

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 621.37; 537.862; 517.925.42

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом

Д. С. Голдобин¹✉, А. В. Долматова^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉denis.goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

Поступила в редакцию 22.11.2020, принята к публикации 19.02.2021,

опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель настоящего исследования – построить редуцированные модели, описывающие макроскопическую динамику ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом, с помощью метода круговых кумулянтов. **Методы.** Динамика системы рассматривается в рамках фазового приближения. Уравнения динамики получены с помощью метода круговых кумулянтов. Оценка устойчивости асинхронного состояния произведена на основании линейного анализа. Для верификации полученных результатов используется численное моделирование. **Результаты.** Получена бесконечная цепочка кумулянтных уравнений, описывающих макроскопическую динамику ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом. Предложены два варианта замыкания кумулянтного ряда, позволяющие построить редуцированные модели динамики ансамбля. **Заключение.** Показано, что для ансамбля фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото случай мультипликативного шума сводится к случаю аддитивного только в пределе высоких частот. Более того, при низких частотах колебаний неустойчивость асинхронного состояния к формированию макроскопической коллективной моды становится монотонной. Показано, что предложенные двухкумулянтные модели позволяют с достаточной точностью описать макроскопическую динамику системы, тогда как подход Отта–Антонсена и гауссово приближение показывают неудовлетворительные результаты при невысоких частотах.

Ключевые слова: теория синхронизации, кумулянтное разложение, круговые кумулянты, ансамбли осцилляторов.

Благодарности. А. В. Долматова признательна Норпексаль Фонду за поддержку.

Для цитирования: Голдобин Д. С., Долматова А. В. Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 288–301. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise

D. S. Goldobin¹✉, A. V. Dolmatova^{1,2}

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia

E-mail: ✉denis.goldobin@gmail.com, anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

Received 22.11.2020, accepted 19.02.2021, published 31.03.2021

Abstract. The purpose of this work is developing reduced models describing the macroscopic dynamics of the Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise on the basis of the method of circular cumulants. *Methods.* The dynamics of the system is considered within the framework of the phase reduction. The dynamics equations are obtained by the method of circular cumulants. Stability of the asynchronous state is considered on the basis of linear analysis. Results are verified by the numerical simulation. *Results.* The infinite cumulant equation chain is derived for the Kuramoto ensemble with intrinsic multiplicative noise. Two closures of the cumulant series are proposed to construct reduced models of the ensemble dynamics. *Conclusion.* For a phase oscillator population with Kuramoto global coupling, the case of a multiplicative noise converges to the case of an additive one only in the high-frequency limit. Moreover, for low frequencies, the instability of the asynchronous state to formation of a macroscopic collective mode becomes monotonous. Two-cumulant model reductions provide a reasonable accuracy for the macroscopic description of the population dynamics. Meanwhile, the Ott–Antonsen ansatz and the Gaussian approximation fail to represent the system dynamics accurately for non-high frequencies.

Keywords: synchronization theory, cumulant expansion, circular cumulant, oscillator ensembles.

Acknowledgements. A. V. Dolmatova acknowledges the support by the Norpeksal Foundation.

For citation: Goldobin DS, Dolmatova AV. Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(2):288–301.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Теория Отта–Антонсена [1, 2], получившая широкое развитие в последние годы, существенным образом продвинула понимание динамических процессов для широкого класса моделей в теории коллективных явлений (например, для модели осцилляторов Курамото [3–6]). В основе данной теории лежит использование свойства частичной интегрируемости уравнений динамики больших ансамблей идентичных элементов, показанное Ватанабэ и Строгацем [7–10]. Тем не менее, многие реальные физические системы (например, [11–13]) оказывались за рамками области применимости теории Отта–Антонсена. Не так давно был предложен новый подход [14–16], основанный на применении формализма круговых кумулянтов, позволяющий получить обобщение подхода Отта–Антонсена. В частности, в работах [14, 15] исследуется динамика ансамблей осцилляторов с аддитивным внутренним шумом в фазе элементов ансамбля. Однако не меньший интерес представляет случай мультипликативного шума. Например, в ансамбле квадратичных нейронов-пороговых интеграторов («integrate-and-fire neurons») аддитивный внутренний шум в мембранном потенциале приводит к возникновению мультипликативного шума в фазе колебаний [17–20].

В настоящей работе показан способ математически строгого описания системы с мультипликативным шумом в рамках формализма круговых кумулянтов. Получена бесконечная цепочка кумулянтных уравнений и предложена редуцированная макроскопическая модель, ограниченная

двумя ведущими кумулянтами. Предложенный подход применен к ансамблю осцилляторов со связью типа Курамото. Описанное двухкумулянтное замыкание вносит поправку к приближению Отта–Антонсена порядка σ^2 (σ^2 – интенсивность шума). Примечательно, с технической точки зрения, что данное замыкание требует малости кумулянтов более высоких порядков; это может наблюдаться также при умеренном и сильном шуме в некоторых системах (см. например, [15]).

1. Ансамбль фазовых элементов типа Отта–Антонсена с мультипликативным внутренним шумом

1.1. Уравнение Фоккера–Планка и динамика параметров порядка Курамото–Дайдо. Рассмотрим ансамбль N связанных между собой фазовых элементов под действием мультипликативного внутреннего шума:

$$\dot{\varphi}_n = \omega(t) + \text{Im}(2h(t)e^{-i\varphi_n}) + \sqrt{2}\sigma \sin \varphi_n \xi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь φ_n – фаза n -го элемента; $\omega(t)$ и $h(t)$ – произвольные действительная и комплексная величины, которые могут меняться со временем, но должны оставаться одинаковыми для всех элементов; как показано ниже, связь между элементами может быть организована через $h(t)$ -член; σ – интенсивность внутреннего шума; $\xi_n(t)$ – нормированные δ -коррелированные гауссовы шумы: $\langle \xi_n \rangle_\xi = 0$ и $\langle \xi_n(t) \xi_m(t_1) \rangle_\xi = 2\delta_{nm}\delta(t-t_1)$, $\langle \dots \rangle_\xi$ обозначает значения, усредненные по реализациям шума. Стохастические уравнения (1) рассматриваются в смысле Стратоновича. Важно заметить, что выражение (1) может описывать широкий класс систем со связью, содержащей одну гармонику. В качестве фазовых элементов могут выступать как осцилляторы, так и активные ротаторы или возбудимые системы. Так, в частности, для систем типа Курамото с коэффициентом связи K , описываемых уравнением вида

$$\dot{\varphi}_n = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

ω соответствует собственной частоте элементов, а функция $h(t) = \frac{K}{2} Z_1$, где введен комплексный параметр порядка $Z_1 \equiv N^{-1} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}$.

При $\sigma = 0$ в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ данная система может быть описана теорией Отта–Антонсена [1, 2]. Однако наличие индивидуальных внутренних шумов нарушает условия применимости теории Отта–Антонсена.

Множитель $\sin \varphi_n$, стоящий при интенсивности шума в уравнении (1), соответствует случаю, когда шум воздействует на слабонегармонические осцилляторы (например, [21, 22]). В частности, такая постановка может быть применима при описании ансамбля метрономов [11]. В выражении (1) множитель $\sqrt{2}$ введен для нормировки: в пределе высоких частот влияние внутреннего шума на макроскопическую коллективную динамику определяется средним значением $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\sigma \sin \varphi)^2 d\varphi = \sigma^2$ [23].

Эволюция распределения плотности вероятности $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)$ в стохастической системе (1) с независимыми шумами $\xi_n(t)$ описывается уравнением Фоккера–Планка [24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left[(\omega(t) - ih(t)e^{-i\varphi_n} + ih^*(t)e^{i\varphi_n}) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) \right] = \\ = \sum_{n=1}^N 2\sigma^2 \sum \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left(\sin \varphi_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \left(\sin \varphi_n W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) \right) \right), \end{aligned}$$

где в общем случае $h(t)$ и $\omega(t)$ могут быть функциями фаз. Распределение фазы отдельного элемента φ_1 определяется интегралом $w(\varphi_1, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t)$. При интегрировании уравнения Фоккера–Планка по переменным $\varphi_2, \dots, \varphi_N$ интегралы от соответствующих производных обращаются в нуль, $\int_0^{2\pi} d\varphi_n \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(\dots) = 0$, из-за периодичности распределения плотности вероятности: $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n + 2\pi, \dots, \varphi_N, t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots, \varphi_N, t)$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varphi_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N (\omega(t) - ih(t) e^{-i\varphi_1} + ih^*(t) e^{i\varphi_1}) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = \\ = 2\sigma^2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\sin \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\sin \varphi_1 w(\varphi_1, t) \right) \right). \end{aligned}$$

Далее ограничим рассмотрение ситуациями, когда ни один элемент φ_n не вносит в $h(t)$ или $\omega(t)$ решающего вклада, а все вклады сравнительно «равноправны» – так, например, обстоят дела в случае ансамбля Курамото с глобальной связью [3] или популяций нейронов с разреженной сетью связей [20]. Для таких ситуаций вклад отдельного элемента в $h(t)$ (или в $\omega(t)$) оказывается порядка $1/N$, и в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ величину $h(t)$ (или $\omega(t)$) можно рассматривать как «среднее поле», полагая $\int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N h(t) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = h(t) w(\varphi_1, t)$ (и $\int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_N \omega(t) W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, t) = \omega(t) w(\varphi_1, t)$). Тогда уравнение эволюции распределения фазы $w(\varphi, t)$ отдельного элемента принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varphi, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\omega(t) - ih(t) e^{-i\varphi} + ih^*(t) e^{i\varphi}) w(\varphi, t) \right] = \\ = 2\sigma^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi w(\varphi, t) \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс «1» опущен, поскольку распределение фазы каждого элемента в ансамбле подчиняется такому же уравнению, и статистически отдельные элементы неразличимы. При «среднеполевом» описании $w(\varphi, t)$ дает распределение фаз в ансамбле.

В пространстве Фурье, где $w(\varphi, t) \equiv (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(t) e^{-im\varphi}$, $a_0 = 1$ по определению, а $a_{-m} = a_m^*$, уравнение (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_m = m(i\omega(t) a_m + h(t) a_{m-1} - h^*(t) a_{m+1}) - \\ - \sigma^2 \left(m^2 a_m - \frac{m(m-1)}{2} a_{m-2} - \frac{m(m+1)}{2} a_{m+2} \right), \quad \text{для } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Можно заметить, что усредненные по ансамблю значения $a_m = \int_0^{2\pi} w(\varphi, t) e^{im\varphi} d\varphi$ соответствуют параметрам порядка Курамото–Дайдо [25].

Далее перейдем к ансамблю с неидентичными частотами элементов. Для простоты рассмотрим случай не зависящих от времени собственных частот ω_n , хотя для многих физических систем данная процедура может быть применена и для зависящих от времени $\omega_n(t)$ (например, см. [17–20]). Рассмотрим лоренцево распределение частот ω_n с медианой Ω и полушириной γ : $g(\omega) = \gamma/(\pi[\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2])$. В этом случае можно рассмотреть подансамбли с одинаковыми значениями частоты ω и написать уравнения (3), описывающие динамику $a_m(\omega, t)$, для каждого подансамбля. Тогда средние по всему ансамблю параметры порядка задаются следующим образом:

$$Z_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_m(\omega, t) g(\omega) d\omega. \quad (4)$$

Полученная система уравнений (3) для параметров a_m с положительными индексами m не включает в себя a_m с отрицательными индексами, которые являются комплексно-сопряженными $a_{-m}=a_m^*$. Член уравнения $\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1)a_{m-2}$, который, на первый взгляд, содержит $a_{-1}=a_1^*$ при $m=1$, на самом деле обращается в нуль при $m=1$: $\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1)a_{m-2} = 0 \cdot a_{-1}$. Заметим, что для множества функций $\{a_m(\omega), m=1, 2, 3, \dots\}$, которые являются аналитическим продолжением a_m как функций от ω на комплексную плоскость, система (3) также является аналитической, что позволяет найти значение интеграла (4) через вычеты. В результате получаем $Z_m(t) = a_m(\omega + i\gamma, t)$ (для детального описания, см., например, [1, 26]). Таким образом, из системы уравнений (3) следует

$$\dot{Z}_m = m[(i\Omega - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}] - \sigma^2 \left(m^2 Z_m - \frac{m(m-1)}{2} Z_{m-2} - \frac{m(m+1)}{2} Z_{m+2} \right), \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

1.2. Уравнения коллективной динамики в терминах круговых кумулянтов. Система уравнений (5) при $\sigma \neq 0$ не допускает в качестве решения подстановку Отта–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$ (так же, как и гауссово приближение $Z_m \approx |Z_1|^{m^2-m} (Z_1)^m$ [27–30]). Тем не менее динамику системы вблизи многообразия Отта–Антонсена можно описать с помощью метода круговых кумулянтов [14]. В работе [31] показано, что результаты, полученные этим методом, хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Рассматривая параметры порядка Z_m как моменты $e^{i\varphi}$, можно ввести характеристическую функцию в следующем виде [24, 32]:

$$F(k, t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}. \quad (6)$$

С помощью характеристической функции (6) становится возможным ввести генерирующую функцию так называемых «круговых кумулянтов» κ_m :

$$\Psi(k, t) \equiv k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m(t) k^m. \quad (7)$$

Определение (7) приведено в несколько нетипичном для кумулянтного формализма виде, так как такая формулировка позволяет получить простейшую форму кумулянтных уравнений [14] и оказывается наиболее естественной для установления взаимосвязи между переменными Ватанабэ–Строгаца [7–10] и круговыми кумулянтами [33]. В частности, три первых кумулянта могут быть выражены следующим образом: $\kappa_1 = Z_1$, $\kappa_2 = Z_2 - Z_1^2$ и $\kappa_3 = (Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3)/2$.

В терминах круговых кумулянтов решение Отта–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$ имеет следующий простой вид: $\kappa_1 = Z_1$, $\kappa_{m>1} = 0$. Данная одноэлементная форма, в отличие от бесконечной серии Z_m , позволяет построить теорию возмущений к решению Отта–Антонсена.

Для генерирующей функции $F(k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}$ система уравнений (5) позволяет найти $\frac{\partial}{\partial t} F(k, t)$. Для членов уравнений можно заметить следующее:

- для mZ_m : $k \frac{\partial}{\partial k} F = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_m \frac{k^m}{m!}$;
- для mZ_{m-1} : $kF = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_{m-1} \frac{k^m}{m!}$;
- для mZ_{m+1} : $k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F = \sum_{m=0}^{\infty} km(m-1)Z_m \frac{k^{m-2}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} mZ_{m+1} \frac{k^m}{m!}$;

- для $m^2 Z_m$: $k \frac{\partial}{\partial k} \left(k \frac{\partial}{\partial k} F \right) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 Z_m \frac{k^m}{m!}$;
- для $m(m-1) Z_{m-2}$: $k^2 F = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) Z_{m-2} \frac{k^m}{m!}$;
- для $m(m+1) Z_{m+2}$: $k \frac{\partial^2}{\partial k^2} \left(k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F \right) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)^2(m-2) Z_m \frac{k^{m-2}}{m!} =$
 $= \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) Z_{m+2} \frac{k^m}{m!}$.

Тогда

$$\partial_t F = (i\Omega - \gamma) k \partial_k F + h k F - h^* k \partial_k^2 F - \sigma^2 \left(k \partial_k (k \partial_k F) - \frac{1}{2} [k^2 F + k \partial_k^2 (k \partial_k^2 F)] \right), \quad (8)$$

где ∂_t и ∂_k обозначают частные производные по t и k . Применив определение (7), можно найти $\partial_t \Psi = k \partial_k \frac{\partial_t F}{F}$ и из уравнения (8) получить следующее:

$$\partial_t \Psi = k \partial_k \left[(i\Omega - \gamma) \Psi + h k - h^* \left(k \partial_k \frac{\Psi}{k} + \frac{\Psi^2}{k} \right) - \sigma^2 \left(k \partial_k \Psi + \Psi^2 - \frac{k^2}{2} - \frac{(k \partial_k - 1)^2 (k \partial_k - 2) \Psi + (2(k \partial_k)^2 - 6k \partial_k + 5) \Psi^2 - (k \partial_k \Psi)^2 + (2k \partial_k - 4) \Psi^3 + \Psi^4}{2k^2} \right) \right]. \quad (9)$$

С учетом (7) выражение (9) дает

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_m = m \left[(i\Omega - \gamma) \kappa_m + h \delta_{1m} - h^* \left(m \kappa_{m+1} + \sum_{m_1+m_2=m+1} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \right) - \right. \\ \left. - \sigma^2 \left(m \kappa_m + \sum_{m_1+m_2=m} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} - \frac{1}{2} \delta_{2m} - \frac{m(m+1)^2}{2} \kappa_{m+2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m_1+m_2=m+2} \frac{2m^2 + 2m + 1 - m_1 m_2}{2} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} - \sum_{m_1+m_2+m_3=m+2} m \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \kappa_{m_3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=m+2} \frac{1}{2} \kappa_{m_1} \kappa_{m_2} \kappa_{m_3} \kappa_{m_4} \right) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Для первых трех кумулянтов получаем:

$$\dot{\kappa}_1 = (i\Omega - \gamma) \kappa_1 + h - h^* (\kappa_2 + \kappa_1^2) - \sigma^2 [\kappa_1 - \kappa_1^3 - 2\kappa_3 - 3\kappa_1 \kappa_2], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2 = 2(i\Omega - \gamma) \kappa_2 - 4h^* (\kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2) - \\ - \sigma^2 [4(1 - 3\kappa_1^2) \kappa_2 - (1 - \kappa_1^2)^2 - 18\kappa_4 - 20\kappa_1 \kappa_3 - 9\kappa_2^2], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_3 = 3(i\Omega - \gamma) \kappa_3 - 3h^* (3\kappa_4 + 2\kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2^2) - \\ - 3\sigma^2 [3\kappa_3 + 2\kappa_1 \kappa_2 - 24\kappa_5 - 21\kappa_1 \kappa_4 - 19\kappa_2 \kappa_3 - 9\kappa_1^2 \kappa_3 - 9\kappa_1 \kappa_2^2 - 2\kappa_1^3 \kappa_2]. \quad (13) \end{aligned}$$

Оценим порядок малости старших кумулянтов при $\kappa_1 \sim 1$ и интенсивности шума $\sigma^2 \ll 1$ с допущением, что соответствующее значение κ_{m+1} не больше значения κ_m . Уравнение (12) требует для κ_2 следующего порядка малости: $\kappa_2 \sim \sigma^2$. Далее, $\kappa_3 \sim \max\{|\kappa_2|^2, \sigma^2 |\kappa_2|\}$, то есть, $\kappa_3 \sim \sigma^4$. Продолжая, можно заметить, что допустима иерархия малости кумулянтов вида $\kappa_m \sim \sigma^{2(m-1)}$.

В противном случае, если по каким-либо причинам $\kappa_1 \sim \varepsilon \ll 1$, то в соответствии с уравнением (12), $\kappa_2 \sim \sigma^2$. Далее, в соответствии с уравнением (13), $\kappa_3 \sim \sigma^4$. Обобщая на кумулянты более высоких порядков, получаем $\kappa_{m>1} \sim \sigma^{2(m-1)}$. Таким образом, мы получили ту же самую иерархию, что и для $\kappa_1 \sim 1$. Мы показали, что при малой интенсивности шума σ^2 круговые кумулянты подчиняются универсальной иерархии; это позволяет использовать оборванную цепочку кумулянтных уравнений для приблизительного описания макроскопической динамики ансамбля.

2. Двухкумулянтные приближения для описания коллективной динамики

В данном разделе рассмотрены двухкумулянтные редуцированные модели для описания динамики ансамбля Курамото [3,4]

$$h = \frac{K}{2} Z_1, \quad (14)$$

где K – коэффициент связи.

В работе [15] проанализирована динамика ансамбля Курамото и ансамбля связанных активных ротаторов с помощью подстановки Отта–Антонсена $Z_m = (Z_1)^m$, приближения Гаусса $Z_m \approx |Z_1|^{m^2-m} (Z_1)^m$ и двухкумулянтного приближения с тремя возможными замыканиями для κ_3 . В рассматриваемом же нами случае для небольших частот Ω оказывается, что использование как приближения Отта–Антонсена, так и приближения Гаусса зачастую дает неверный результат даже при малом шуме $\sigma^2 = 0.01$. Замыкания для κ_3 и κ_4 также не дают существенного выигрыша по сравнению со случаем $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$. Соответственно, ограничим наше рассмотрение двумя редуцированными моделями:

- **(C20)** простое двухкумулянтное обрывание системы уравнений (10), при котором полагаются $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$ и опускаются все слагаемые, чей вклад ниже порога точности уравнений, заданного иерархией $\kappa_m \sim \sigma^{2(m-1)}$:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + h - h^*(\kappa + Z^2) - \sigma^2 Z(1 - Z^2), \quad (15)$$

$$\dot{\kappa} = 2(i\Omega - \gamma)\kappa - 4h^* Z \kappa - \sigma^2 [4\kappa - (1 - Z^2)^2]. \quad (16)$$

Здесь для краткости обозначений и удобства сравнения с другими источниками введены обозначения $\kappa_1 = Z$ и $\kappa_2 = \kappa$. Слагаемое $4\sigma^2 \kappa$ сохранено, несмотря на его малость, так как оно вводит диссипативность в динамику системы, которая является существенной при $\gamma = 0$ и консервативной h .

- **(C2e)** двухкумулянтное обрывание системы уравнений (10), при котором полагаются $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, но остальные слагаемые в уравнениях (11)–(12) сохраняются:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + h - h^*(\kappa + Z^2) - \sigma^2 Z(1 - Z^2 - 3\kappa), \quad (17)$$

$$\dot{\kappa} = 2(i\Omega - \gamma)\kappa - 4h^* Z \kappa - \sigma^2 [4\kappa(1 - 3Z^2) - (1 - Z^2)^2]. \quad (18)$$

2.1. Линейная устойчивость асинхронного состояния. В ансамбле (1) с мультипликативными внутренними шумами не может поддерживаться равномерное распределение фаз; система уравнений (11)–(13) не допускает решения $\kappa_1 = \kappa_{n>1} = 0$. Тем не менее система допускает $\kappa_1 = 0$, когда связь Курамото (14) между элементами ансамбля также равна 0. Вследствие этого считаем, что система без взаимодействия между осцилляторами находится в асинхронном состоянии при $\kappa_1 = 0$. Система уравнений (11)–(13) позволяет найти все нечетные $\kappa_{2l+1} = 0$ для такого асинхронного состояния.

Линеаризация уравнения (17) определяет свойства устойчивости асинхронного состояния:

$$\dot{Z} = (i\Omega - \gamma)Z + \frac{K}{2}(Z - Z^*\kappa) - \sigma^2 Z(1 - 3\kappa), \quad (19)$$

где не зависящий от времени второй кумулянт κ определяется выражениями (16) и (18):

$$\kappa = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2 + 2\gamma - i2\Omega}. \quad (20)$$

Выражения (19) и (20) позволяют найти инкременты линейных возмущений:

$$\lambda = -\gamma - \sigma^2(1 - 3\operatorname{Re}\kappa) + \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2\sigma^4/16}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2} - (\Omega + 3\sigma^2\operatorname{Im}\kappa)^2}, \quad (21)$$

где $\kappa = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\gamma + 2\sigma^2 + i\Omega}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2}$.

При достаточно большой частоте Ω инкремент является комплексной величиной, и неустойчивость является колебательной с пороговым значением

$$K_{\text{osc}} = 2(\gamma + \sigma^2) - \frac{3(\gamma + 2\sigma^2)\sigma^4}{\Omega^2 + (\gamma + 2\sigma^2)^2}. \quad (22)$$

При малом значении Ω неустойчивость становится монотонной. Выражение для порога монотонной неустойчивости является слишком громоздким, поэтому приведем только конечный результат вычислений значения K , дающего в уравнении (21) $\lambda_+ = 0$, на рис. 1.

В отличие от аддитивного шума мультипликативный шум нарушает вращательную симметрию системы и может приводить к появлению неврашающихся макроскопических состояний, возникающих из-за монотонной неустойчивости асинхронного состояния. При фиксированном значении γ мультипликативный шум всегда поднимает порог как колебательной, так и монотонной устойчивости.

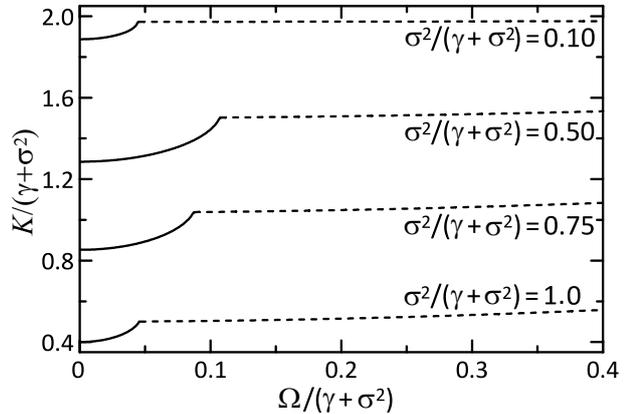


Рис. 1. Порог неустойчивости асинхронного состояния. При низких частотах неустойчивость является монотонной (сплошные линии), а на средних и высоких частотах неустойчивость является колебательной (пунктирные линии, уравнение (22))

Fig. 1. Asynchronous state instability threshold. At low frequencies the instability is monotonic (solid lines) and at medium and high frequencies the instability is oscillatory (dotted lines, equation (22))

3. Результаты численного моделирования

Можно заметить, что в пределе высоких частот $\Omega \rightarrow \infty$ уравнение (22) ожидаемо имеет такой же порог неустойчивости $2(\gamma + \sigma^2)$, как и в случае аддитивных внутренних шумов [1]. Для дальнейшего анализа удобно выбрать в качестве единицы времени $(\gamma + \sigma^2)^{-1}$ и соответствующим образом перемасштабировать все параметры, то есть задать $\gamma + \sigma^2 = 1$ при $0 \leq \sigma^2 \leq 1$ в уравнениях (11)–(13). Тогда порог неустойчивости асинхронного состояния в пределе высоких частот имеет вид $K_* = 2(\gamma + \sigma^2) = 2$.

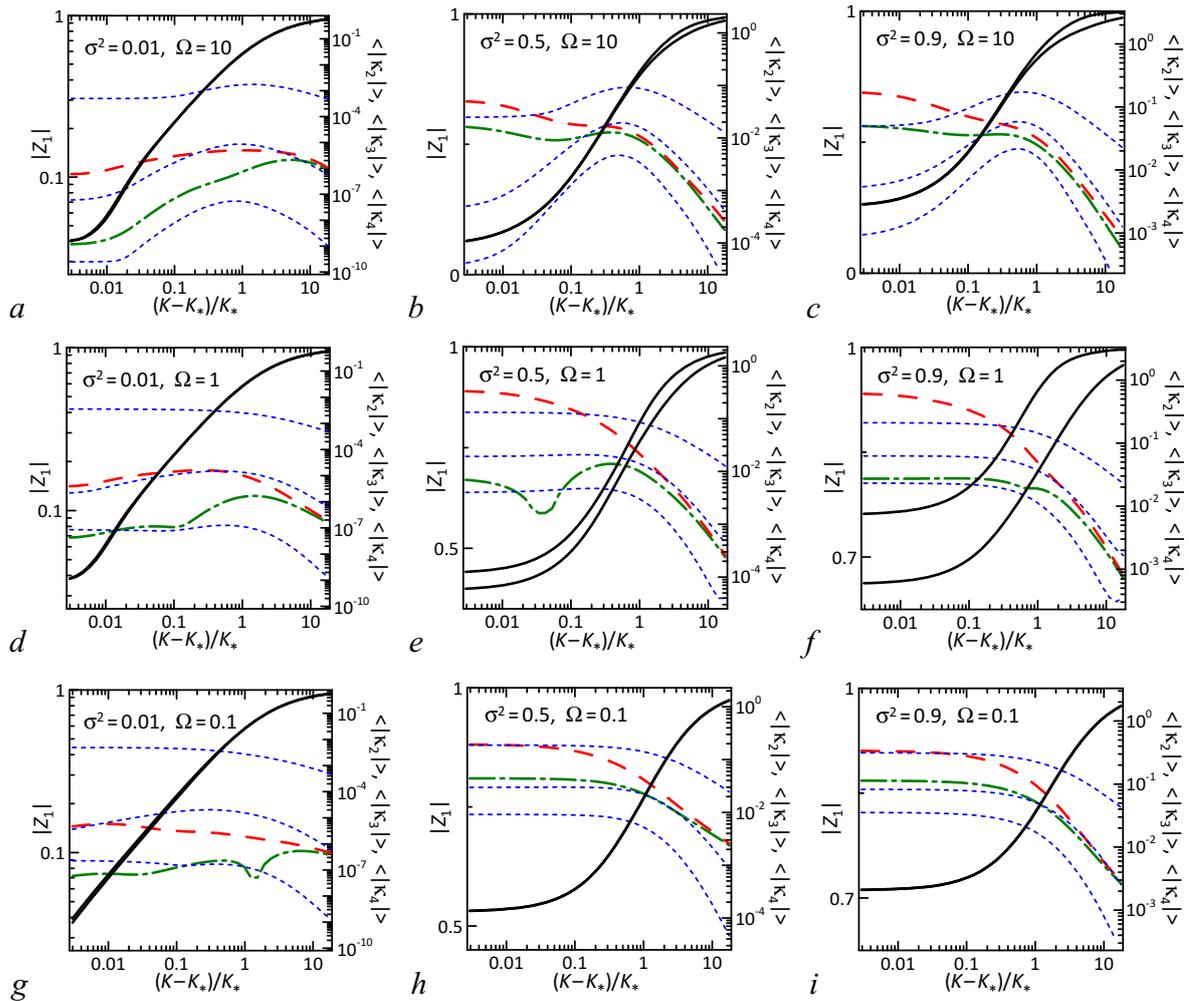


Рис. 2. Параметр порядка $|Z_1|$ для «точных» устойчивых решений изменяется со временем в пределах, ограниченных сплошными черными линиями; эти линии сливаются для не зависящих от времени состояний на рисунках h, i . Круговые кумулянты 2–4-го порядков (сверху вниз) для точных решений показаны пунктирными линиями (масштаб на правой оси). Штриховой и штрихпунктирной линиями построены погрешности редуцированных моделей C20 и C2e соответственно (масштаб на правой оси, определение погрешности дано в тексте)

Fig. 2. Order parameter $|Z_1|$ for exact stable solutions changes over time within the limits bounded by solid black lines; these lines coincide for time-independent states in the figures h, i . Circular cumulants of 2 to 4 orders (from top to bottom) for exact solutions are shown by dotted lines (scale is on the right axis). Errors of reduced models C20 and C2e are plotted with dashed lines and dashed-dotted lines, respectively (scale is on the right axis, the definition of the error is given in the text)

Для верификации полученных низкоразмерных редуцированных уравнений было проведено прямое численное моделирование цепочки уравнений (5) для ансамбля Курамото с 250 элементами Z_m . Полученное «точное» решение сравнивалось с результатами численного моделирования для двухкумулянтных приближений C20 и C2e (уравнения (15)–(16) и (17)–(18), соответственно). Результаты приведены на рис. 2. В первую очередь, заметим, что в отсутствие мультипликативного шума система инвариантна относительно поворотов, и устанавливающийся при частичной синхронизации режим является режимом с предельным циклом: $|Z_1| = \text{const}$, а фаза параметра порядка Z_1 вращается с постоянной скоростью. В терминах абсолютного значения параметра порядка этот предельный цикл представляется точкой. Введение же мультипликативного шума нарушает вращательную инвариантность, и предельный цикл теряет строго круговую форму. На рис. 2 сплошные линии показывают максимальное и минимальное по времени значения $|Z_1|$

в установившемся режиме. Две линии почти сливаются при $\sigma^2/\Omega \ll 1$, когда искажение мало, и точно совпадают при разрушении предельного цикла, когда параметр порядка становится постоянным, что возможно при больших значениях σ^2/Ω . Пунктирными линиями показаны средние по времени абсолютные значения круговых кумулянтов κ_2 , κ_3 , κ_4 для устойчивого точного решения. На рисунке наглядно видна иерархия малости, которой подчиняются кумулянты, и благодаря которой становится возможным использование редуцированных кумулянтных моделей. Штриховая и штрихпунктирная линии показывают погрешность вычисления Z_1 в рамках предложенных двухкумулянтных приближений. Для стационарных макроскопических состояний (графики (h) и (i)) погрешность определяется как модуль разности комплексных значений параметра порядка для точного и приближенного решений, а для предельных циклов – как полусумма отклонений между сечениями Пуанкаре для гиперповерхностей $\text{Re } Z_1 = 0$ и $\text{Im } Z_1 = 0$ (берутся пересечения при переходе из $\text{Re } Z_1 < 0$ в $\text{Re } Z_1 > 0$ и из $\text{Im } Z_1 < 0$ в $\text{Im } Z_1 > 0$, соответственно). Можно видеть, что оба двухкумулянтные приближения достаточно точно представляют макроскопическое коллективное поведение системы.

Заключение

В работе предложен подход к описанию динамики большого ансамбля фазовых осцилляторов типа Отта–Антонсена с внутренним мультипликативным шумом с помощью круговых кумулянтов. Показано, что в случае мультипликативного шума вывод кумулянтных уравнений оказывается существенно более сложным, чем в случае аддитивного шума [14]; тогда как во многих представляющих интерес прикладных случаях внутренний шум является существенно мультипликативным. В рамках работы предложены и проанализированы две редуцированные двухкумулянтные модели (система (15)–(16) и система (17)–(18)), основанные на замыкании бесконечной цепочки кумулянтных уравнений (10).

Показано, что для ансамбля фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото случай мультипликативного шума сводится к случаю аддитивного только в пределе высоких частот. Более того, при низких частотах колебаний неустойчивость асинхронного состояния к формированию макроскопической коллективной моды становится монотонной. Двухкумулянтные модели позволяют с достаточной точностью описать макроскопическую динамику системы, тогда как подход Отта–Антонсена и гауссово приближение дают неудовлетворительные результаты при невысоких частотах. Полученные результаты могут иметь важное значение для описания сетей квадратичных нейронов-пороговых интеграторов, когда аддитивный внутренний шум в мембранном потенциале приводит к возникновению мультипликативного шума в фазе колебаний [19, 20]. В результате даже при слабом внутреннем (эндогенном) шуме можно ожидать качественно новых режимов макроскопического поведения ансамбля, которые невозможно получить вблизи многообразия Отта–Антонсена [20, 34].

Список литературы

1. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos. 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037113. DOI: 10.1063/1.2930766.
2. Ott E., Antonsen T. M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19, no. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/1.3136851.
3. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics, vol. 39. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.

5. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
6. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 9. P. 097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
7. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Integrability of a globally coupled oscillator array // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, no. 16. P. 2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391.
8. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Constants of motion for superconducting Josephson arrays // *Physica D*. 1994. Vol. 74, no. 3–4. P. 197–253. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90196-1.
9. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, no. 26. P. 264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
10. *Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H.* Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // *Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 043104. DOI: 10.1063/1.3247089.
11. *Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O.* Chimera states in mechanical oscillator networks // *PNAS*. 2013. Vol. 110, no. 26. P. 10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110.
12. *Totz J. F., Rode J., Tinsley M. R., Showalter K., Engel H.* Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators // *Nature Phys.* 2018. Vol. 14, no. 3. P. 282–285. DOI: 10.1038/s41567-017-0005-8.
13. *Pietras B., Daffertshofer A.* Network dynamics of coupled oscillators and phase reduction techniques // *Phys. Rep.* 2019. Vol. 819. P. 1–105. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.06.001.
14. *Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott–Antonsen ansatz // *Phys. Rev. Lett.* 2018. Vol. 120, no. 26. P. 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101.
15. *Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 10. P. 101101. DOI: 10.1063/1.5053576.
16. *Тюлькина И. В., Голдобин Д. С., Клименко Л. С., Пиковский А. С.* Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта–Антонсена // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 8. С. 718–728. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7.
17. *Pazó D., Montbrió E.* Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators // *Phys. Rev. X*. 2014. Vol. 4, no. 1. P. 011009. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.011009.
18. *Montbrió E., Pazó D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Phys. Rev. X*. 2015. Vol. 5, no. 2. P. 021028. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.021028.
19. *Ullner E., Politi A., Torcini A.* Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 8. P. 081106. DOI: 10.1063/1.5049902.
20. *di Volo M., Torcini A.* Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses // *Phys. Rev. Lett.* 2018. Vol. 121, no. 12. P. 128301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.128301.
21. *Goldobin D. S.* Anharmonic resonances with recursive delay feedback // *Phys. Lett. A*. 2011. Vol. 375, no. 39. P. 3410–3414. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.07.059.
22. *Goldobin D. S.* Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014. Vol. 223, no. 4. P. 677–685. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02133-y.

23. *Голдобин Д. С., Долматова А. В.* Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 3. С. 33–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60.
24. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983. 442 p.
25. *Daido H.* Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function // *Physica D.* 1996. Vol. 91, no. 1–2. P. 24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X.
26. *Crawford J. D.* Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators // *J. Stat. Phys.* 1994. Vol. 74, no. 5–6. P. 1047–1084. DOI: 10.1007/BF02188217.
27. *Zaks M. A., Neiman A. B., Feistel S., Schimansky-Geier L.* Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, no. 6. P. 066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206.
28. *Sonnenschein B., Schimansky-Geier L.* Approximate solution to the stochastic Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 5. P. 052111. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.052111.
29. *Sonnenschein B., Peron T. K. D., Rodrigues F. A., Kurth J., Schimansky-Geier L.* Collective dynamics in two populations of noisy oscillators with asymmetric interactions // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 6. P. 062910. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062910.
30. *Hannay K. M., Forger D. B., Booth V.* Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators // *Sci. Adv.* 2018. Vol. 4, no. 8. P. e1701047. DOI: 10.1126/sciadv.1701047.
31. *Goldobin D. S., Dolmatova A. V.* Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // *Phys. Rev. Research.* 2019. Vol. 1, no. 3. P. 033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139.
32. *Lukacs E.* Characteristic Functions. 2nd edition. Griffin, London, 1970. 350 p.
33. *Голдобин Д. С., Клименко Л. С.* О связи между распределением фаз Ватанабэ–Строгаца и круговыми кумулянтами // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2019. № 2. С. 24–34. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34.
34. *Ratas I., Pyragas K.* Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, no. 5. P. 052211. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.052211.

References

1. Ott E, Antonsen TM. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos.* 2008;18(3):037113. DOI: 10.1063/1.2930766.
2. Ott E, Antonsen TM. Long time evolution of phase oscillator systems. *Chaos.* 2009;19(2):023117. DOI: 10.1063/1.3136851.
3. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H. (eds) International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics, vol. 39. Springer, Berlin, Heidelberg; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
4. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, Berlin, Heidelberg; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
5. Acebrón JA, Bonilla LL, Vicente CJP, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
6. Pikovsky A, Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. *Chaos.* 2015;25(9):097616. DOI: 10.1063/1.4922971.
7. Watanabe S, Strogatz SH. Integrability of a globally coupled oscillator array. *Phys. Rev. Lett.* 1993;70(16):2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391.

8. Watanabe S, Strogatz SH. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D*. 1994;74(3–4):197–253. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90196-1.
9. Pikovsky A, Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2008;101(26):264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
10. Marvel SA, Mirollo RE, Strogatz SH. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos*. 2009;19(4):043104. DOI: 10.1063/1.3247089.
11. Martens EA, Thutupalli S, Fourrière A, Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *PNAS*. 2013;110(26):10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110.
12. Totz JF, Rode J, Tinsley MR, Showalter K, Engel H. Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators. *Nature Phys.* 2018;14(3):282–285. DOI: 10.1038/s41567-017-0005-8.
13. Pietras B, Daffertshofer A. Network dynamics of coupled oscillators and phase reduction techniques. *Phys. Rep.* 2019;819:1–105. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.06.001.
14. Tyulkina IV, Goldobin DS, Klimenko LS, Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz. *Phys. Rev. Lett.* 2018;120(26):264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101.
15. Goldobin DS, Tyulkina IV, Klimenko LS, Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos*. 2018;28(10):101101. DOI: 10.1063/1.5053576.
16. Tyulkina IV, Goldobin DS, Klimenko LS, Pikovsky AS. Two-bunch solutions for the dynamics of Ott-Antonsen phase ensembles. *Radiophys. Quantum El.* 2019;61(8–9):640–649. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7.
17. Pazó D, Montbrió E. Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. X*. 2014;4(1):011009. DOI: 10.1103/PhysRevX.4.011009.
18. Montbrió E, Pazó D, Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons. *Phys. Rev. X*. 2015;5(2):021028. DOI: 10.1103/PhysRevX.5.021028.
19. Ullner E, Politi A, Torcini A. Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons. *Chaos*. 2018;28(8):081106. DOI: 10.1063/1.5049902.
20. di Volo M, Torcini A. Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses. *Phys. Rev. Lett.* 2018;121(12):128301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.128301.
21. Goldobin DS. Anharmonic resonances with recursive delay feedback. *Phys. Lett. A*. 2011;375(39):3410–3414. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.07.059.
22. Goldobin DS. Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014;223(4):677–685. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02133-y.
23. Goldobin DS, Dolmatova AV. Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(3):33–60 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60.
24. Gardiner CW. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo; 1983. 442 p.
25. Daido H. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function. *Physica D*. 1996;91(1–2):24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X.

26. Crawford JD. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. *J. Stat. Phys.* 1994;74(5–6):1047–1084. DOI: 10.1007/BF02188217.
27. Zaks MA, Neiman AB, Feistel S, Schimansky-Geier L. Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2003;68(6):066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206.
28. Sonnenschein B, Schimansky-Geier L. Approximate solution to the stochastic Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2013;88(5):052111. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.052111.
29. Sonnenschein B, Peron TKD, Rodrigues FA, Kurth J, Schimansky-Geier L. Collective dynamics in two populations of noisy oscillators with asymmetric interactions. *Phys. Rev. E.* 2015;91(6):062910. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062910.
30. Hannay KM, Forger DB, Booth V. Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators. *Sci. Adv.* 2018;4(8):e1701047. DOI: 10.1126/sciadv.1701047.
31. Goldobin DS, Dolmatova AV. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series. *Phys. Rev. Research.* 2019;1(3):033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139.
32. Lukacs E. *Characteristic Functions*. 2nd edition. Griffin, London; 1970. 350 p.
33. Goldobin DS, Klimenko LS. On relationships between the distribution of Watanabe–Strogatz phases and circular cumulants. *Bulletin of Perm University. Physics.* 2019(2):24–34 (in Russian). DOI: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34.
34. Ratas I, Pyragas K. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons. *Phys. Rev. E.* 2019;100(5):052211. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.052211.

Голдобин Денис Сергеевич – родился в Перми (1981), окончил физический факультет Пермского государственного университета (2004). В 2007 году защитил диссертацию на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (ПермГУ) и Dr. rer. nat. по теоретической физике (Университет Потсдама, Германия). Работал в университетах Потсдама, Лестера и Перми и Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь). Область научных интересов – вибрационные эффекты в гидродинамике, тепловая конвекция, статистическая физика, нелинейная динамика, моделирование геофизических процессов. Автор более 70 научных статей по указанным выше направлениям.



Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
 Институт механики сплошных сред УрО РАН,
 Россия, 614990 Пермь, ул. Букирева, 15
 Пермский государственный национальный исследовательский университет
 E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

Долматова Анастасия Владимировна – родилась в Перми (1990), окончила физический факультет Пермского государственного университета (2012). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (ИМСС УрО РАН, Пермь, 2016). Работает в Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь) и Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН (Москва). Область научных интересов – механика жидкости и газа, нелинейная динамика, моделирование геофизических процессов. Автор более 20 научных статей по указанным выше направлениям.



Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
 Институт механики сплошных сред УрО РАН
 Россия, 127994 Москва, Большой Каретный пер., 19/1
 Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
 E-mail: anastasiya.v.dolmatova@gmail.com