

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений

Е. В. Рыбалова[✉], В. С. Анищенко

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия

E-mail: [✉]rybalovaev@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2020, принята к публикации 7.12.2020,
опубликована 31.03.2021

Аннотация. Цель работы – численное исследование динамики двумерной решетки локально связанных отображений Рутькова. Анализируются условия возникновения, существования и свойства автоволновых пространственно-временных структур в виде спиральных и концентрических волн. Изучается влияние шума на динамику решетки при вариации интенсивности шума и размеров области решетки, на которую воздействует шум. **Методы.** Эволюция динамики решетки в численном эксперименте напрямую определяется соответствующими рекуррентными соотношениями. По результатам численного моделирования строятся мгновенные значения амплитуд для всех элементов решетки, пространственно-временные диаграммы её сечения при различных значениях управляющих параметров парциальных элементов, различной интенсивности воздействующего шума и области воздействия. Результаты сравниваются. Область воздействия шума задается в виде квадрата из малого числа осцилляторов в центре решетки. **Результаты.** Установлено, что при определенных значениях управляющих параметров отображений, параметров связи и начальных условий в решетке могут существовать долгоживущие режимы спиральных и концентрических волн. Показано, что режимы спиральных волн, как правило, являются переходными, существуют конечное время и становятся долгоживущими только при некоторых значениях параметров и начальных условий. При влиянии шума на конечную область решетки, демонстрирующую спиральные волны, может наблюдаться переход к спиральным волнам с другой структурой или к концентрическим волнам, но при снятии шумового возмущения решетка возвращается в исходный режим или происходит переход к когерентной динамике. Режимы концентрических волн являются более устойчивыми к воздействию шума и наблюдаются на больших временах. Если же концентрические волны все-таки видоизменяются при воздействии шума, то после снятия шумового возмущения установившийся под действием шума режим продолжает существовать. **Заключение.** Показана возможность наблюдения спиральных и концентрических волн в решетке локально связанных отображений Рутькова. При этом определены области на плоскости управляющих параметров парциальных элементов, в которых наблюдаются данные автоволновые структуры. Исследование влияния соотношения между интенсивностью шума и размером области воздействия позволило выделить область, в которой всегда наблюдается переход от спиральных волн к концентрическим, и область, в которой данная возможность зависит от начальных состояний элементов решетки и реализации шума. Воздействие шума на концентрические волны может индуцировать появление только концентрических волновых химер, которые продолжают существовать и после отключения шумового воздействия.

Ключевые слова: двумерный ансамбль, локальная связь, спиральные волны, концентрические волны, воздействие шума.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-12-00119.

Для цитирования: Рыбалова Е. В., Анищенко В. С. Воздействие шума на режимы спиральных и концентрических волн в двумерной решетке локально связанных отображений // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 272–287. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of noise on spiral and target wave regimes in two-dimensional lattice of locally coupled maps

E. V. Rybalova[✉], V. S. Anishchenko

Saratov State University, Russia

E-mail: [✉]rybalovaev@gmail.com

Received 29.10.2020, accepted 7.12.2020, published 31.03.2021

Abstract. The *objective* is to study numerically the dynamics of two-dimensional lattice of locally coupled maps of Rulkov. We analyze conditions for the appearance and existence as well as the properties of auto-wave spatio-temporal structures which are represented by spiral and target waves. The influence of noise on the lattice dynamics is explored as the noise intensity and the size of the noise-disturbed region are varied. *Methods.* In numerical experiments the evolution of the lattice dynamics is directly determined by the corresponding recurrence relations. The numerical data are used to construct spatial distributions of the instantaneous values of the amplitudes for all the network elements, spatio-temporal diagrams for the lattice cross-section at different values of the control parameters of the individual nodes, for various noise intensities and different sizes of the noise-disturbed region. The obtained results are compared. The noise-disturbed region is specified as a square which consists of a small number of oscillators at the lattice center. *Results.* It is found that for certain values of the control parameters of the maps, of the coupling parameters, and the initial conditions, long-lived spiral and target waves can exist in the lattice. It is shown that the spiral wave regimes are, as a rule, transient, can be observed for a finite time and become long-lived only for certain values of the parameters and the initial conditions. When the noise influences a finite region of the lattice showing spiral waves, the transition to spiral waves with a different structure or to target waves can occur. However, if the noise disturbance is removed, the lattice returns to its original mode or exhibits the transition to coherent dynamics modes. The target waves are more resistant to the noise and are observed for longer times. If the noise causes the target waves to change, the resulting regime continues to exist after removing the noise source. *Conclusion.* It is shown that the spiral and target waves can be observed in the lattice of locally coupled Rulkov maps. The regions where these waves exist are defined and constructed in the plane of the control parameters of the individual elements. Studying the impact of the relation between the noise intensity and the size of the noise-disturbed region enables one to distinguish the region where the transition from spiral to target waves always occurs, as well as the area inside which this transition depends on the initial states of the lattice elements and the noise realization. The effect of noise on the target waves can induce the appearance of only target wave chimeras which continue to exist even after the noise excitation is turned off.

Keywords: two-dimensional ensemble, locally coupling, spiral wave, target wave, noise influence.

Acknowledgements. The reported study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 20-12-00119).

For citation: Rybalova EV, Anishchenko VS. Influence of noise on spiral and target wave regimes in two-dimensional lattice of locally coupled maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(2):272–287.

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-272-287

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблема формирования пространственно-временных структур в активных нелинейных средах и их моделях на протяжении долгих лет продолжает оставаться актуальной. Подтверждением этого служит постоянный интерес к проблеме специалистов по нелинейной теории колебаний и волн и нелинейной динамике [1–17]. В связи с трудностями аналитического рассмотрения задач возбуждения и анализа пространственно-временных структур в непрерывной среде многие специалисты исследуют более простые модели распределенных сред в виде ансамблей связанных нелинейных осцилляторов с применением численных методов. В качестве индивидуальных элементов ансамблей используются нелинейные осцилляторы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 4–8, 10, 12–17], а также осцилляторы, задаваемые системами

с дискретным временем (отображениями) [2, 3, 7, 10, 15, 17]. При формулировке таких моделей важным является способ задания функций связи между взаимодействующими осцилляторами ансамблей. В качестве основных топологий, как правило, рассматривают локальную [2–4, 8, 15] и глобальную [14–16] связи. В последние годы широкое распространение получили модели с нелокальной связью между осцилляторами [18–25]. Во многом это объясняется открытием так называемых «химерных структур», которые рождаются, как правило, в ансамблях при условии нелокальной связи [19, 21, 22, 24–26]. Предметом исследований в настоящей работе являются автоволновые структуры в виде спиральных и концентрических волн, которые можно получить в решетке локально связанных дискретных осцилляторов Рулькова [27, 28]. Решаются две основные задачи: анализ условий рождения и свойств автоволновых структур в двумерной решетке и реакция свойств этих структур на шумовое возмущение. Шумовое воздействие задается в виде подачи шума на квадрат из относительно малого числа осцилляторов в центре решетки. Отметим, что анализ индуцированных внешним шумом переходов применительно к спиральным и концентрическим волнам хотя и был частично затронут в работах [27, 28], но в полной мере и с исследованием влияния интенсивности шума и области воздействия проводится впервые.

Настоящая работа посвящена памяти нашего коллеги, крупного ученого в области теории динамических систем и нелинейной динамики профессора Сергея Петровича Кузнецова.

1. Исследуемая модель

Изучается динамика двумерного ансамбля, представляющего собой сеть локально связанных отображений (1). Для двумерных отображений, связанных через функции, ансамбль описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_{i,j}^{t+1} &= f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) + \frac{\sigma_x}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_x(x_{m,n}^t, y_{m,n}^t) - f_x(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)] + \sqrt{2D_x} \xi_{i,j}^t, \\y_{i,j}^{t+1} &= f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t) + \frac{\sigma_y}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_y(x_{m,n}^t, y_{m,n}^t) - f_y(x_{i,j}^t, y_{i,j}^t)] + \sqrt{2D_y} \xi_{i,j}^t,\end{aligned}\quad (1)$$

где f_x и f_y – правые части отображения, σ_x и σ_y – коэффициенты, определяющие силу связи между элементами по переменным x и y , соответственно. Двойные индексы динамических переменных $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$ характеризуют положение элемента на двумерной решетке, $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$. $N = 200$ – размер решетки по x и y . Граничные условия выбирались свободными. В таком случае суммирование в слагаемом связи (второе слагаемое в уравнениях (1)) ведется по индексам, удовлетворяющим условию (2). $B_{i,j}$ – количество элементов, с которыми связан каждый i -й осциллятор, то есть количество элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{cases} \max(1, i-1) \leq m \leq \min(N, i+1), \\ \max(1, j-1) \leq n \leq \min(N, j+1), \quad m \neq n. \end{cases}\quad (2)$$

Как мы видим, в случае расположений элемента внутри решетки $B_{i,j} = 8$, для элементов, находящихся на границе, $B_{i,j} = 5$, а для угловых элементов – $B_{i,j} = 3$. Связь между осцилляторами вводилась только через переменную y и была фиксирована для всех проведенных расчетов: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0.8$. Коэффициенты D_x и D_y отвечают за интенсивность аддитивного шума, $\xi_{i,j}^t$ – генератор шума с нормальным распределением (с нулевым средним и единичным отклонением), то есть изменение коэффициентов D_x и D_y ведет к изменению отклонения в распределении шума. В разделах 2, 3 описывается динамика сети в отсутствие шума ($D_x = D_y = 0$).

В качестве парциальных элементов сети были выбраны дискретные осцилляторы Рутькова, описывающие динамику нейронов [29]:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \alpha/(1-x_n) + y_n, & x \leq 0 \\ \alpha + y_n, & 0 < x < \alpha + y, \\ -1, & x \geq \alpha + y, \end{cases} \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma,$$

где первое уравнение отвечает за быструю динамическую переменную, а второе – за медленную. Увеличение параметров σ и α ведет к увеличению частоты колебаний в одиночном отображении Рутькова. Параметр μ мы фиксируем на значении 0.001.

Все полученные режимы устанавливались со случайных равномерных распределенных начальных условий для координаты x в интервале $[-0.4 : 0.4]$ и фиксированных y : $y_{i,j}^0 = -3.8$. Для иллюстрации некоторых результатов мы отбрасывали переходное время ($t_{\text{trans}} \neq 0$), а для других строили мгновенные профили и проводили анализ, не отбрасывая время установления ($t_{\text{trans}} = 0$). В подписях к каждому рисунку указывается переходное время. Под временем t понимается время итерирования (число итераций) после переходного процесса. Если $t_{\text{trans}} = 0$, то считаем t от 0.

2. Пространственно-временные структуры в решетке отображений Рутькова

В данной работе сила связи между элементами была зафиксирована $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0.8$. Именно при таких значениях параметров имела возможность наблюдать спиральные и концентрические волны в исследуемой решетке (1). В ходе численных экспериментов изменялись только значения управляющих параметров индивидуальных элементов (σ и α). На рис. 1, а на плоскости управляющих параметров представлены области реализации концентрических и спиральных волновых структур, построенные для времени итерирования $t = 500$ и $t_{\text{trans}} = 100000$. Черными линиями отмечены границы между различными типами поведения индивидуальных отображений. Данные линии построены по результатам численного моделирования.

Спиральные волны наблюдаются в области малых значений параметра σ , а по управляющему параметру α область является узкой и лежит в окрестности значения $\alpha = 4.0$ (см. рис. 1, а). Пример спиральной структуры представлен на рис. 1, b, c. Концентрические волны имеют более обширную область наблюдения по параметрам σ и α . Более того, можно выделить две области существования концентрических волн в зависимости от вида мгновенных пространственных структур, наблюдаемых в решетке (рис. 1, d, e и рис. 1, f, g). Данные концентрические волны отличаются динамикой ядра. В первом случае (для концентрической волны 1-го типа) ядром является центральный элемент (кластер центральных элементов), от которого или к которому идут волны (их направление зависит как от параметров, так и от начальных условий элементов решетки) (см. рис. 1, d, e), при этом динамика ядра принципиально не отличается от динамики всей остальной решетки. На временной диаграмме в некоторых случаях видны небольшие отклонения в динамике ядра (см. рис. 1, e), но его все равно нельзя сравнить с ядром концентрической волны второго типа. Ядро концентрической волны второго типа представляет собой круглый кластер элементов, динамика которых отличается от динамики элементов, лежащих вне ядра (см. рис. 1, f, g). На рис. 1, g представлена пространственно-временная диаграмма для сечения по элементу $j = 125$, которое проходит через два ядра концентрических волн. Можно видеть, что динамика элементов $25 < i < 50$ и $140 < i < 160$ отличается от динамики остальных элементов,

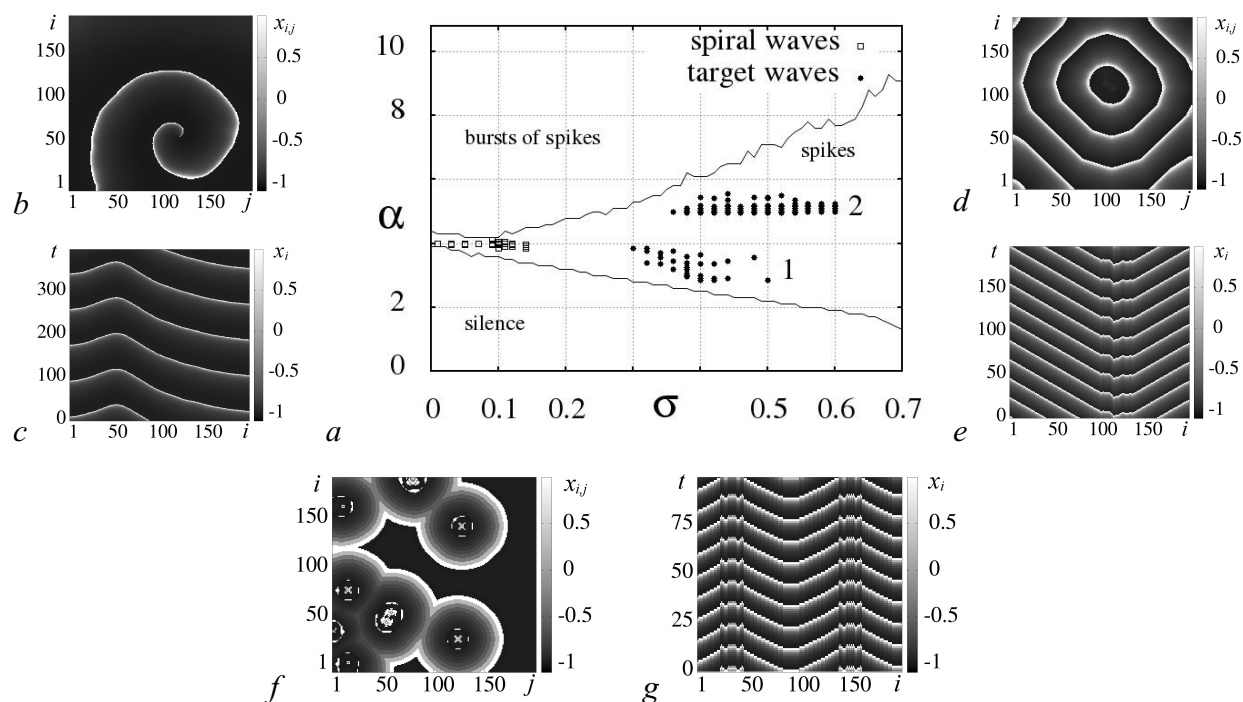


Рис. 1. *a* – Карта динамических режимов решетки локально связанных отображений Рутькова (1). На карте отмечены области спиральных и концентрических волновых структур, черными линиями разделены области с различной динамикой парциальных элементов в случае отсутствия связи между ними ($\sigma_y = 0$) – состояние равновесия, спайки, берсты. *b, d, f* – Мгновенные пространственные диаграммы и *c, e, g* – пространственно-временные диаграммы режимов при различных параметрах: *b, c* – спиральная волна при $\alpha = 3.9$, $\sigma = 0.11$, $b - t = 300000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $c - j = 105$, $t_{\text{trans}} = 300000$, *d, e* – концентрическая волна первого типа при $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$ (область 1), $d - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $e - j = 110$, $t_{\text{trans}} = 100000$, *f, g* – концентрическая волна второго типа при $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.5$ (область 2), $f - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $g - j = 125$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Другие параметры: $\sigma_y = 0.8$, $\mu = 0.001$

Fig. 1. *a* – Diagram of the dynamical regimes in the lattice of locally coupled Rulkov maps (1). Regions of spiral and target waves are marked in the picture, the black lines divide the regions with different behavior of the partial elements in the uncoupled case ($\sigma_y = 0$): silence, spikes, bursts. *b, d, f* – Snapshots and *c, e, g* – spatio-temporal diagrams for various parameter values: *b, c* – spiral wave at $\alpha = 3.9$, $\sigma = 0.11$, $b - t = 300000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $c - j = 105$, $t_{\text{trans}} = 300000$, *d, e* – target wave of the 1st type at $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$ (region 1), $d - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $e - j = 110$, $t_{\text{trans}} = 100000$, *f, g* – target wave of the 2nd type at $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.5$ (region 2), $f - t = 100000$, $t_{\text{trans}} = 0$, $g - j = 125$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Other parameters: $\sigma_y = 0.8$, $\mu = 0.001$

но не является хаотической. Исходя из различий в динамике, концентрические волны второго типа можно рассматривать как химерные структуры – концентрические химерные волны [27, 28].

Хотя на карте динамических режимов решетки локально связанных отображений Рутькова (см. рис. 1, *a*) отмечены только области существования концентрических и спиральных волн, на самом деле динамика системы намного богаче и несомненно является мультистабильной. Так, в зависимости от начальных условий (которые, повторимся, задаются случайным образом) при параметрах, соответствующих появлению концентрической волны первого типа, может наблюдаться и режим полной синхронизации, и режим сложной автоволновой динамики, и режим кластерной синхронизации. С другой стороны, в области наблюдения в одиночном элементе состояния равновесия в решетке локально связанных отображений Рутькова наблюдается полная синхронизация, и динамика во времени отсутствует (вся система находится в состоянии равновесия). В случае берстовой динамики одиночного элемента в исследуемой системе реализуется как полная некогерентность на всей решетке, так и сложные пространственно-временные структуры с частичной некогерентностью по пространству и времени. В области реализации берстовой динамики в

одиночном элементе динамика системы так же, как и для области спайков в одиночном элементе, зависит как от управляющих параметров системы, так и от начальных условий. В силу того, что данная работа направлена на изучение спиральных и концентрических автоволновых структур, на карте динамических режимов отмечены данные структуры.

3. Динамика спиральных и концентрических волн в решетке отображений Рулькова

3.1. Рождение, существование и исчезновение спиральных волн. За счет сильной связи между элементами решетки почти все волновые структуры со временем исчезают, и устанавливается когерентный режим колебаний элементов. При установлении спиральных волн в системе наблюдается переход от полной пространственно-временной некогерентности (начальные условия являются случайными, см. рис. 2, *a*) к спиральным волнам через режим уединенных состояний (рис. 2, *b*) и сложной волновой структуры (рис. 2, *c*). Но может сложиться ситуация, при которой одна волна выживает и порождает спиральную волну в решетке (рис. 2, *d*).

Спиральная волна может перестраиваться с течением времени, то есть может изменяться ее ядро или количество ее «рукавов» (рис. 2, *e*), но по истечении некоторого времени спиральная волна исчезает, и решетка переходит в режим когерентной динамики (рис. 2, *f*). Как видно из рис. 1, спиральные волны сосуществуют с когерентным режимом. При этом у когерентного режима притягивающая область намного больше, поэтому при увеличении времени наблюдения мы можем наблюдать, как динамический режим решетки локально связанных отображений может переходить от спиральных волн к когерентному профилю (см. рис. 2, *f*). Таким образом, режимы спиральных волн являются, как правило, переходными процессами и наблюдаются в течение конечных промежутков времени. При вариации начальных условий и параметров в системе может устанавливаться режим долгоживущих спиральных волн, которые существуют на доступных временах наблюдения.

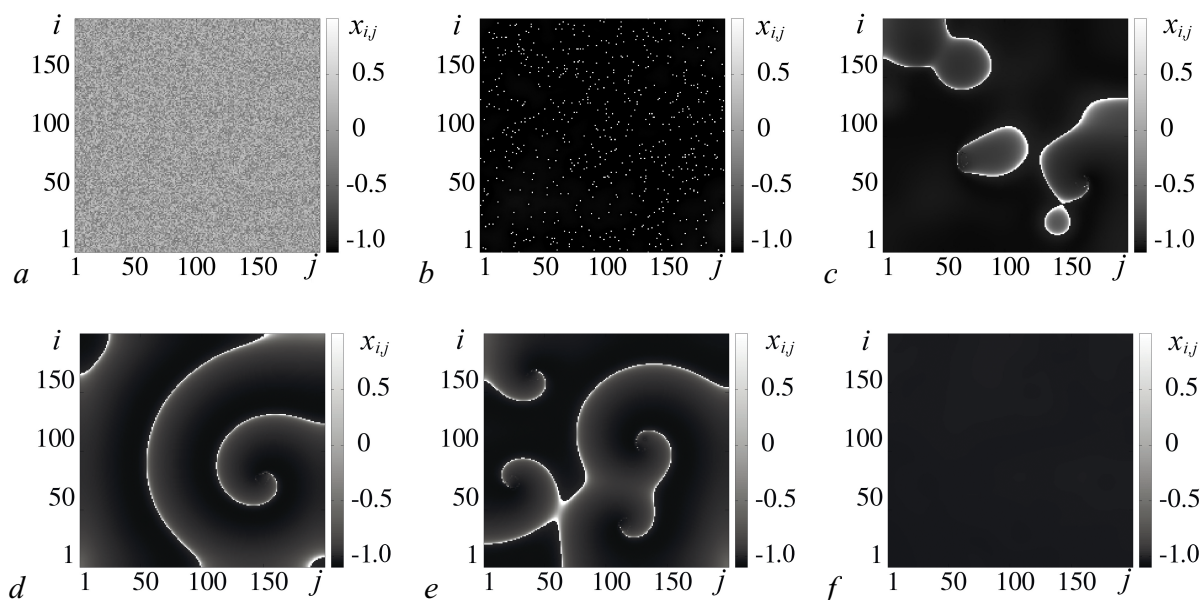


Рис. 2. Эволюция во времени мгновенных пространственных профилей спиральных волн в решетке (1): $t = 0$ (*a*), $t = 1000$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 2000000$ (*d*), $t = 5000000$ (*e*), $t = 10000000$ (*f*). Параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 0$

Fig. 2. Temporal evolution of snapshots of spiral waves in the lattice (1): $t = 0$ (*a*), $t = 1000$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 2000000$ (*d*), $t = 5000000$ (*e*), $t = 10000000$ (*f*). Parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 0$

3.2. Возникновение, существование и исчезновение концентрических волн. Перейдем к рассмотрению временной динамики концентрических волн. В отличие от спиральных волн они являются не переходным процессом, а живут в течение всего времени наблюдения (максимальное время бралось $t = 5 \cdot 10^7$ после времени установления $t_{\text{trans}} = 10^7$).

Как было показано в разделе 2, в волновой динамике решетки локально связанных отображений Рулькова (1) можно выделить два типа концентрических волн, которые существуют в непересекающихся областях по управляющим параметрам парциальных элементов α и σ (см. рис. 1). Оба типа концентрических волн имеют схожий сценарий установления. Система из некогерентного переходит в когерентный режим, но после некоторого времени в сети появляется область, в которой в дальнейшем рождаются концентрические волны во всей решетке.

Область существования первого типа концентрических волн ближе к границе наблюдения состояния равновесия в одиночном элементе (см. рис. 1). Для их возникновения характерным является сценарий появления концентрических волн, проиллюстрированный на рис. 3, *a–d*. Сначала система переходит в когерентный режим в силу большой силы связи между элементами σ_y (см. рис. 3, *a*). Далее наблюдается частичная синхронизация: в системе выделяется кластер элементов с отличной фазой колебаний (см. рис. 3, *b*), который впоследствии и порождает концентрическую волну в решетке (см. рис. 3, *c, d*).

Сценарий появления концентрических волн из второй области представлен на рис. 3, *e–h*, область существования которых соседствует с областью реализации берст в одиночном элементе (см. рис. 1). В этом случае на некогерентном профиле (так как начальные условия случайные) выделяется несколько уединенных осцилляторов с другой фазой (светлые точки на рис. 3, *e*). Впоследствии вся система колеблется почти синхронно за исключением отдельного элемента (светлая точка $i = 105, j = 152$ на рис. 3, *f*), то есть наблюдается режим уединенных состояний (в данной случае мы видим только один выброс, но при других параметрах и/или начальных условиях их может быть больше). Именно в области уединенного выброса образуется ядро концентрической волны второго типа, от которого впоследствии начинают расходиться концентрические волны (рис. 3, *g–h*).

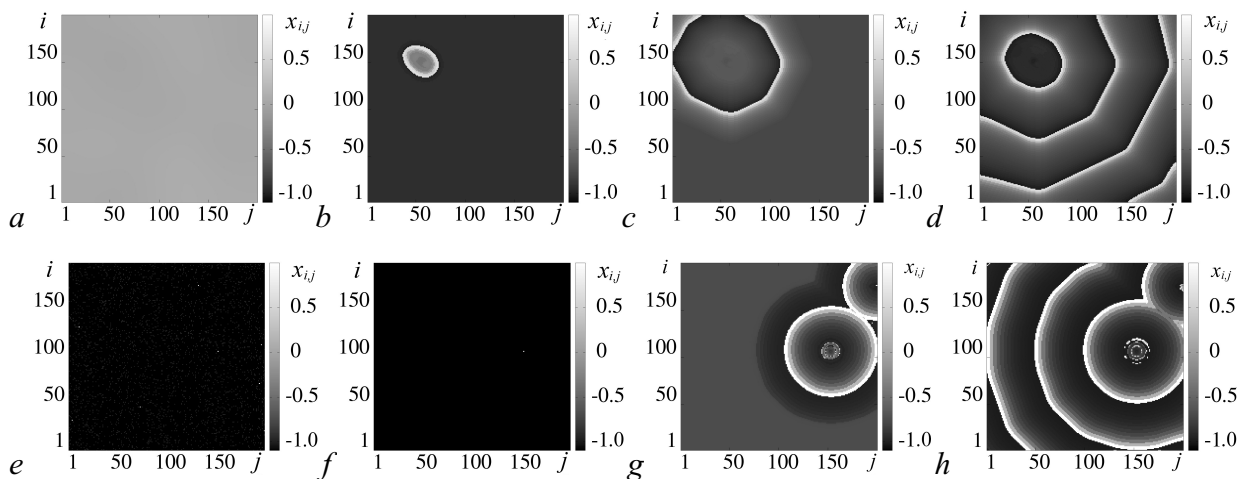


Рис. 3. Эволюция во времени мгновенных пространственных профилей концентрических волн двух типов в решетке (1). *a–d* – Концентрическая волна 1-го типа: $t = 1197$ (*a*), $t = 1400$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 3000000$ (*d*). *e–h* – Концентрическая волна 2-го типа: $t = 4$ (*e*), $t = 10$ (*f*), $t = 800$ (*g*), $t = 3500000$ (*h*). Параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\mu = 0.001$; *a–d* – $\alpha = 3.2$, $\sigma = 0.38$; *e–h* – $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.4$, $t_{\text{trans}} = 0$

Fig. 3. Temporal evolution of snapshots of target waves of two types in the lattice (1). *a–d* – Target wave of the 1st type: $t = 1197$ (*a*), $t = 1400$ (*b*), $t = 2500$ (*c*), $t = 3000000$ (*d*). *e–h* – Target wave of the 2nd type: $t = 4$ (*e*), $t = 10$ (*f*), $t = 800$ (*g*), $t = 3500000$ (*h*). Parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\mu = 0.001$; *a–d* – $\alpha = 3.2$, $\sigma = 0.38$; *e–h* – $\alpha = 5.1$, $\sigma = 0.4$, $t_{\text{trans}} = 0$

4. Влияние шума на установившиеся автоволновые структуры

Рассмотрим влияние шума на ограниченную область (квадрат) решетки при различных значениях интенсивности шума. Проведенные исследования позволяют понять, какое соотношение между размером области воздействия и интенсивностью воздействия оказывают наибольшее влияние на динамику всей решетки.

В данном разделе рассматривается система (1) в присутствии нормально распределенного аддитивного шума. В уравнении (1) $D_x \neq 0$, $D_y = 0$. В данной работе область воздействия шума является квадратной (ее размер варьируется и обозначается как S_{noise}) и находится в центре решетки. Все представленные в данном разделе рисунки построены для $t_{\text{trans}} = 100000$, при этом шум включается при $t = 1$ и воздействует на систему в течение $t = 300000$ итераций, после чего отключается, и мы наблюдаем за изменением динамических режимов на решетке после отключения шума.

4.1. Влияние шума на спирально-волновые структуры. Рассмотрим, какое воздействие оказывает шум на режим спиральных волн. При недостаточно интенсивном воздействии на решетку (при малой области воздействия и/или малой интенсивности шума) спиральная волна в решетке либо вовсе не изменяется, либо деформируется с изменением структуры (рис. 4, *a*, *b–d*).

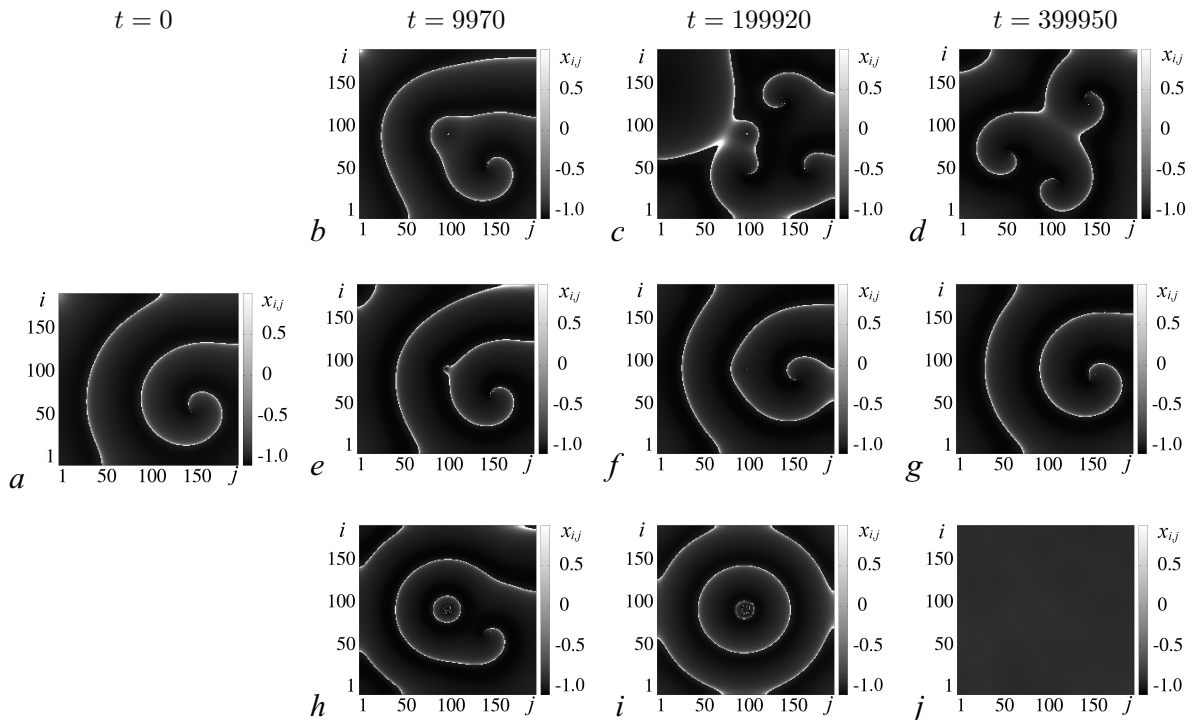


Рис. 4. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рутькова при влиянии шума на режим спиральной волны (*a*) при различных размерах квадратной области (S_{noise}) и интенсивности воздействия (D): $S_{\text{noise}} = 2 \times 2$, $D = 0.1$ (*b*, *c*); $S_{\text{noise}} = 2 \times 2$, $D = 0.001$ (*e–g*); $S_{\text{noise}} = 10 \times 10$, $D = 0.001$ (*h–j*). *d*, *g*, *j* – Мгновенные пространственные диаграммы после отключения шума. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 4. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the noise influence on the spiral wave (*a*) at different sizes of the noise-disturbed square region (S_{noise}) and the noise intensity (D): $S_{\text{noise}} = 2 \times 2$, $D = 0.1$ (*b*, *c*); $S_{\text{noise}} = 2 \times 2$, $D = 0.001$ (*e–g*); $S_{\text{noise}} = 10 \times 10$, $D = 0.001$ (*h–j*). *d*, *g*, *j* – Snapshots after the noise influence was turned off. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

Это сопоставимо с изменением начальных условий или большим временем наблюдения за спиральной волной. Если интенсивность воздействующего шума достаточно мала, то структура на решетке никак не изменяется. Структура лишь слегка деформируется в области воздействия шума (рис. 4, *a, e-g*). Увеличив размер области, на которую воздействует шум, мы можем добиться появления концентрических волн при невысокой интенсивности шума (рис. 4, *a, h-j*). При этом даже при достаточном размере области воздействия и интенсивности шума воздействия одни реализации шума не позволяют перейти от спиральной к концентрическим волнам, а другие позволяют (рис. 5, *a-d* и рис. 5, *a, e-g*, соответственно). На рис. 5, *a-d* представлен случай, когда внешнее воздействие разрушает спиральную волну, но установившаяся концентрическая волна является неустойчивой, и после некоторого времени на решетке вновь появляется спиральная волна. Таким образом, мы можем говорить о трансформации спиральной волны в концентрическую только на конечных временах наблюдения. Также на возможность индуцирования концентрических волн влияют начальные условия на решетке (рис. 5, *h-k*).

В случае более сложной структуры спиральных волн (например, на рис. 2, *e*) даже увеличение области воздействия и интенсивности шума может не привести к перестройке динамики решетки в режим концентрической волны, как это происходит в случае спиральных волн с одним

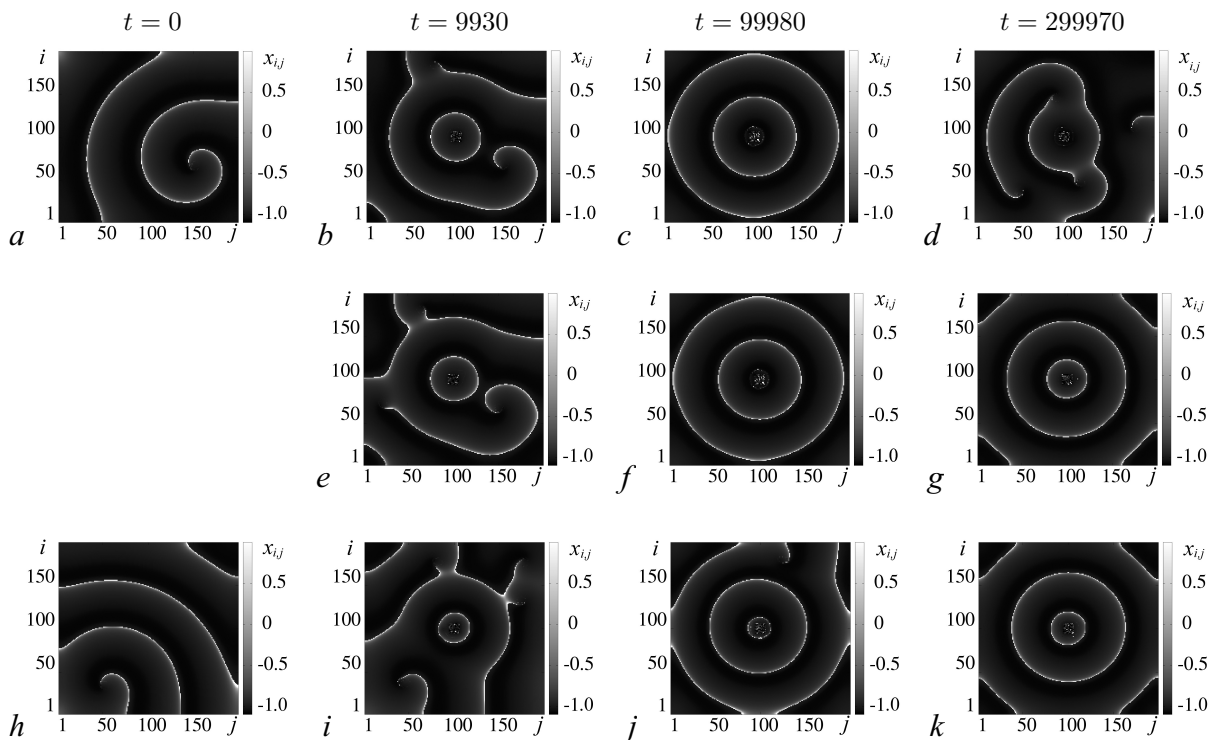


Рис. 5. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рутькова при влиянии шума на режим спиральной волны при квадратной области воздействия $S_{\text{noise}} = 12$ и интенсивности воздействия $D = 0.001$. *a* – Начальная структура решетки для фрагментов *b-g*; *h* – начальная структура для фрагментов *i-k*. Результаты воздействия первой (*b-d*) и второй (*e-g*) реализаций шума. *h-k* – Воздействие первой реализации шума при других начальных условиях. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 5. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the impact of noise on the spiral wave for the noise-disturbed region $S_{\text{noise}} = 12$ and the noise intensity $D = 0.001$. *a* – Initial structure of the lattice for the fragments *b-g*; *h* – initial structure for the fragments *i-k*. Results of the impact of the first (*b-d*) and the second noise realizations. *h-k* – Influence of the first noise realization for different initial conditions on the lattice. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

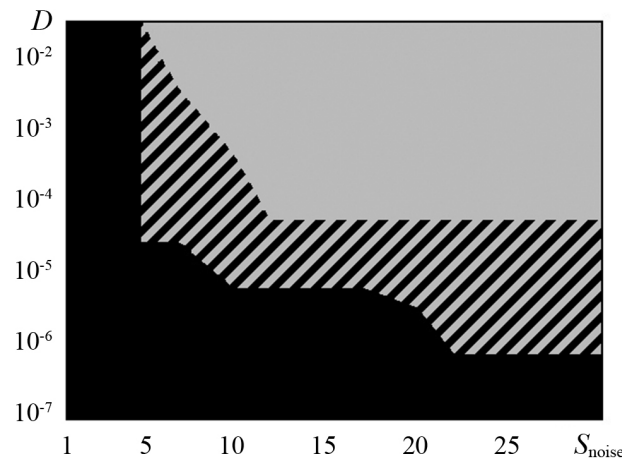


Рис. 6. Диаграмма на плоскости параметров «размер области воздействия (S_{noise}) – интенсивность шума (D)», отображающая возможность перехода от спиральных волн к концентрическим под действием аддитивного шума с нормальным распределением. Черная область – переход от спиральных к концентрическим волнам не наблюдается, серая – происходит переход от спиральных к концентрическим волнам, заштрихованная область – переход к концентрическим волнам зависит от начальных условий и реализации шума. Шум воздействует на квадратную область $S_{\text{noise}} \times S_{\text{noise}}$ в центре решетки. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$

Fig. 6. Diagram in the «influence region size (S_{noise}) – noise intensity (D)» parameter plane, which shows the possibility of transition from spiral to target waves under the influence of additive normally distributed noise. No transition is observed in the black area, there is transition from spiral to target waves in the grey region, and in the shaded area the transition to target waves depends on the initial conditions and noise realization. The noise affects the square area $S_{\text{noise}} \times S_{\text{noise}}$ in the lattice center. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.03$, $\mu = 0.001$

рукавом. Отметим, что величина области воздействия и интенсивность шумового воздействия влияет на время перехода от спиральных к концентрическим волнам. Под временем перехода понимается количество итераций дискретной системы (1) после начала воздействия, которые необходимы для перехода от спиральной волны к концентрической.

Еще одним интересным фактом является то, что при генерации концентрических волн в системе под воздействием шума волны не отходят от шумового ядра (как можно было бы предположить), а наоборот, движутся к нему. Не было найдено ни одного примера концентрической волны, которая вела бы себя по-другому.

На рис. 6 представлена двумерная диаграмма на плоскости параметров «размер области воздействия шума – интенсивность шума», которая демонстрирует, какой шум нужно подать, чтобы разрушить спиральные волны и перейти в режим концентрических. Черная область отражает соотношение интенсивности шума и области воздействия, при которой невозможен переход от спиральных волн к концентрическим, серая – при которой возможен. При достаточно малой области воздействия на спиральные структуры даже высокая интенсивность шума не позволяет перейти к концентрическим волнам. В заштрихованной области на рис. 6 переход к концентрическим волнам зависит от начальных условий на решетке и реализации шума.

Как отмечалось ранее, спиральные волны сосуществуют с когерентными профилями. Возникает вопрос, что произойдет, если воздействие шума будет осуществляться на когерентный профиль? Исследования показали, что в этом случае даже при малой области воздействия и интенсивности шума возможно появление концентрических волн.

4.2. Влияние шума на режим концентрических волн. При воздействии шума на режим спиральных волн влияние воздействия исчезает после его отключения, и не остается никаких «следов». Другая картина наблюдается в случае воздействия шума на режим концентрических волн.

Рассмотрим влияние аддитивного шума с нормальным распределением на concentрические волны первого типа (см. рис. 3, *a-d*). В отличие от спиральных волн, в случае concentрических волн необходимы большая область воздействия или более высокая интенсивность шума, чтобы повлиять на начальную структуру в решетке. При этом даже после отключения внешнего шумового воздействия, в решетке продолжает существовать область некогерентной динамики (рис. 7, *a-d*), которая не влияет на динамику concentрической волны. Увеличение интенсивности воздействия ведет к тому, что центр concentрической волны перемещается в область воздействия шума, который продолжает существовать и после отключения шума, и мы можем говорить о concentрической волновой химере в решетке (рис. 7, *a, e-g*).

Перейдем к рассмотрению влияния шума на concentрические волны второго типа (см. рис. 3, *e-h*). В данном случае воздействие шума никак не влияет на динамику решетки: ни увеличение размера области воздействия, ни увеличение интенсивности шума не дали никаких результатов, concentрические волны только слегка искажаются, проходя через область воздействия шума. Структура, наблюдающаяся на решетке до введения воздействия, продолжает существовать, как будто мы не воздействуем на часть решетки. Отсутствие изменений имеет место и при вариации начальных условий, приводящих к усложнению начальной структуры (увеличению количества центров возбуждения concentрических волн).

Как было показано ранее на рис. 3, *a*, перед появлением concentрической волны в решетке локально связанных отображений Рulkova возникает область с отличающейся амплитудой (рис. 3, *b*). Данная область впоследствии является «генератором» concentрических волн. При исследовании было выяснено, что иногда время перехода от режимов, соответствующих рис. 3, *b*, к concentрическим волнам больше, чем время наблюдения за системой. Поэтому возникает вопрос, что будет, если воздействовать на такой режим шумом? В этом случае результат тот же, что при воздействии на решетку с когерентной динамикой: на решетке появляются concentрические волны под воздействием шума. Естественно, как и в предыдущих случаях, для

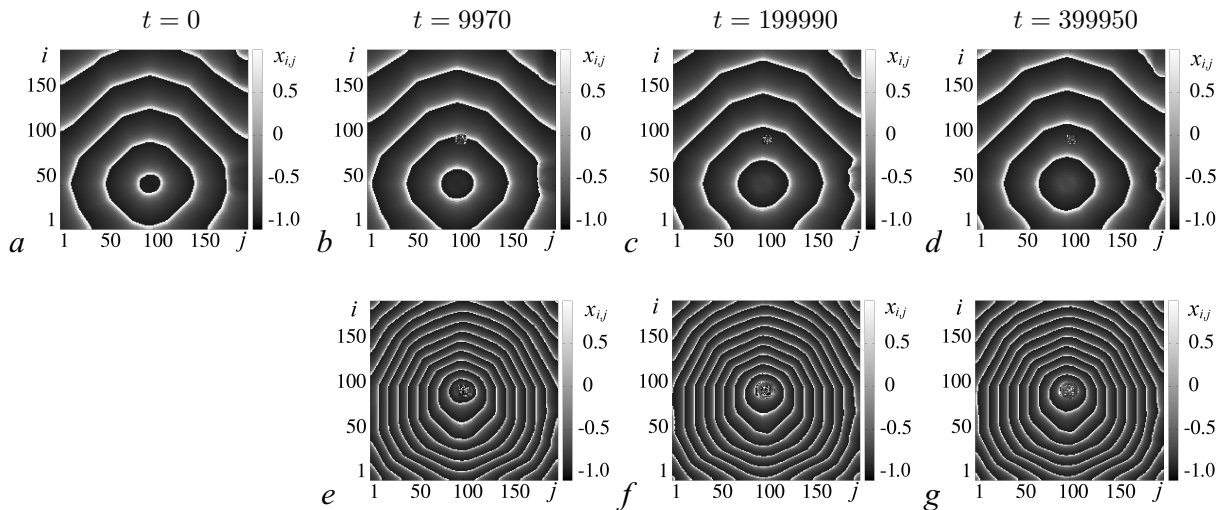


Рис. 7. Временная динамика решетки локально связанных отображений Рulkova при влиянии шума на режим concentрической волны 1-го типа (*a*) при квадратной области воздействия $S_{\text{noise}} = 10$ и различной интенсивности воздействия: $D = 0.001$ (*b-d*), $D = 0.1$ (*e-g*). *d, g* – Мгновенные пространственные диаграммы после отключения шума. Остальные параметры: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$, $\mu = 0.001$. Время для мгновенных пространственных диаграмм в каждом из столбцов представлено над рисунком

Fig. 7. Temporal dynamics of the lattice of locally coupled Rulkov maps at the noise influence on the 1st type target wave (*a*) at the influence square region $S_{\text{noise}} = 10$ and for a different noise intensity: $D = 0.001$ (*b-d*), $D = 0.1$ (*e-g*). *d, g* – Snapshots after the noise influence was turned off. Other parameters: $\sigma_y = 0.80$, $\alpha = 3.75$, $\sigma = 0.36$, $\mu = 0.001$, $t_{\text{trans}} = 100000$. The time for the snapshots in each column is shown above the figure

обеспечения активного влияния на динамику решетки внешнее шумовое возмущение должно быть достаточной интенсивности и воздействовать на достаточно большое количество элементов сети. Была установлена интересная особенность: чем ниже интенсивность шума, которая приводит к реализации концентрических волн, тем больше длина волны у этих волн.

Заключение

В работе рассматривается реализация автоволновых структур в виде спиральных и концентрических волн в двумерном ансамбле локально связанных отображений Рутькова. Задача решается численно для открытых граничных условий и случайных начальных данных для квадратной решетки 200×200 осцилляторов. Показана возможность наблюдения режимов спиральных и концентрических волн. Спирально-волновой режим в системе, как правило, возникает при переходе от полной пространственно-временной некогерентности и сопровождается появлением режимов уединенных состояний или сложной волновой структуры. При рождении концентрических волн система сначала переходит в когерентный режим. Затем наблюдается режим частичной синхронизации, при котором в системе выделяется кластер элементов с отличной фазой колебаний. Этот кластер осцилляторов затем и порождает концентрическую волну в решетке. В отличие от режимов спиральных волн, которые чаще всего можно рассматривать в качестве переходных с конечным временем жизни, режимы концентрических волн наблюдаются на больших временах. Это позволяет считать их установившимися и устойчивыми во времени. Исследованы переходы, индуцированные внешним шумовым воздействием. Воздействие осуществлялось путем подключения источника аддитивного гауссова шума на квадрат элементов, расположенных в центре решетки. Расчеты проводились при различных размерах области воздействия и различных значениях интенсивности шума. Установлено, что при различных значениях интенсивности шума при выборе начальных условий, которые ведут к реализации в системе спиральных волн, под воздействием шума система может перейти в режим концентрических волн и оставаться в нем до отключения шума. Возможны также переходы в режим концентрических волн на некоторое конечное время с последующим возвращением к режиму спиральных волн. Однако во всех случаях воздействия шума на режимы спиральных волн при снятии шумового возмущения система всегда возвращалась в исходный режим, отвечающий отсутствию шума. Рассмотрено влияние аддитивного гауссова шума на концентрические волны. В отличие от спиральных волн, в случае концентрических волн необходимы большая область воздействия или более сильная интенсивность шума, чтобы вызвать переходы в начальной структуре решетки. Установлено, что после отключения внешнего шумового воздействия в решетке продолжает существовать режим, возникший под воздействием шума. Так, например, установившийся под действием шума режим химерной структуры остается и после отключения источника шума.

Список литературы

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
2. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1989. Vol. 34, no. 1–2. P. 1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.
3. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 10–11. С. 1079–1115.
4. Wang D. L. Modeling Global Synchrony in the Visual Cortex by Locally Coupled Neural

- Oscillators // *Computation in Neurons and Neural Systems*. Springer, Boston, MA, 1994. P. 109–114. DOI: 10.1007/978-1-4615-2714-5_18.
5. *Nicolis G.* Introduction to Nonlinear Science. Cambridge University Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9781139170802.
 6. *Mikhailov A. S., Loskutov A. Y.* Foundation of Synergetics: Complex Patterns. Vol. 52 of Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991. P. 210. DOI: 10.1007/978-3-642-97294-2.
 7. *Afraimovich V. S., Nekorkin V. I., Osipov G. V., Shalfeev V. D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 6. Singapore, 1995. P. 260. DOI: 10.1142/2412.
 8. *Belykh V. N., Belykh I. V., Hasler M.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // *Physical Review E*. 2000. Vol. 62, no. 5. P. 6332–6345. DOI: 10.1103/physreve.62.6332.
 9. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. Vol. 410, no. 6825. P. 268–276. DOI: 10.1038/35065725.
 10. *Dorogovtsev S. N., Mendes J. F.* Evolution of networks // *Adv. Phys.* 2002. Vol. 51, no. 4. P. 1079–1187. DOI: 10.1080/00018730110112519.
 11. *Newman M. E. J.* The structure and function of complex networks // *SIAM Review*. 2003. Vol. 45, no. 2. P. 167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480.
 12. *Ben-Naim E., Frauenfelder H., Toroczkai Z.* Complex Networks. Vol. 650 of Lecture Notes in Physics. Springer Science & Business Media, 2004. P. 520. DOI: 10.1007/b98716.
 13. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics reports*. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
 14. *Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. Vol. 232, no. 2. P. 87–102. DOI: 10.1016/j.physd.2007.05.008.
 15. *Osipov G. V., Kurths J., Zhou C.* Synchronization in Oscillatory Networks. Springer Science & Business Media, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.
 16. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В., Сатаев И. Р.* Сценарий Ландау–Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 5. С. 863–873. DOI: 10.20537/nd1205001.
 17. *Nekorkin V., Velarde M. G.* Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos. Springer Science & Business Media, 2002. P. 359. DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8.
 18. *Castelpoggi F., Wio H. S.* Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57, no. 5. P. 5112–5121. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.5112.
 19. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
 20. *Tanaka D., Kuramoto Y.* Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 2. P. 026219. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.026219.
 21. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
 22. *Wolfrum M., Omel'chenko O. E., Yanchuk S., Maistrenko Y. L.* Spectral properties of chimera states // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21, no. 1. P. 013112. DOI: 10.1063/1.3563579.
 23. *Omel'chenko O. E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y. L., Sudakov O.* Stationary patterns of

- coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, no. 3. P. 036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210.
24. *Nkomo S., Tinsley M.R., Showalter K.* Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 24. P. 244102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.244102.
 25. *Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S.* Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 43, no. 2. P. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
 26. *Kuramoto Y., Shima S.* Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2003. Vol. 150. P. 115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115.
 27. *Rybalova E.V., Bukh A.V., Strelkova G., Anishchenko V.S.* Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 101104. DOI: 10.1063/1.5126178.
 28. *Бух А. В., Рыбалова Е. В., Анищенко В. С.* Автоволновые структуры в двумерных решетках нелокально связанных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 3. С. 299–323. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323.
 29. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.

References

1. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
2. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989;34(1–2):1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.
3. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP. Critical dynamics of coupled map lattices at the onset of chaos. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1991;34(10–23):1079–1115. DOI: 10.1007/BF01083617.
4. Wang DL. Modeling global synchrony in the visual cortex by locally coupled neural oscillators. *Computation in Neurons and Neural Systems*. Springer, Boston, MA; 1994. P. 109–114. DOI: 10.1007/978-1-4615-2714-5_18.
5. Nicolis G. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge University Press; 1995. DOI: 10.1017/CBO9781139170802.
6. Mikhailov AS, Loskutov AY. *Foundation of Synergetics: Complex Patterns*. Vol. 52 of Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; 1991. P. 210. DOI: 10.1007/978-3-642-97294-2.
7. Afraimovich VS, Nekorkin VI, Osipov GV, Shalfeev VD. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 6. Singapore; 1995. P. 260. DOI: 10.1142/2412.
8. Belykh VN, Belykh IV, Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. *Physical Review E*. 2000;62(5):6332–6345. DOI: 10.1103/physreve.62.6332.
9. Strogatz SH. Exploring complex networks. *Nature*. 2001;410(6825):268–276. DOI: 10.1038/35065725.
10. Dorogovtsev SN, Mendes JF. Evolution of networks. *Adv. Phys.* 2002;51(4):1079–1187. DOI: 10.1080/00018730110112519.

11. Newman MEJ. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*. 2003;45(2): 167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480.
12. Ben-Naim E, Frauenfelder H, Toroczkai Z. *Complex Networks*. Vol. 650 of Lecture Notes in Physics. Springer Science & Business Media; 2004. P. 520. DOI: 10.1007/b98716.
13. Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang DU. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*. 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
14. Kuznetsov SP, Pikovsky AS. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007;232(2):87–102. DOI: 10.1016/j.physd.2007.05.008.
15. Osipov GV, Kurths J, Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Springer Science & Business Media; 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.
16. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV, Sataev IR. Landau-Hopf scenario in the ensemble of interacting oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2012;8(5):863–873 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1205001.
17. Nekorkin V, Velarde MG. *Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos*. Springer Science & Business Media; 2002. P. 359. DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8.
18. Castelpoggi F, Wio HS. Stochastic resonant media: Effect of local and nonlocal coupling in reaction-diffusion models. *Physical Review E*. 1998;57(5):5112–5121. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.5112.
19. Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002;5(4):380–385.
20. Tanaka D, Kuramoto Y. Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling. *Physical Review E*. 2003;68(2):026219. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.026219.
21. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*. 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
22. Wolfrum M, Omel'chenko OE, Yanchuk S, Maistrenko YL. Spectral properties of chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011;21(1):013112. DOI: 10.1063/1.3563579.
23. Omel'chenko OE, Wolfrum M, Yanchuk S, Maistrenko YL, Sudakov O. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Physical Review E*. 2012;85(3):036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210.
24. Nkomo S, Tinsley MR, Showalter K. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Physical Review Letters*. 2013;110(24):244102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.244102.
25. Bogomolov SA, Slepnev AV, Strelkova GI, Schöll E, Anishchenko VS. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;43(2):25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
26. Kuramoto Y, Shima S. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems. *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 2003;150:115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115.
27. Rybalova EV, Bukh AV, Strelkova G, Anishchenko VS. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(10):101104. DOI: 10.1063/1.5126178.
28. Buh AV, Rybalova EV, Anishchenko VS. Autowave structures in two-dimensional lattices of nonlocally coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):299–323 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-299-323.
29. Rulkov NF. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*. 2002;65(4):041922. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041922.



Рыбалова Елена Владиславовна – родилась в Энгельсе Саратовской области (1996). Окончила с отличием бакалавриат и магистратуру на физическом факультете Саратовского государственного университета по направлению «радиофизика» (2018 и 2020, соответственно). Затем поступила в аспирантуру Саратовского государственного университета по направлению «физика и астрономия» (2020). С 2018 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного технического университета в должности инженера. Научные интересы – нелинейная динамика и теория колебаний, синхронизация, влияние флуктуаций, ансамбли связанных осцилляторов, химерные состояния. Опубликовала свыше 15 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: rybalovaev@gmail.com



Анищенко Вадим Семенович (1943–2020) – родился в Саратове. Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1966). Защитил кандидатскую диссертацию на тему «Шумовые свойства электронных потоков СВЧ-усилителей О-типа» под руководством Штырова А. И. (1970, СГУ). Защитил докторскую диссертацию на тему «Механизмы развития и свойства хаотических колебаний в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы» (1986, СГУ). С 1966 года работал инженером в НИИМФе СГУ. В 1970 году – ассистент на кафедре радиофизики СГУ, в 1972 – старший преподаватель, в 1976 – доцент, в 1987 – профессор, а с 1988 по 2020 – заведующий кафедрой радиофизики СГУ. Научные интересы – теория нелинейных колебаний, статистическая радиофизика, нелинейная динамика сложных систем, динамический хаос и влияние флуктуаций, синхронизация и управление. Опубликовал свыше 480 научных статей и более 20 книг по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: wadim@sgu.ru