксирован в режиме слабого хаоса (инвариантная кривая начала разрушаться), а второй также изменяет свое поведение из хаоса в квазипериодический, затем вновь в хаос и периодические колебания.

Динамика двух связанных генераторов очень разнообразна, наблюдаются периодические колебания, многочастотные квазипериодические колебания с различным количеством частот, хаотическое поведение, характеризующееся различным спектром показателей Ляпунова. Несмотря на многообразие динамических режимов, картина синхронизации двух диссипативно связанных квазипериодических генераторов имеет универсальную структуру. Наблюдаются квазипериодические фазовая и широкополосная синхронизации. Разрушение тора в подсистеме приводит к разрушению многочастотных торов в системе связанных осцилляторов, при этом двухчастотные квазипериодические режимы сохраняются. Также переход к хаотической динамике уменьшает разнообразие типов хаотических аттракторов, так, например, уменьшаются, а в некоторых случаях исчезают совсем области с хаосом с дополнительным нулевым показателем Ляпунова.

На примере системы связанных квазипериодических генераторов показана синхронизация на поверхности трехчастотного тора (частичный захват одной частоты из трех), а также реализация сценария потери гладкости трехчастотного тора по аналогии со сценарием Афраймовича–Шильникова.

Список литературы

1. *Landa P.S.* Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems. Springer Science & Business Media, 1996, vol. 360. 544 p. DOI: 10.1007/978-94-015-8763-1.
2. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Deterministic Nonlinear Systems. A Short Course: Springer Series in Synergetics. Springer International Publishing, Switzerland, 2014. 294 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06871-8.
3. *Glazier J.A., Libchaber A.* Quasi-periodicity and dynamical systems: An experimentalist's view // IEEE Transactions on circuits and systems. 1988. Vol. 35, no. 7. P. 790–809. DOI: 10.1109/31.1826.
4. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
5. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 19. С. 88–94.
6. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. С. 267–278. DOI: 10.20537/nd0603001.
7. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, no. 5. P. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
8. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, no. 4. P. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
9. *Анищенко В.С., Николаев С.М., Куртс Ю.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39–56. DOI: 10.20537/nd0801002.
10. *Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037123. DOI: 10.1063/1.2949929.
11. *Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86, no. 3. P. 30003. DOI: 10.1209/0295-5075/86/30003.
12. *Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237–252. DOI: 10.20537/nd0902006.
13. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, no. 1–2. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
14. *Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K.* Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 7. P. 1630016. DOI: 10.1142/S0218127416300160.
15. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Bulletin of the belgian mathematical society-Simon stevin. 2008. Vol. 15, no. 5. P. 769–787. DOI: 10.36045/bbms/1228486406.
16. *Inaba N., Kamiyama K., Kousaka T., Endo T.* Numerical and experimental observation of Arnol'd resonance webs in an electrical circuit // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. Vol. 311–312, no. 17. P. 17–24. DOI: 10.1016/j.physd.2015.08.008.
17. *Truong T.Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N.* Complicated quasiperiodic oscillations and chaos

- from driven piecewise-constant circuit: Chenciner bubbles do not necessarily occur via simple phase-locking // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2017. vol. 341, no. 4. P. 1–9.
DOI: 10.1016/j.physd.2016.09.008.
18. *Truong T.Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N.* Border-collision bifurcations and Arnol'd tongues in two coupled piecewise-constant oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2020. Vol. 401, no. 1. P. 132148. DOI: 10.1016/j.physd.2019.132148.
 19. *Wieczorek S., Krauskopf B., Lenstra D.* Mechanisms for multistability in a semiconductor laser with optical injection // *Opt. Commun.* 2000. Vol. 183, no. 1–4. P. 215–226.
DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00867-1.
 20. *Wieczorek S., Simpson T.B., Krauskopf B., Lenstra D.* Bifurcation transitions in an optically injected diode laser: theory and experiment // *Opt. Commun.* 2003. Vol. 215, no. 1–3. P. 125–134. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02191-0.
 21. *Anchikov D.A., Shakirov A.P., Krents A.A., Molevich N.E., Pakhomov A.V.* Multi-frequency tori in wide-aperture lasers // *Phys. Wave Phen.* 2016. Vol. 24, no. 2. P. 108–113.
DOI: 10.3103/S1541308X16020047.
 22. *Wu M., Kalinikos B.A., Carr L.D., Patton C.E.* Observation of spin-wave soliton fractals in magnetic film active feedback rings // *Phys. Rev. Lett.* 2006. vol. 96, no. 18. P. 187202.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.187202.
 23. *Ustinov A.B., Demidov V.E., Kondrashov A.V., Kalinikos B.A., Demokritov S.O.* Observation of the chaotic spin-wave soliton trains in magnetic films // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 1. P. 017201. DOI: 10.1103/physrevlett.106.017201.
 24. *Wang Z., Hagerstrom A., Anderson J.Q., Eykholt R., Tong W., Wu M., Carr L.D., Kalinikos B.A.* Chaotic spin-wave solitons in magnetic film feedback rings // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.114102.
 25. *Kondrashov A.V., Ustinov A.B., Kalinikos B.A.* Studying dynamic chaos in microwave ring generators based on normally magnetized ferromagnetic film // *Tech. Phys. Lett.* 2016. Vol. 42, no. 2. P. 208–211. DOI: 10.1134/S1063785016020279.
 26. *Emelianova Y.P., Emelyanov V.V., Ryskin N.M.* Synchronization of two coupled multimode oscillators with time-delayed feedback // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2014. Vol. 19, no. 10. P. 3778–3791. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.031.
 27. *Emelyanov V.V., Emelianova Y.P., Ryskin N.M.* The mutual synchronization of coupled delayed feedback klystron oscillators // *Tech. Phys.* 2016. Vol. 61, no. 8. P. 1256–1261.
DOI: 10.1134/S1063784216080089.
 28. *Ju H., Neiman A.B., Shilnikov A.L.* Bottom-up approach to torus bifurcation in neuron models // *CHAOS*. 2018. Vol. 28, no. 10. P. 106317. DOI: 10.1063/1.5042078.
 29. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
 30. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Synchronization of periodic self-sustained oscillations. *Deterministic Nonlinear Systems*. Springer Series in Synergetics, Springer, Cham, 2014. P. 217–243. DOI: 10.1007/978-3-319-06871-8_13.
 31. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, Heidelberg, 2009. 426 p.
DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
 32. *Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V.* Quasiperiodic synchronization for two delay-coupled semiconductor lasers // *Phys. Rev. A*. 1999. Vol. 59, no. 5. P. 3941–3949.
DOI: 10.1103/PhysRevA.59.3941.

33. *Mondal S., Pawar S.A., Sujith R.I.* Synchronous behaviour of two interacting oscillatory systems undergoing quasiperiodic route to chaos // *CHAOS*. 2017. Vol. 27, no. 10. P. 103119. DOI: 10.1063/1.4991744.
34. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Станкевич Н.В.* Автономный генератор квазипериодических колебаний // *Известия вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 2. С. 51–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-2-51-61.
35. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15, no. 6. P. 1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
36. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Co-existing hidden attractors in a radiophysical oscillator system // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2015. Vol. 48, no. 12. P. 125101. DOI: 10.1088/1751-8113/48/12/125101.
37. *Stankevich N.V., Volkov E.I.* Multistability in a three-dimensional oscillator: tori, resonant cycles and chaos // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 94, no. 4. P. 2455–2467. DOI: 10.1007/s11071-018-4502-9.
38. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013. Vol. 222, no. 10. P. 2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.
39. *Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.* Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // *arXiv preprint arXiv: 1809.07250*, 2018.
40. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 3. С. 409–419. DOI: 10.20537/nd1303002.
41. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Динамика связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 2. С. 41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58.
42. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Shchegoleva N.A., Stankevich N.V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 398, no. 12. P. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
43. *Stankevich N.V., Shchegoleva N.A., Sataev I.R., Kuznetsov A.P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 15, no. 11. P. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
44. *Xiao-Wen L., Zhi-Gang Z.* Phase Synchronization of Coupled Rössler Oscillators: Amplitude Effect // *Communications in Theoretical Physics*. 2007. Vol. 47, no. 2. P. 265–269. DOI: 10.1088/0253-6102/47/2/016.
45. *Pazó D., Sánchez E., Matías M.A.* Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2001. Vol. 11, no. 10. P. 2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.
46. *Pazó D., Matías M.A.* Direct transition to high-dimensional chaos through a global bifurcation // *Europhysics Letter*. 2005. Vol. 72, no. 2. P. 176–182. DOI: 10.1209/epl/i2005-10239-3.
47. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55, no. 3. P. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
48. *Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Y.V., Turukina L.V.* From chaos to quasiperiodicity // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, no. 2. P. 189–204. DOI: 10.1134/S1560354715020070.
49. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth

- dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15, no. 1. P. 9–20. DOI: 10.1007/BF02128236.
50. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные торы, их разрушение и стохастичность // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр.* / Е.А. Леонтович–Андропова. Горький: ГГУ, 1983. С. 3–26.
 51. *Aframovich V.S., Shilnikov L.P.* Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear Dynamics and Turbulence* / Eds. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
 52. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28. DOI: 10.20537/nd1201001.
 53. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 08. P. 1440005. DOI: 10.1142/S0218127414400057.
 54. *Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 244, no. 1. P. 36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
 55. *Zhusubaliyev Z.T., Mosekilde E.* Novel routes to chaos through torus breakdown in non-invertible maps // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238, no. 5. P. 589–602. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.012.
 56. *Zhusubaliyev Z.T., Laugesen J.L., Mosekilde E.* From multi-layered resonance tori to period-doubled ergodic tori // *Physics Letters A*. 2010. Vol. 374, no. 25. P. 2534–2538. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.04.022.
 57. *Zhusubaliyev Z.T., Yanochkina O.O., Mosekilde E.* Coexisting tori and torus bubbling in non-smooth systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2011. Vol. 240, no. 4–5. P. 397–405. DOI: 10.1016/j.physd.2010.10.001.
 58. *Attneave F.* Multistability in perception // *Scientific American*. 1971. Vol. 225, no. 6. P. 62–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
 59. *Pisarchik A.N., Feudel U.* Control of multistability // *Physics Reports*. 2014. Vol. 540, no. 4. P. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.

References

1. Landa P.S. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Springer Science & Business Media, 1996, vol. 360, 544 p. DOI: 10.1007/978-94-015-8763-1.
2. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. *Deterministic Nonlinear Systems. A Short Course: Springer Series in Synergetics*. Springer International Publishing, Switzerland, 2014, 294 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06871-8.
3. Glazier J.A., Libchaber A. Quasi-periodicity and dynamical systems: An experimentalist's view. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 1988, vol. 35, no. 7, p. 790–809. DOI: 10.1109/31.1826.
4. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V., Turukina L.V. *Physics of Quasiperiodic oscillations*. Saratov: Publishing center «Science», 2013, 252 p. (in Russian).
5. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Tech. Phys. Lett.*, 2005, vol. 31, no. 10, p. 853–855. DOI: 10.1134/1.2121837.
6. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Stability, synchronization and destruction of quasiperiodic motions. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 2, no. 3, p. 267–278. DOI: 10.20537/nd0603001 (In Russian).
7. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional

- torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 5, p. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
8. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 4, p. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
 9. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Synchronization mechanisms of resonant limit cycle on two-dimensional torus. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2008, vol. 4, no. 1, p. 39–56. DOI: 10.20537/nd0801002 (In Russian).
 10. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *CHAOS*, 2008, vol. 18, no. 3, p. 037123. DOI: 10.1063/1.2949929.
 11. Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force. *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, no. 3, p. 30003. DOI: 10.1209/0295-5075/86/30003.
 12. Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E., Feoktistov A.V. Numerical and experimental study of external synchronization of two-frequency oscillations. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 5, no. 2, p. 237–252. DOI: 10.20537/nd0902006 (In Russian).
 13. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 1–2, p. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
 14. Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 7, p. 1630016. DOI: 10.1142/S0218127416300160.
 15. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web. *Bulletin of the belgian mathematical society-Simon stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, p. 769–787. DOI: 10.36045/bbms/1228486406.
 16. Inaba N., Kamiyama K., Kousaka T., Endo T. Numerical and experimental observation of Arnol'd resonance webs in an electrical circuit, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2015, vol. 311–312, no. 17, pp. 17–24. DOI: 10.1016/j.physd.2015.08.008.
 17. Truong T.Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N. Complicated quasiperiodic oscillations and chaos from driven piecewise-constant circuit: Chenciner bubbles do not necessarily occur via simple phase-locking. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2017, vol. 341, no. 4, pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.physd.2016.09.008.
 18. Truong T.Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N. Border-collision bifurcations and Arnol'd tongues in two coupled piecewise-constant oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2020, vol. 401, no. 1, p. 132148. DOI: 10.1016/j.physd.2019.132148.
 19. Wicczorek S., Krauskopf B., Lenstra D. Mechanisms for multistability in a semiconductor laser with optical injection. *Opt. Commun.*, 2000, vol. 183, no. 1–4, p. 215–226. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00867-1.
 20. Wicczorek S., Simpson T.B., Krauskopf B., Lenstra D. Bifurcation transitions in an optically injected diode laser: theory and experiment. *Opt. Commun.*, 2003, vol. 215, no. 1–3, p. 125–134. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02191-0.
 21. Anchikov D.A., Shakirov A.P., Krents A.A., Molevich N.E., Pakhomov A.V. Multi-frequency tori in wide-aperture lasers. *Phys. Wave Phen.*, 2016, vol. 24, no. 2, p. 108–113. DOI: 10.3103/S1541308X16020047.
 22. Wu M., Kalinikos B.A., Carr L.D., Patton C.E. Observation of spin-wave soliton fractals in magnetic film active feedback rings. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, no. 18, p. 187202. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.187202.

23. Ustinov A.B., Demidov V.E., Kondrashov A.V., Kalinikos B.A., Demokritov S.O. Observation of the chaotic spin-wave soliton trains in magnetic films. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 1, p. 017201. DOI: 10.1103/physrevlett.106.017201.
24. Wang Z., Hagerstrom A., Anderson J.Q., Eykholt R., Tong W., Wu M., Carr L.D., Kalinikos B.A. Chaotic spin-wave solitons in magnetic film feedback rings. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, no. 11, p. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.114102.
25. Kondrashov A.V., Ustinov A.B., Kalinikos B.A. Studying dynamic chaos in microwave ring generators based on normally magnetized ferromagnetic film. *Tech. Phys. Lett.*, 2016, vol. 42, no. 2, p. 208–211. DOI: 10.1134/S1063785016020279.
26. Emelianova Y.P., Emelyanov V.V., Ryskin N.M. Synchronization of two coupled multimode oscillators with time-delayed feedback. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 10, p. 3778–3791. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.031.
27. Emelyanov V.V., Emelianova Y.P., Ryskin N.M. The mutual synchronization of coupled delayed feedback klystron oscillators. *Tech. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 8, p. 1256–1261. DOI: 10.1134/S1063784216080089.
28. Ju H., Neiman A.B., Shilnikov A.L. Bottom-up approach to torus bifurcation in neuron models. *CHAOS*, 2018, vol. 28, no. 10, p. 106317. DOI: 10.1063/1.5042078.
29. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2001. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
30. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Synchronization of periodic self-sustained oscillations. Deterministic Nonlinear Systems, *Springer Series in Synergetics, Springer, Cham*, 2014, p. 217–243. DOI: 10.1007/978-3-319-06871-8_13.
31. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Springer Series in Synergetics. *Springer-Verlag, Heidelberg*, 2009, 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
32. Hohl A., Gavrielides A., Erneux T., Kovanis V. Quasiperiodic synchronization for two delay-coupled semiconductor lasers. *Phys. Rev. A*, 1999, vol. 59, no. 5, p. 3941–3949. DOI: 10.1103/PhysRevA.59.3941.
33. Mondal S., Pawar S.A., Sujith R.I. Synchronous behaviour of two interacting oscillatory systems undergoing quasiperiodic route to chaos. *CHAOS*, 2017, vol. 27, no. 10, p. 103119. DOI: 10.1063/1.4991744.
34. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V. Autonomous generator of quasiperiodic oscillation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 2, p. 51–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58 (in Russian).
35. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 6, p. 1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
36. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V. Co-existing hidden attractors in a radiophysical oscillator system. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2015, vol. 48, no. 12, p. 125101. DOI: 10.1088/1751-8113/48/12/125101.
37. Stankevich N.V., Volkov E.I. Multistability in a three-dimensional oscillator: tori, resonant cycles and chaos. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 94, no. 4, p. 2455–2467. DOI: 10.1007/s11071-018-4502-9.
38. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space. *The European Physical Journal Special Topics*, 2013, vol. 222, no. 10, p. 2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.
39. Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.

40. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Synchronization of generators of quasiperiodic oscillations. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 3, p. 409–419. DOI: 10.20537/nd1303002 (In Russian).
41. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Dynamics of coupled generators of quasi-periodic oscillations with equilibrium state. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 2, p. 41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58 (In Russian).
42. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Shchegoleva N.A., Stankevich N.V. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2019, vol. 398, no. 12, p. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
43. Stankevich N.V., Shchegoleva N.A., Sataev I.R., Kuznetsov A.P. Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 15, no. 11, p. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
44. Xiao-Wen L., Zhi-Gang Z. Phase Synchronization of coupled Rössler oscillators: Amplitude effect. *Communications in Theoretical Physics*, 2007, vol. 47, no. 2, p. 265–269. DOI: 10.1088/0253-6102/47/2/016.
45. Pazó D., Sánchez E., Matías M.A. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, vol. 11, no. 10, p. 2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.
46. Pazó D., Matías M.A. Direct transition to high-dimensional chaos through a global bifurcation. *Europhysics Letter*, 2005, vol. 72, no. 2, p. 176–182. DOI: 10.1209/epl/i2005-10239-3.
47. Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 3, p. 2353–2361. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.2353.
48. Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Y.V., Turukina L.V. From chaos to quasiperiodicity. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 2, p. 189–204. DOI: 10.1134/S1560354715020070.
49. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, p. 9–20. DOI: 10.1007/BF02128236.
50. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Invariant tori, their destruction and stochasticity. Methods of the qualitative theory of differential equations: Interuniversity thematic collection of scientific papers, E.A. Leontovich–Andronova. Gorky: GSU, 1983, p. 3–26 (in Russian).
51. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Eds. G.I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitmen, 1983, p. 1–34.
52. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 1, p. 3–28. DOI: 10.20537/nd1201001 (In Russian).
53. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 08, p. 1440005. DOI: 10.1142/S0218127414400057.
54. Emelianova Y.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013, vol. 244, no. 1, p. 36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
55. Zhusubaliyev Z.T., Mosekilde E. Novel routes to chaos through torus breakdown in non-invertible maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2009, vol. 238, no. 5, p. 589–602. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.012.

56. Zhusubaliyev Z.T., Laugesen J.L., Mosekilde E. From multi-layered resonance tori to period-doubled ergodic tori. *Physics Letters A*, 2010, vol. 374, no. 25, p. 2534–2538. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.04.022.
57. Zhusubaliyev Z.T., Yanochkina O.O., Mosekilde E. Coexisting tori and torus bubbling in non-smooth systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2011, vol. 240, no. 4–5, p. 397–405. DOI: 10.1016/j.physd.2010.10.001.
58. Attneave F. Multistability in perception. *Scientific American*, 1971, vol. 225, no. 6, p. 62–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
59. Pisarchik A.N., Feudel U. Control of multistability. *Physics Reports*, 2014, vol. 540, no. 4, p. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий кафедрой динамических систем Саратовского государственного университета в СФ ИРЭ РАН. Имеет звание профессора (2002). Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны» (сборник задач), «Задачи физических олимпиад» и др.

Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 имени В.А. Котельникова РАН
 E-mail: apkuz@rambler.ru



Станкевич Наталья Владимировна – родилась в Саратове (1985), окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2007). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) по специальности «радиофизика». С 2011 года работает доцентом Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации». Опубликовала 30 научных статей в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Член редакционной коллегии журнала «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering».

Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 имени В.А. Котельникова РАН
 Россия, 603055 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
 Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
 Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
 E-mail: stankevichnv@mail.ru



Щеголева Наталья Александровна – родилась в городе Вольске (1992). Окончила среднюю общеобразовательную школу № 2 (лицей) Вольска с золотой медалью (2009). С 2009 по 2014 г. – студентка Саратовского государственного университета. С 2014 по 2019 г. – аспирантка Саратовского государственного университета. Участник конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых».

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
 E-mail: migunovanatasha@mail.ru