



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4)

Научная статья

УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

## Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация

*В. В. Матросов*<sup>✉</sup>, *В. Д. Шалфеев*

Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 09.03.2021, принята к публикации 21.05.2021,

опубликована 30.07.2021

**Аннотация.** Цель работы. Изучение возможности построения динамических моделей генерации и синхронизации экономических и финансовых циклов на базе теории систем автоматического управления. Методы. Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем и теории бифуркаций. Результаты. Задача построения модели экономического и финансового осцилляторов решается с использованием аналогий с системами автоматической синхронизации автогенератора с фазовым управлением и с частотным управлением. В численных экспериментах показано, что в построенных моделях экономического и финансового осцилляторов возможна генерация как регулярных, так и нерегулярных, в том числе хаотических колебаний, а также осуществляется синхронизация двух таких осцилляторов при введении однонаправленных или взаимных связей.

**Ключевые слова:** деловые циклы, финансовые циклы, динамический хаос, синхронизация.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2020-1483/1, и при поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания (соглашение 0729-2020-0040). Авторы приносят благодарность М. И. Рабиновичу за привлечение внимания к данной тематике, полезные замечания и советы по работе.

**Для цитирования:** Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization

V. V. Matrosov<sup>✉</sup>, V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 09.03.2021, accepted 21.05.2021, published 30.07.2021

**Abstract.** The *purpose* of this work is to research the phenomena of the self-oscillation and the synchronization for the model of business and financial oscillator, which presented as the system of automatic control. *Methods.* The research methods are the qualitative and numerical methods of the theory of nonlinear dynamical systems and the theory of the bifurcations. *Results.* This work presents the model of business and financial oscillators as the phase-controlled oscillator and as the frequency-controlled oscillator. The phenomena of the self-oscillation of regular and chaotic oscillations in this model and the synchronization of such oscillations are considered.

**Keywords:** business cycles, financial cycles, dynamical chaos, synchronization.

**Acknowledgements.** The work was carried out within the framework of the Program for the Development of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, project № 075-02-2020-1483/1, and with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the state task (agreement 0729-2020-0040). The authors are grateful to M. I. Rabinovich for drawing attention to this topic, useful comments and tips on work.

**For citation:** Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Основной интерес при изучении большинства процессов и явлений, рассматриваемых современной наукой, связан с динамическими закономерностями. Динамика современных технических, биологических, социоэкономических систем и процессов обладает исключительной сложностью. Однако, несмотря на сложность, поведение этих систем на достаточно больших отрезках времени определяют сравнительно простые динамические модели и закономерности, такие, в частности, как предельные циклы, торы, странные хаотические аттракторы, метастабильные состояния. Изучение динамики развития сложных систем и их понимание в значительной степени опирается на наличие в них двух характерных процессов нелинейной динамики – конкуренции и синхронизации. Именно эти процессы, по-видимому, станут своеобразным ключом к пониманию динамики сложных, в частности, социоэкономических систем [1].

Изучению колебательных экономических и социальных явлений посвящено огромное число публикаций, однако, надо признать, что среди них сравнительно мало публикаций, связанных с разработкой и анализом адекватных математических моделей нелинейной динамики социоэкономических систем. Это можно объяснить рядом причин, в частности, сложностью формального описания социально-экономических явлений, трудностью, а иногда невозможностью измерения параметров моделей, трудностями экспериментальной проверки моделей, обусловленными экстремально большими периодами колебаний и др. В ряду значимых публикаций в этой области следует отметить работы В. Вайдлиха [2], Ю. И. Неймарка [3], А. А. Короновского, Д. И. Трубецкова [4].

В настоящей работе сделана попытка привлечения идей теории автоматического управления для изучения динамики процессов генерации и синхронизации экономических и финансовых циклов [5]. В разделах 1 и 2 даны краткие сведения из теории деловых и финансовых циклов. В разделе 3 обсуждается проблема взаимодействия деловых и финансовых циклов и их

синхронизации. В разделе 4 строится модель экономического (финансового) осциллятора, использующая аналогии с системой автоматической фазовой синхронизации, известной в физических приложениях. В разделе 5 на основе предлагаемой модели рассматривается динамика процесса синхронизации деловых и финансовых циклов. В разделе 6 обсуждаются полученные результаты. В разделе 7 строится модифицированная модель экономического (финансового) осциллятора, использующая аналогии с автоматической системой частотно-управляемого генератора. В разделе 8 дано краткое изучение нелинейной динамики этой модели. В разделе 9 рассматривается синхронизация хаотических колебаний.

## 1. Деловые циклы

Одно из базовых явлений рыночной экономики – экономические циклы (деловые циклы, бизнес-циклы), представляющие собой колебания экономической активности, состоящие в повторяющихся расширениях и сжатиях экономики [5]. Это периодические, но нерегулярные колебания, осуществляющиеся около некоторого долгосрочного тренда развития экономики. Обычно различают четыре стадии цикла, называемые в экономике «фазами» цикла:

- *подъем* (расширение, expansion), соответствующий росту экономической активности от низшей точки (дна) до высшей точки (пик);
- *пик* (peak) – высшая точка экономического подъема;
- *спад* (сжатие, рецессия, contraction), соответствующий снижению экономической активности от высшей точки (пик) до низшей (дно);
- *дно* (trough) – низшая точка экономического спада [6].

Заметим, что смысл применяемого в экономической литературе термина «фаза» цикла (обозначающего стадию цикла) отличается от смысла термина фаза колебания, используемого в физике (обозначающего часть периода, прошедшего от начала колебания), в связи с чем везде ниже для термина «фаза» (стадия) цикла будут использоваться кавычки.

Деловые циклы – это, в первую очередь, колебания выпуска (total economic output), отражаемого таким макроэкономическим показателем, как ВВП – валовой внутренний продукт (GDP – Gross Domestic Product) [6, 7]. В ряде случаев, например для определения «фаз» цикла, используются и другие показатели (занятость, инфляция и т. д.), а также их совокупный (композиционный) показатель – индекс бизнес-цикла [8, 9]. Для определения «фаз» цикла в США Комитетом по датировке бизнес-циклов Национального бюро экономических исследований (NBER) наряду с разными показателями используются и экспертные оценки [6].

Изучение экономических циклов всегда занимало важное место в мировой экономической литературе. Первоначально циклы считали детерминированными, подчиняющимися строгим закономерностям (краткосрочные циклы Китчина, среднесрочные циклы Жюгляра и Кузнеца, долгосрочные циклы Кондратьева). Позднее стало понятным, что точной повторяемости циклов нет и, соответственно, нет стандартного набора показателей для предсказания циклов [10]. Поэтому циклы стали рассматривать как случайные, в качестве источников случайного поведения рассматривались различные внешние факторы (шоки), например, природные катастрофы, эпидемии, технологические инновации и др. Традиционно в экономике выделяют краткосрочные бизнес-циклы (3–5 лет), обусловленные изменениями в загрузке производственных мощностей, среднесрочные (7–11 лет), связанные с появлением новых (или ликвидацией старых) производственных мощностей, долгосрочные (15–30 лет), связанные с обновлением технологий [11].

В 1967 г. Гудвин сделал предположение [12], что случайные колебания различных экономических показателей порождаются эндогенными (внутренними) факторами, а не только внешними шоками. Эта идея позднее стимулировала изучение, применительно к экономическим циклам, нелинейных математических моделей, порождающих динамический хаос, например модифицированной модели ван дер Поля [10, 13, 14].

## 2. Финансовые циклы

Тематика финансовых циклов появилась в литературе сравнительно недавно. Интерес к этой проблеме резко возрос в связи с мировым финансовым кризисом 2008–2009 гг., имевшим широкие последствия. Финансовый цикл обычно рассматривается как общее периодическое отклонение от трендовой динамики переменных, важных для финансовой стабильности. Финансовые циклы, в отличие от экономических, более субъективны и тесно связаны с ожиданиями и настроениями экономических агентов [11]. В широком смысле финансовые циклы представляют собой периодические колебания в способности участников рынка осознавать истинный уровень финансовых рисков и связанные с ними изменения в объемах и стоимости обращающихся активов [11].

Какие финансовые показатели оказываются наиболее важными для анализа финансовых циклов? Наиболее точно положение в финансовом цикле показывают цены на недвижимость и стоимость кредита [7]. В ряде работ учитываются дополнительные показатели, такие, например, как стоимость акций, валютный курс, доходность облигаций, а также их совокупный (композиционный) показатель – индекс финансового цикла [11, 15–17].

Финансовые циклы обычно заметно длиннее деловых циклов (в 1.5–2 раза), то есть являются более низкочастотными. Аналогично деловым, финансовые циклы являются нерегулярными, случайными колебаниями, что дает возможность изучать их поведение на основе приложений теории динамического хаоса [14].

## 3. Взаимодействие деловых и финансовых циклов и их синхронизация

Взаимосвязь финансового развития и экономического роста является предметом обсуждения в литературе на протяжении многих лет. В предположении линейного взаимодействия в литературе обсуждалась как точка зрения, предполагающая, что развитие финансового сектора является причиной экономического роста, так и противоположная точка зрения. В 2001 году Dell Ariccia сделал предположение о нелинейном влиянии развития финансового рынка на экономический рост. Было замечено, что развитие финансового рынка способствует экономическому росту только до некоторого порога («точка насыщения»), превышение которого порождает риски, ведущие к снижению экономического роста [11].

В свете сказанного становится понятной актуальность изучения взаимодействия деловых и финансовых циклов. Исследование, проведенное специалистами Национального банка Дании в 2017 г., позволило установить [11], что на частоте бизнес-циклов финансовые переменные сильно коррелированы с ВВП. Был сделан вывод, что бизнес-циклы в реальном секторе экономики играют причинную роль по отношению к финансовым циклам. Нелинейная связь между экономическими и финансовыми циклами действует в обоих направлениях, но прямая связь (от реального сектора экономики) определена сильнее, чем обратная.

В ряде работ [18–20] анализ взаимодействия бизнес-циклов и финансовых циклов осуществляется на основе вычисления индекса соответствия (concordance index) между макроэкономическими переменными. Эта методика предложена в [21], где индекс соответствия определен как среднее число периодов двух переменных (например, ВВП и уровень цен на бирже) с совпадающими «фазами» (стадиями) циклов. Чем больше степень совпадения «фаз», тем ближе индекс соответствия к единице. Методики вычисления индекса соответствия в сочетании со статистическими методами (спектральный анализ, корреляционный анализ и др.) применялись в большом числе работ при анализе взаимодействия бизнес-циклов с финансовыми циклами [20], финансовых циклов G-7 стран [16], бизнес-циклов разных групп стран [22], циклов стран Евророзны [23] и др. Авторами многих таких публикаций для обозначения взаимодействующих циклов с высокой долей совпадения «фаз» циклов (с высоким индексом соответствия) используется

термин «синхронизация циклов». Смысл, вкладываемый в этом случае в термин «синхронизация» существенно отличается от того смысла, который вкладывает физика колебаний в этот термин. Справедливости ради надо отметить, что есть и некоторое число публикаций, где синхронизация финансовых и бизнес-циклов понимается так же, как в физике. В физике явление синхронизации – это процесс сближения и совпадения частот колебаний в результате взаимодействия осциллирующих систем с изначально разными, хотя и близкими, частотами колебаний. При синхронизации устанавливается нулевая разность частот для взаимодействующих осцилляторов и некоторая постоянная разность фаз колебаний, то есть происходит захват фаз (phase locking). Именно это явление обсуждается в ряде работ применительно к экономическим циклам [24–30] и, в частности, к колебаниям на международном фондовом рынке [31]. Везде далее явление синхронизации будет интерпретироваться так, как это принято в физике. Что касается динамического хаоса, то заметим, что публикаций по изучению динамики хаотических экономических и финансовых моделей сравнительно мало [10, 32–34], однако, их число растет, что говорит о возрастающем интересе к этой тематике.

Надо отметить, что графики финансового и бизнес-циклов при измерении в реальном времени всегда содержат высокочастотные шумовые компоненты, которые устраняются при последующей обработке различными фильтрами [8, 9, 15–17].

#### 4. Моделирование процессов генерации экономических и финансовых циклов

Приведенный краткий обзор публикаций по экономическим и финансовым циклам позволяет сделать некоторые выводы и предположения о динамических свойствах этих объектов как объектов моделирования. Будем считать, что экономические и финансовые колебания – циклы – производятся (генерируются) некими гипотетическими экономическим осциллятором (Economic oscillator, EO) и финансовым осциллятором (Financial Oscillator, FO). Эти объекты существенно нелинейны [10, 11, 19, 24–34] и, следовательно, можно предполагать, что они являются автоколебательными системами, способными осуществить генерацию как регулярных периодических, так и хаотических колебаний. Экономический и финансовый осцилляторы взаимодействуют с помощью взаимных нелинейных связей [11, 31]. В результате такого взаимодействия может иметь место синхронизация этих колебаний, при которой устанавливается нулевая разность частот колебаний осцилляторов (если колебания регулярны) и постоянная разность фаз, то есть имеет место «захват фаз» [31]. Для хаотических колебаний может иметь место режим синхронизации в среднем.

Будем далее строить модель EO и FO, удовлетворяющую указанным предположениям, используя в качестве аналога классическую систему автоматической фазовой синхронизации (ФАП – фазовая автоподстройка частоты, PLL – phase locked loop) [35, 36]. В этом случае модель управляемого экономического осциллятора УЭО (Controlled Economic Oscillator, CEO) можно представить как модель управления частотой EO (рис. 1).

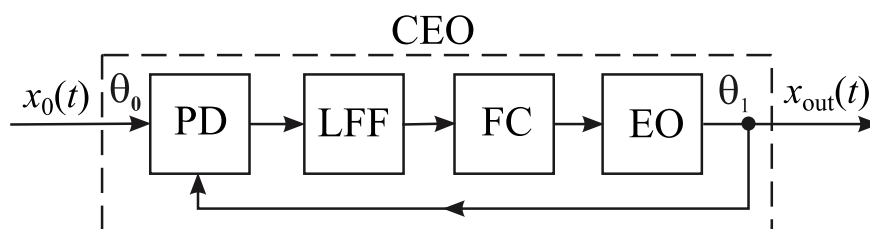


Рис. 1. Схема управляемого экономического осциллятора (УЭО)

Fig. 1. Scheme of Controlled Economic Oscillator (CEO): economic oscillator (EO), oscillation frequency controller (FC), phase discriminator (PD), filter of low-frequency (LFF)

Здесь ЕО – экономический осциллятор, управление частотой колебаний которого осуществляется с помощью FC, LFF – фильтр нижних частот, PD – фазовый дискриминатор. Колебания с выхода ЕО с фазой  $\theta_1$  сравниваются на фазовом дискриминаторе PD с гипотетическими опорными колебаниями на входе системы с фазой  $\theta_0$ , в результате чего на выходе PD образуется сигнал, зависящий от разности фаз  $\varphi = \theta_0 - \theta_1$ . Этот сигнал через фильтр поступает на управитель FC, который изменяет частоту колебаний ЕО, приводя ее в соответствие с частотой опорного сигнала.

Параметры реального экономического цикла зависят от экономической политики государства и непосредственных управляющих действий правительства, инвестиционных банков, Центрального банка, а также действий различных участников реального сектора экономики. Эти управляющие действия направлены на коррекцию «фаз» и частот реальных экономических циклов. Поэтому можно предполагать, что именно эти участники рынка и осуществляют функции элементов цепи управления – гипотетических сравнивающего элемента PD, управителя FC и фильтра LFF. Аналогичным образом можно построить модель управляемого финансового осциллятора УФО (Controlled Financial Oscillator – CFO).

Математическую модель УЭО, соответствующую рис. 1, можно представить в виде [35,36]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления,  $\gamma = \Omega_H/\Omega$ ,  $\Omega_H$  – начальная частотная расстройка колебаний,  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра в операторной форме,  $F(\varphi)$  – нормированная характеристика фазового дискриминатора. Для определенности примем нелинейную характеристику PD синусоидальной и рассмотрим модель (1) для случая инерционной цепи управления.

Учтем наличие в цепи управления инерционности  $K(p) = 1/(1 + a_1p + a_2p^2)$ . После введения безразмерного времени и параметров  $\tau = \Omega t$ ,  $\varepsilon = \Omega a_1$ ,  $\mu = \Omega^2 a_2$  из (1) получаем систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi - y - \varepsilon z. \end{aligned} \quad (2)$$

Анализ системы (2) в трехмерном цилиндрическом фазовом пространстве дан в [37–39]. При некоторых значениях параметров устойчивое состояние равновесия  $O_1$  ( $\varphi^* = \arcsin \gamma$ ,  $y^* = 0$ ,  $z^* = 0$ ) теряет устойчивость через бифуркацию Андронова–Хопфа и рождается устойчивый предельный цикл. На рис. 2 представлена проекция этого цикла на плоскость  $(\varphi, y)$ . Выходное колебание УЭО представляет собой колебание с периодической модуляцией частоты. При этом средняя разность частот опорного и выходного колебаний равна нулю.

Полученный предельный цикл при изменении параметров проходит через серию бифуркаций удвоения периода, в результате чего возникает хаотический аттрактор вокруг состояния

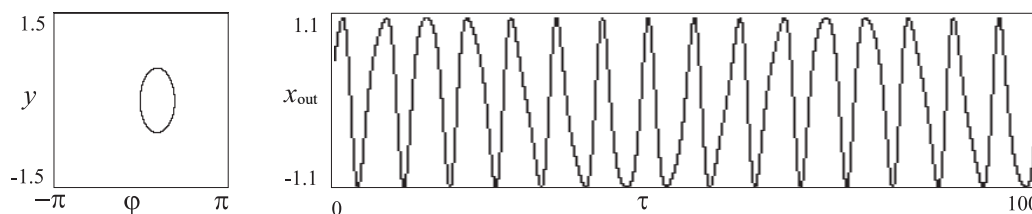


Рис. 2. Проекция предельного цикла модели (2) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1.3$  и выходные колебания УЭО

Fig. 2. Limit cycle projection of the model (2) at  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1.3$  and output oscillation of Controlled Economic Oscillator

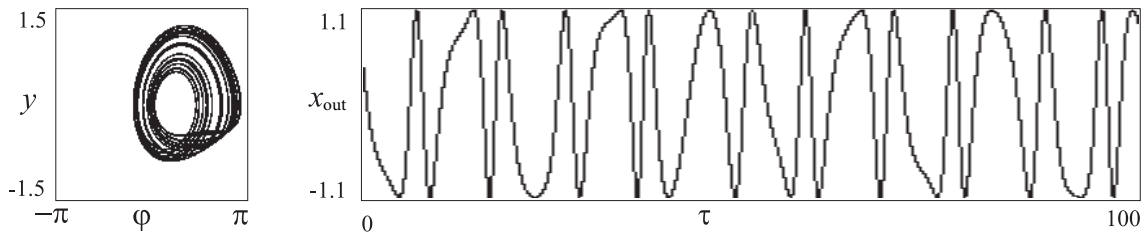


Рис. 3. Проекция хаотического аттрактора модели (2) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 2.25$  и выходные колебания УЭО  
 Fig. 3. Chaotic attractor projection of the model (2) at  $\gamma = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 2.25$  and output oscillation of Controlled Economic Oscillator

равновесия  $O_1$ . Проекция аттрактора на плоскость  $(\varphi, y)$  дана на рис. 3. Выходное колебание УЭО является хаотическим. Отметим, что другие фазовые портреты и разбиение пространства параметров системы (2) здесь не приведены.

Таким образом, модель УЭО, построенная на основе аналогии с автоматической системой фазовой синхронизации, позволяет при изменении параметров получить на выходе УЭО различные колебания. Модель (2) интересна для моделирования процессов генерации экономических и финансовых циклов, поскольку на выходе здесь можно получить не только колебания с периодически изменяющейся частотой, но и хаотические колебания. Следовательно модель (2) можно взять за основу как для построения УЭО – управляемого экономического осциллятора, так и для построения УФО – управляемого финансового осциллятора. Перейдем далее к задаче о синхронизации колебаний УЭО и УФО.

### 5. Моделирование динамики процессов синхронизации экономических и финансовых циклов

Рассмотрим модель взаимодействия построенных экономического (УЭО, CEO) и финансового (УФО, CFO) осцилляторов, представленную на рис. 4. Здесь выходные колебания CEO и CFO подаются для сравнения на дискриминатор D (фазовый PD или частотный FD).

Сигнал с выхода D поступает в цепь управления CFO (с коэффициентом  $\kappa_2$ ), и в цепь управления CEO (с коэффициентом  $\kappa_1$ ). При  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  или  $\kappa_1 \neq 0$ ,  $\kappa_2 = 0$  имеют место

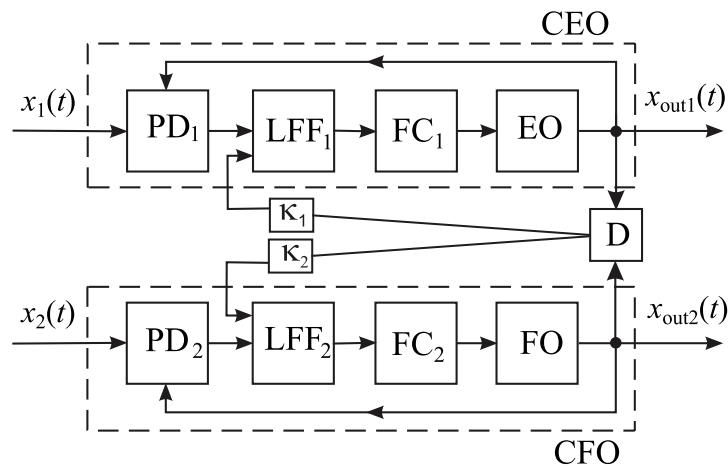


Рис. 4. Схема взаимодействия УЭО и УФО  
 Fig. 4. Interaction scheme of Controlled Economic Oscillator (CEO) and Controlled Financial Oscillator (CFO)

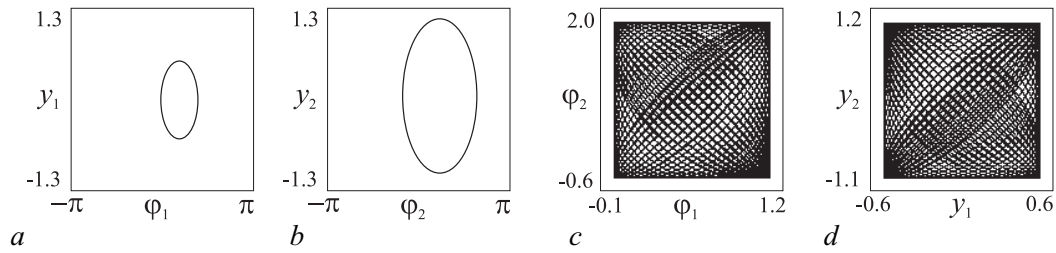


Рис. 5. Проекция предельного цикла модели (3) в отсутствие связей

Fig. 5. Projections of limit cycle of the model (3) without couplings

однаправленные связи, а при  $\kappa_1 \kappa_2 \neq 0$  – взаимные. Если каждый осциллятор описывается уравнениями (2), то модель связанных взаимодействующих УЭО и УФО будет записываться в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\
 \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \kappa_1 \Phi(y_1 - y_2), \\
 \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\
 \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin \varphi_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \kappa_2 \Phi(y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь дискриминатор является частотным и его нелинейность будем аппроксимировать функцией  $\Phi(y) = 2\alpha y / (1 + \alpha^2 y^2)$ , а в линейном приближении можно принять  $\Phi(y) = \alpha y$ . Если дискриминатор является фазовым, то в (3) необходимо вместо  $\Phi(y_1 - y_2)$  записать  $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Приведем результаты численных экспериментов. Вначале рассмотрим случай, когда в модели (3) выбраны параметры УЭО и УФО, обеспечивающие генерацию колебаний с периодической угловой модуляцией. Эти параметры УЭО и УФО выбираются близкими, но разными, чтобы колебания также несколько различались. На рис. 5 представлены проекции аттрактора (предельного цикла) системы (3) в отсутствие связей между осцилляторами.

Из рис. 5, а, b видно, что происходит генерация колебаний с угловой периодической модуляцией, а из рис. 5, c, d следует, что эти колебания не синхронизованы. На рис. 6 представлены проекции аттрактора (предельного цикла) системы (3) при наличии однонаправленной и взаимных связей через фазовый дискриминатор, через линейный и нелинейный частотные дискриминаторы. Из приведенных результатов следует, что колебания УЭО и УФО с регулярной модуляцией могут быть синхронизованы как однонаправленной, так и взаимными связями, как через фазовый дискриминатор, PD, так и через частотный, FD<sup>1</sup>. При этом результат синхронизации через FD лучше синхронизации через PD, а линейный и нелинейный FD дают при выбранных параметрах практически одинаковый результат.

Теперь рассмотрим такие параметры системы (3), которые обеспечивают генерацию на выходе УЭО и УФО хаотических колебаний, причем, как и в предыдущем случае параметры УЭО и УФО несколько различаются, хотя и близки. На рис. 7 представлены проекции хаотических

<sup>1</sup>Интервал существования режима синхронизации при однонаправленной связи через PD крайне мал:  $0.150263 < \kappa_1 < 0.202722$ , левая граница – бифуркация двукратного предельного цикла (+1), правая – бифуркация удвоения периода предельного цикла (-1); через линейный FD левая граница – бифуркация Неймарка–Сакера ( $\kappa_1 = 0.02006$ ), правая не установлена, но заведомо  $\kappa_1 > 2$ ; через нелинейный FD левая граница – бифуркация двукратного предельного цикла ( $\kappa_1 = 0.0985$ ), правая не установлена, но заведомо  $\kappa_1 > 2$ .



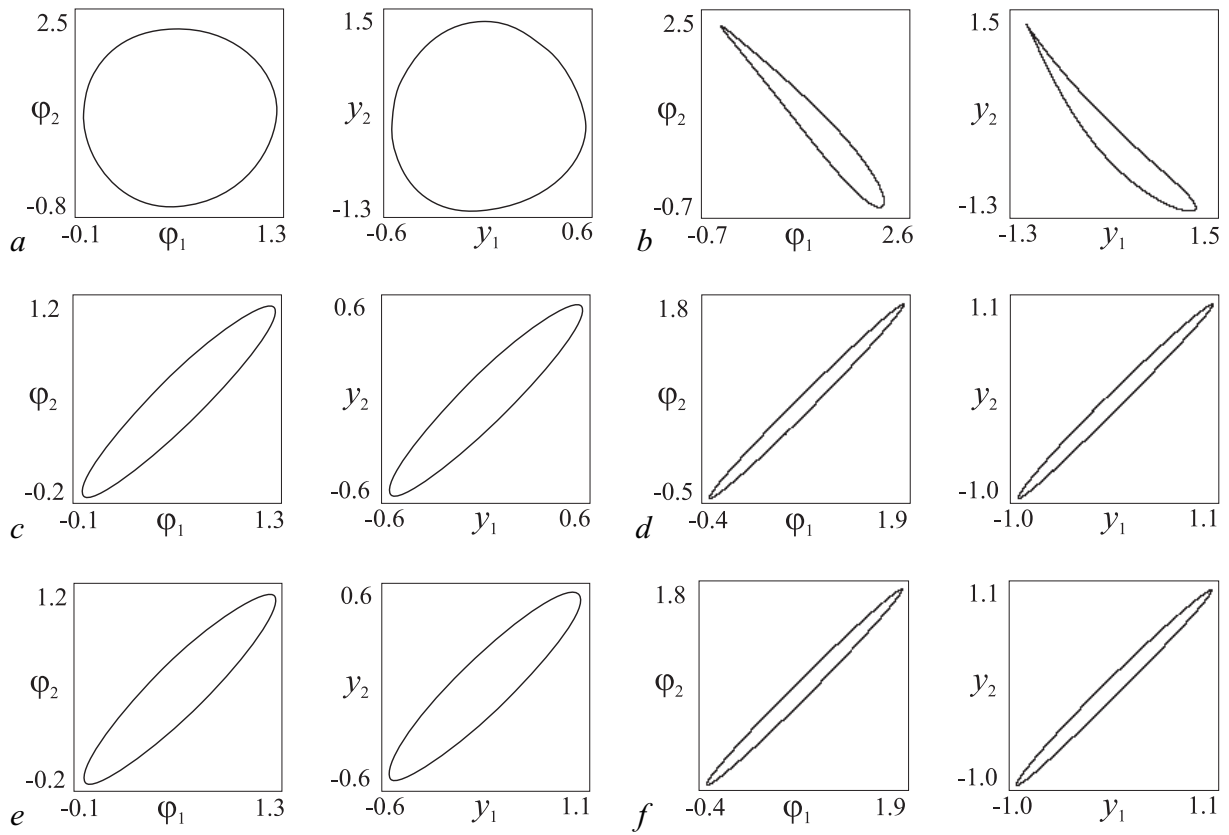


Рис. 6. Проекция предельного цикла модели (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1=0, \kappa_2 = 0.16$  (a, c, e) и взаимных связях  $\kappa_1 = 0.32, \kappa_2 = 0.16$  (b, d, f) через PD – первый ряд (a, b), через линейный FD – второй ряд (c, d), через нелинейный FD – третий ряд (e, f), где  $\alpha = 2$

Fig. 6. Limit cycle projections of the model (3) with unidirectional coupling,  $\kappa_1=0, \kappa_2 = 0.16$  (a, c, e) and with mutual couplings  $\kappa_1 = 0.32, \kappa_2 = 0.16$  (b, d, f). At applied PD (a, b), linear FD (c, d), nonlinear FD (e, f), where  $\alpha = 2$

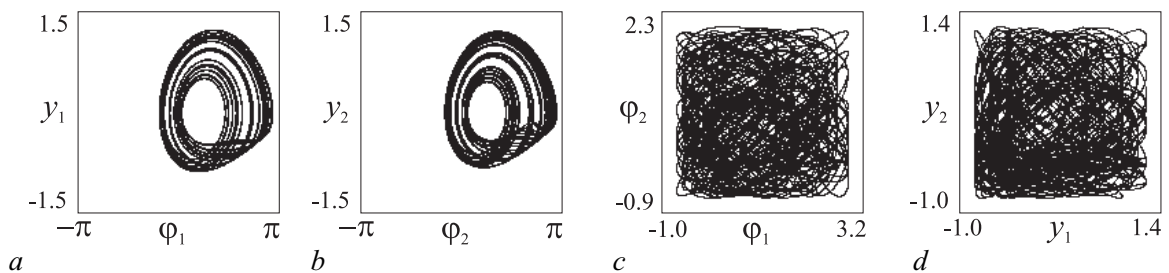


Рис. 7. Проекция хаотического аттрактора модели (3) в отсутствие связей

Fig. 7. Chaotic attractor projections of the model (3) without couplings

аттракторов УЭО (рис. 7, *a*) и УФО (рис. 7, *b*) в отсутствие связи. Проекция на рис. 7, *c*, *d* иллюстрируют, что в этом случае синхронизации колебаний нет.

На рис. 8, *a*, *c*, *e* представлены проекции хаотических аттракторов системы (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  через фазовый дискриминатор (рис. 8, *a*), через линейный (рис. 8, *c*) и нелинейный частотный дискриминатор (рис. 8, *e*). Отметим, что в рассматриваемом случае добиться синхронизации хаотических колебаний с помощью однонаправленной связи через PD не удастся; через линейный FD синхронизация наблюдается начиная с  $\kappa_2 = 0.09$ , дальнейшее увеличение силы связи влечет повышение точности синхронизации – проекции на рис. 8, *c* вытягиваются в тонкую линию; в случае нелинейного FD синхронизация наступает при  $\kappa_2 = 0.2$ , дальнейшее увеличение силы связи приводит к повышению точности синхронизации.

На рис. 8, *b*, *d*, *f* представлены проекции хаотических аттракторов при взаимной связи  $\kappa_1 = 0.32$ ,  $\kappa_2 = 0.16$  через фазовый дискриминатор (рис. 8, *b*), через линейный (рис. 8, *d*) и нелинейный (рис. 8, *f*) частотные дискриминаторы. В процессе численных экспериментов добиться синхронизации рассматриваемых хаотических колебаний УЭО и УФО с помощью взаимных связей через PD не удалось. Введение обратной связи в случае частотного дискриминатора повышает точность синхронизации и расширяет область существования режима синхронизации хаотических колебаний, так при  $\kappa_2 = 0.32$  граница существования режима хаотической синхронизации смещается в область малых  $\kappa_1$  вплоть до  $\kappa_1 = 0$ , причем как при линейном, так и нелинейном FD.

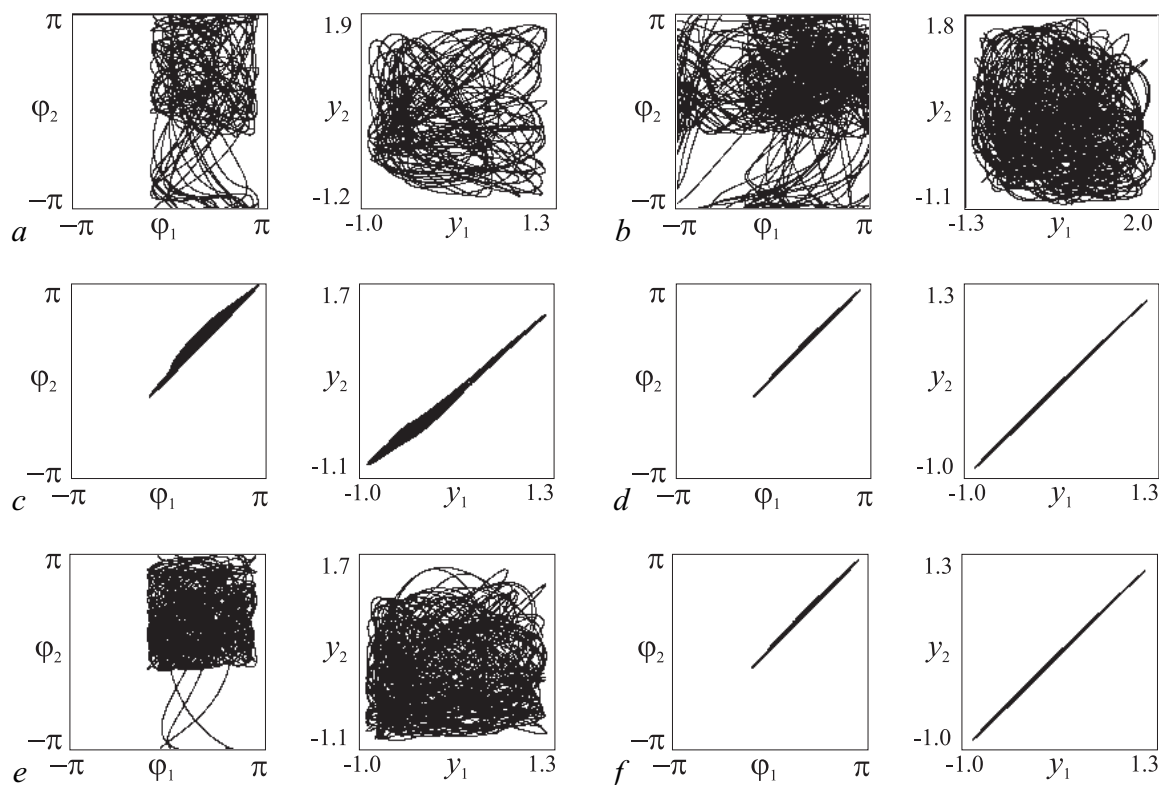


Рис. 8. Проекция хаотического аттрактора модели (3) при однонаправленной связи  $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*a*, *c*, *e*) и взаимных связях  $\kappa_1=0.32$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*b*, *d*, *f*) через PD – первый ряд (*a*, *b*), через линейный FD – второй ряд (*c*, *d*), через нелинейный FD – третий ряд (*e*, *f*), где  $\alpha = 8$

Fig. 8. Chaotic attractor projection of the model (3) with unidirectional coupling,  $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*a*, *c*, *e*) and with mutual couplings  $\kappa_1=0.32$ ,  $\kappa_2=0.16$  (*b*, *d*, *f*). At applied PD (*a*, *b*), linear FD (*c*, *d*), nonlinear FD (*e*, *f*), where  $\alpha = 8$

## 6. Обсуждение

Предложенная выше модель (3) финансовых и экономических осцилляторов основана на использовании аналогий с системой автоматической фазовой синхронизации. Проведенные численные эксперименты демонстрируют возможность использования предложенной модели для изучения процессов генерации сложных хаотических колебаний, моделирующих реальные экономические и финансовые циклы, а также позволяет наблюдать процессы синхронизации таких колебаний при введении однонаправленных или взаимных связей.

Однако рассмотренная модель обладает существенным ограничением. Моделируемые колебания в качестве переменных используют частоту и фазу, в то время как величина осциллирующей переменной, описывающей экономический или финансовый цикл, а также изменения амплитуды циклов, не учитываются в модели. В результате этого, рассматриваемые модельные колебания ограничиваются классом колебаний с постоянной амплитудой. Для решения задачи о синхронизации это ограничение не существенно, однако в задаче о генерации циклов оно представляется достаточно важным, поскольку для реальных циклов характерно непостоянство амплитуды [15]. В связи с этим обстоятельством, предметом дальнейшего исследования становится построение модифицированного варианта модели генерации экономических и финансовых циклов, как и прежде, использующего идеи теории автоматического управления, но свободного от указанного выше ограничения.

## 7. Модифицированная модель экономического осциллятора

Для построения модели экономического осциллятора воспользуемся аналогией с автоматической системой частотно-управляемого генератора. Будем рассматривать простую модель генерации бизнес-цикла, описывающую колебательное поведение только одной переменной, характеризующей экономическую активность – композитного индекса бизнес-цикла.

На рис. 9 представлена схема функционирования модели экономического осциллятора как системы автоматического управления. Аналогично [36, 40] примем в качестве объекта управления гипотетический экономический осциллятор ЕО, вырабатывающий текущую оценку величины композитного индекса бизнес-цикла  $I_{ebc}(t)$  на выходе системы. Реальный сектор экономики определяет величину реального композитного индекса бизнес-цикла  $I_{rbc}(t)$ , поступающего на вход системы (Положим ее постоянной на интересующих нас масштабах времени). Дискриминатор D является сравнивающим элементом, где происходит сравнение  $I_{ebc}(t)$  и  $I_{rbc}(t)$ . Выходной сигнал дискриминатора  $U_D$  проходит через фильтр F, убирающий высокочастотные шумовые компоненты. С выхода фильтра сигнал  $U_F$  поступает на управитель C, изменяющий оценку  $I_{ebc}(t)$  на  $\Delta I$  в сторону сближения с  $I_{rbc}(t)$ .

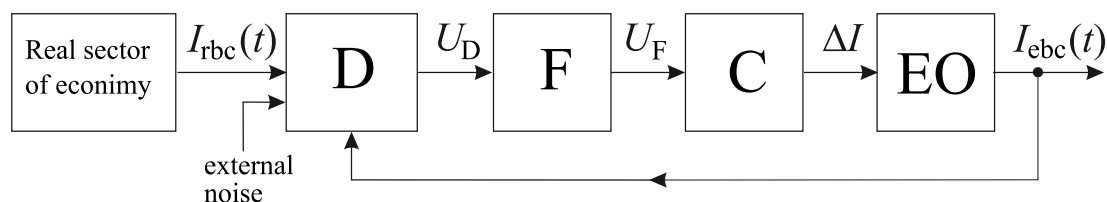


Рис. 9. Схема функционирования модели экономического осциллятора как системы автоматического управления (УЭО)

Fig. 9. Model of Controlled Economic Oscillator (CEO) as a system of automatic control: discriminator (D), filter (F), control element C, economic oscillator (EO)

Напишем уравнения для каждого элемента схемы рис. 9. Уравнение для ЕО можно записать в виде:

$$I_{\text{ebc}} = I_{\text{ebc}}^H + \Delta I, \quad (4)$$

где  $I_{\text{ebc}}^H$  – начальная оценка величины композитного индекса бизнес-цикла,  $\Delta I$  – изменение в оценке величины композитного бизнес-цикла под действием управителя С. Если считать управитель С линейным и безинерционным элементом, то его уравнение можно записать в виде:

$$\Delta I = -SU_F, \quad (5)$$

где  $S$  – крутизна характеристики управителя, минус означает смещение  $I_{\text{ebc}}$  в сторону сближения с  $I_{\text{rbc}}$ .

Уравнение для колебаний на выходе фильтра имеет вид:

$$U_F = K(p)U_D, \quad (6)$$

где  $K(p)$  – передаточная функция фильтра,  $p = d/dt$ . Уравнение для сигнала с дискриминатора D можно записать в виде:

$$U_D = E\Phi(I_{\text{ebc}}(t) - I_{\text{rbc}}(t)), \quad (7)$$

где  $E$  – максимальная величина сигнала на выходе дискриминатора D,  $\Phi(I_{\text{ebc}} - I_{\text{rbc}})$  – нелинейность дискриминатора, нормированная к единице. Введем обозначение для текущего отклонения оценки композитного индекса от реального композитного индекса бизнес-цикла  $I(t) = I_{\text{ebc}}(t) - I_{\text{rbc}}(t)$ .

Предположим, что нелинейность дискриминатора имеет вид, представленный на рис. 10. Возрастающий участок нелинейной характеристики можно интерпретировать как очевидный рост выходного сигнала дискриминатора с ростом отклонения  $I(t)$ . Что касается падающего участка, то его можно интерпретировать как выражение недоверия к экстремально большим отклонениям  $I$ .

Введем параметр  $\Delta I_{\text{max}} = SE$ , как максимальное изменение в оценке композитного индекса бизнес-цикла под действием управителя С, безразмерное текущее отклонение оценки композитного индекса бизнес-цикла от реального композитного индекса  $x = I/\Delta I_{\text{max}}$ , безразмерное начальное отклонение оценки композитного индекса от реального композитного индекса бизнес-цикла  $\gamma = [I_{\text{ebc}}^H - I_{\text{rbc}}] / \Delta I_{\text{max}}$ . С учетом принятых обозначений из уравнений (4)–(7)

получаем операторное уравнение, описывающее динамику рассматриваемой модели экономического осциллятора:

$$x + K(p)\Phi(x) = \gamma. \quad (8)$$

Здесь начальные условия при  $t = 0$  не произвольные, а задаются как  $x(0) = \gamma$ . Уравнение (8) хорошо известно в теории синхронизации как описывающее нелинейную динамику системы автоматической синхронизации частотно-управляемого генератора [36, 41].

Аналогичным образом можно записать математическую модель динамики гипотетического финансового осциллятора, где в качестве переменной будет использоваться композитный индекс финансового цикла. Надо отметить, что параметры реальных бизнес-цикла и

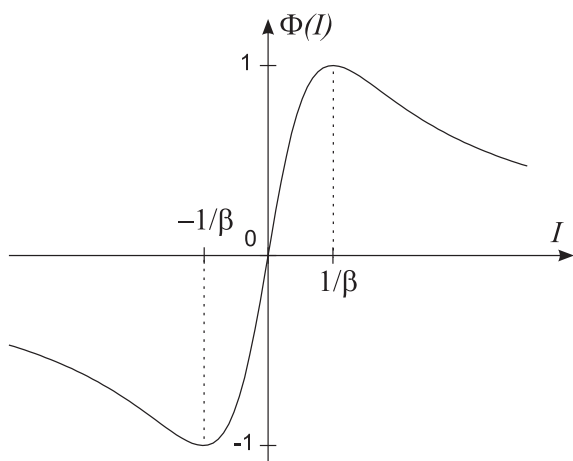


Рис. 10. Нелинейная характеристика дискриминатора  
Fig. 10. Nonlinear characteristic of the discriminator

финансового цикла существенно зависят от экономической политики государства, непосредственных управляющих воздействий правительства, инвестбанков, Центрального банка, и фактически все управляющие воздействия имеют целью, так или иначе, произвести целенаправленную коррекцию параметров циклов – амплитуды, фазы, частоты. Это обстоятельство позволяет сделать предположение, что именно эти участники финансового рынка и реального сектора экономики осуществляют функции элементов цепи управления в предложенной схеме рис. 9 – гипотетических сравнивающего элемента, управителя, фильтра.

## 8. Нелинейная динамика модели экономического осциллятора

Будем считать, что цепь управления в схеме рис. 9 является инерционной. Инерционность цепи управления можно записать в виде

$$K(p) = \frac{1}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}. \quad (9)$$

Вводя безразмерное время  $\tau = t/a_1$  и безразмерные параметры  $\varepsilon = a_2/a_1^2$ ,  $\mu = a_3/a_1^3$ , запишем уравнение (8) в виде динамической системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - x - y - \varepsilon z - \Phi(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Нелинейность дискриминатора зададим в виде:

$$\Phi(x) = \frac{2\beta x}{1 + \beta^2 x^2}. \quad (11)$$

Состояния равновесия системы (10) определяются уравнениями:

$$y = 0, \quad z = 0, \quad \gamma - x = \Phi(x). \quad (12)$$

Графическое решение уравнений (12) качественно иллюстрирует рис. 11. На плоскости параметров  $(\beta, \gamma)$  выделена область  $D$ , где существуют три состояния равновесия  $O_1, O_2, O_3$ . Вне области  $D$  существует одно состояние равновесия  $O_1$  ( $O_3$ ) [36, 41].

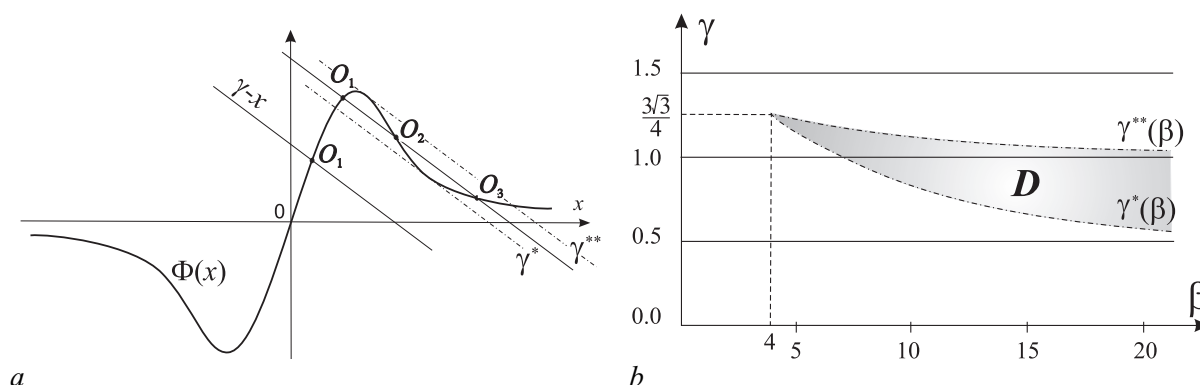


Рис. 11. Графическое решение уравнения (12) и параметрический портрет

Fig. 11. Graphic solution of equation (12) and parameter plane

Выберем значения параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в области  $D$ , например,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 1$  и проведем численный анализ поведения фазовых траекторий системы (10) в фазовом пространстве  $(x, y, z)$ . На рис. 12 представлены полученные при  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\mu = 2$  проекция хаотического аттрактора модели (10) вокруг состояния равновесия  $O_3$ , и осциллограмма выходного колебания  $x(\tau)$ .

Можно рассмотреть и другую возможность получения хаотических колебаний на выходе модельного экономического осциллятора (10). Рассмотрим случай инвертирования [42] нелинейности  $\Phi(x)$ . Для этого заменим в (10) нелинейность  $\Phi(x)$  на нелинейность  $-\Phi(x)$ . В этом случае в системе (10), как и ранее, возможно существование трех состояний равновесия  $\bar{O}_1$ ,  $\bar{O}_2$ ,  $\bar{O}_3$  (рис. 13). Численные эксперименты, проведенные при  $\gamma = 0.09$ ,  $\beta = -10$ ,  $\varepsilon = 0.85$ ,  $\mu = 0.65$  показали существование хаотического аттрактора, охватывающего все три состояния равновесия. На рис. 14 дана проекция полученного хаотического аттрактора на плоскость  $(x, y)$  и осциллограмма выходного колебания  $x(\tau)$ .

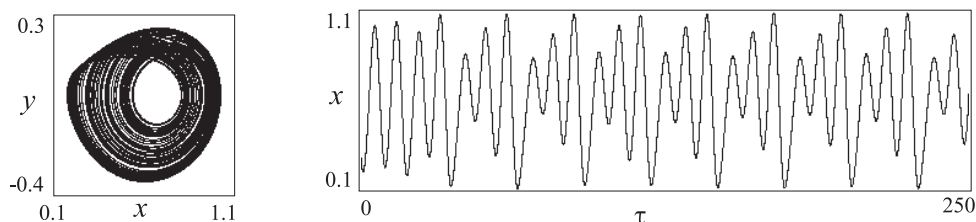


Рис. 12. Проекция хаотических аттракторов модели (10), осциллограмма колебаний  $x(\tau)$

Fig. 12. Chaotic attractor projection of the model (10) and time series  $x(\tau)$

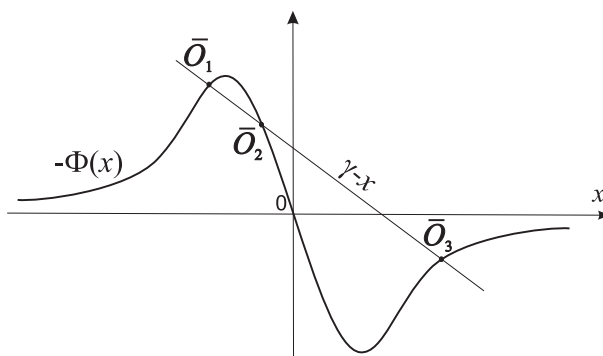


Рис. 13. Графическое решение уравнения (12) при инвертированной нелинейности дискриминатора

Fig. 13. Graphic solution of the equation (12) with inverse nonlinearity of discriminator

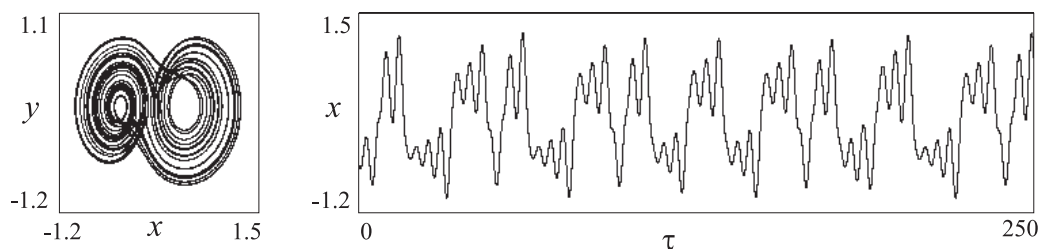


Рис. 14. Проекция хаотического аттрактора системы (10) с инвертированной характеристикой дискриминатора, осциллограмма колебаний  $x(\tau)$

Fig. 14. Chaotic attractor projection of the model (10) with inverse nonlinearity of discriminator, oscillation  $x(\tau)$

Сравнение полученных выходных колебаний в модели экономического осциллятора (рис. 12, рис. 14) с примерами [15] реальных осциллограмм колебаний композитных индексов бизнес-циклов и финансовых циклов позволяет сделать достаточно оптимистичный вывод о качественном соответствии модельных и реальных колебаний.

### 9. Синхронизация хаотических колебаний

Схема синхронизации хаотических колебаний УЭО и УФО аналогична схеме на рис. 4, где выходные колебания УЭО и УФО сравниваются на дискриминаторе D, в результате чего на выходе дискриминатора формируется управляющее воздействие, пропорциональное разности сравниваемых состояний осцилляторов. Далее управляющее воздействие подается в цепи управления УЭО и УФО с коэффициентами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  соответственно. Модель взаимодействующих таким образом хаотических УЭО и УФО, представляется следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_1 \Phi_3(\xi_3), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_2(x_2) - \kappa_2 \Phi_3(-\xi_3). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\Phi_i(\xi) = 2\beta_i\xi/(1 + \beta_i^2\xi^2)$ , а нелинейную функцию связи  $\Phi_3(\xi_3)$  в линейном приближении можно принять  $\Phi_3(\xi_3) = \beta_3\xi_3$ , где  $\xi_3 = x_1 - x_2$  или  $\xi_3 = y_1 - y_2$ .

Рассмотрим случай, когда в модели (13) выбраны параметры УЭО и УФО, обеспечивающие генерацию хаотических колебаний, при этом значения параметров УЭО и УФО выбираются близкими, но разными, чтобы колебания несколько отличались. На рис. 15 представлены проекции хаотического аттрактора системы (13) в отсутствие связей между осцилляторами. Из рис. 15, a, b видно, что колебания хаотические, а из рис. 15, c, d следует, что эти колебания не синхронизованы.

Теперь рассмотрим влияние связей на структуру аттракторов. Численные эксперименты с моделью (13) в случае, когда  $\xi_3 = x_1 - x_2$ , показали, что при таком способе управления (управляющее воздействие формируется по рассогласованию переменных  $x$ ) добиться синхронизации

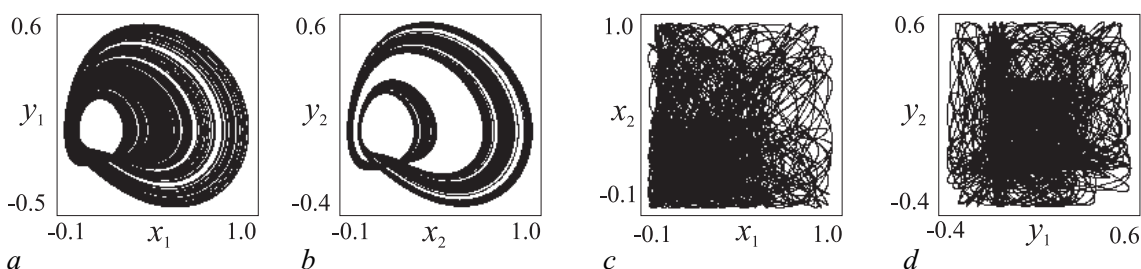


Рис. 15. Проекция хаотического аттрактора модели (13) при  $\gamma_1 = 1.035$ ,  $\varepsilon_1 = 0.78$ ,  $\mu_1=0.89$ ,  $\beta_1=6$ ,  $\gamma_2=1.03$ ,  $\varepsilon_2=0.8$ ,  $\mu_2=0.88$ ,  $\beta_2 = 6$  в отсутствие связей  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Fig. 15. Chaotic attractor projections of the model (13) at  $\gamma_1 = 1.035$ ,  $\varepsilon_1 = 0.78$ ,  $\mu_1=0.89$ ,  $\beta_1=6$ ,  $\gamma_2=1.03$ ,  $\varepsilon_2=0.8$ ,  $\mu_2=0.88$ ,  $\beta_2 = 6$  at couplings absence  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

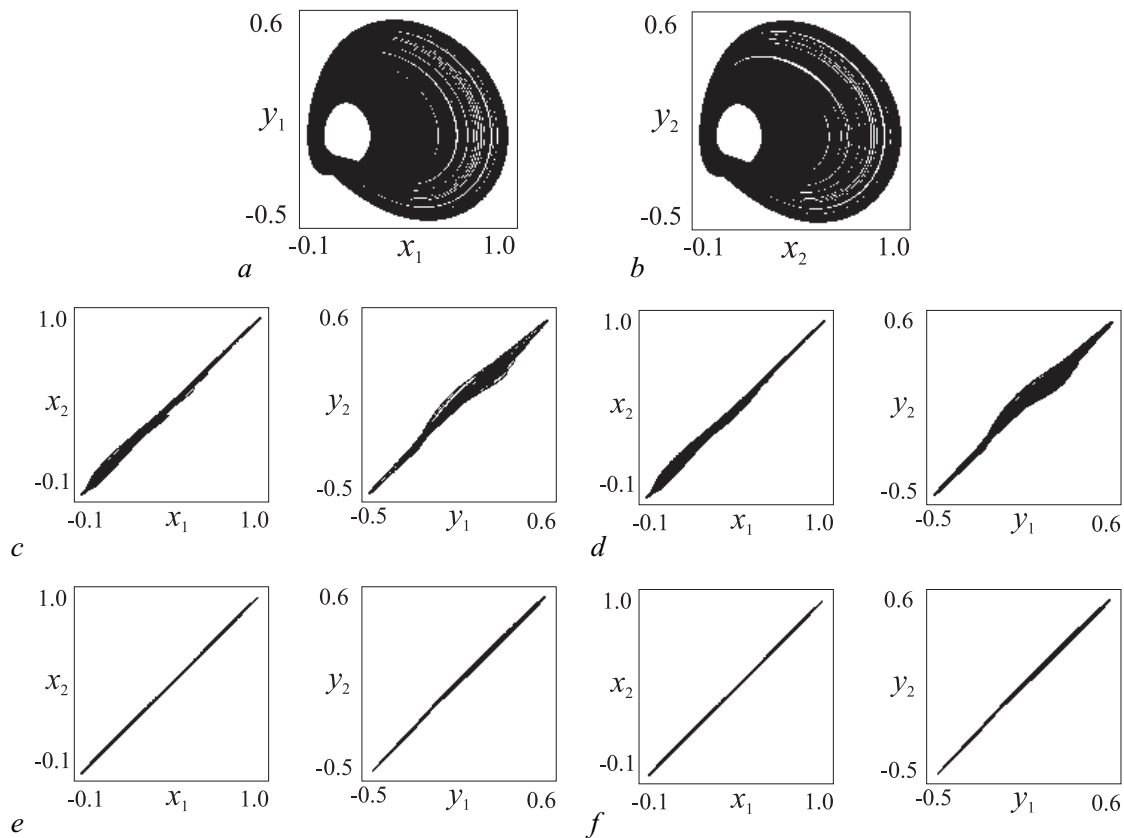


Рис. 16. Проекция хаотического аттрактора модели (13) при наличии связей по переменной  $y$  ( $\xi_3 = y_1 - y_2$ ): однонаправленных (a-d) и взаимных (e, f)

Fig. 16. Chaotic attractor projections of the model (13) with couplings by variable  $y$  ( $\xi_3 = y_1 - y_2$ ): unidirectional (a-d), mutual (e, f)

рассматриваемых колебаний не удастся, более того, при таком способе управления даже небольшой уровень связей (как однонаправленных, так и взаимных, как линейных, так и нелинейных) при  $\beta_3 = 5$  приводит к кризису хаотического аттрактора.

Более оптимистичный результат демонстрирует модель (13), когда управляющее воздействие учитывает скорости изменения переменной  $x$ , то есть  $\xi_3 = y_1 - y_2$ . Результаты численного эксперимента для этого случая приведены на рис. 16. Они свидетельствуют, что этот вид связи качественно не меняет структуру аттрактора – он остается хаотическим и практически не меняется в размерах (рис. 16, a, b). Хаотические колебания на выходе УЭО и УФО могут быть синхронизированы сравнительно небольшой однонаправленной связью ( $\kappa_1=0$ ,  $\kappa_2=0.2$ ,  $\beta_3 = 5$ ), как нелинейной (рис. 16, d), так и линейной (рис. 16, c). Введение взаимных связей  $\kappa_1=0.15$ ,  $\kappa_2=0.2$ ,  $\beta_3 = 5$  повышает точность синхронизации как при нелинейной (рис. 16, f), так и линейной (рис. 16, e) связях. В рассмотренном случае, когда рассогласования параметров УЭО и УФО малы, роль линейных и нелинейных связей практически неразличима. Обе эти связи обеспечивают хорошую синхронизацию выходных колебаний УЭО и УФО.

Перейдем к анализу модели (13) с инвертированными характеристиками  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . На рис. 17 представлены проекции хаотического аттрактора системы (13) в отсутствие связей между осцилляторами. Здесь рассогласование параметров существенно больше, чем в случае неинвертированной характеристики FD. Отметим, что колебания на выходе УЭО и УФО асинхронны. Далее представим результаты моделирования, направленные на синхронизацию колебаний модели (13) в случае инвертированной характеристики.



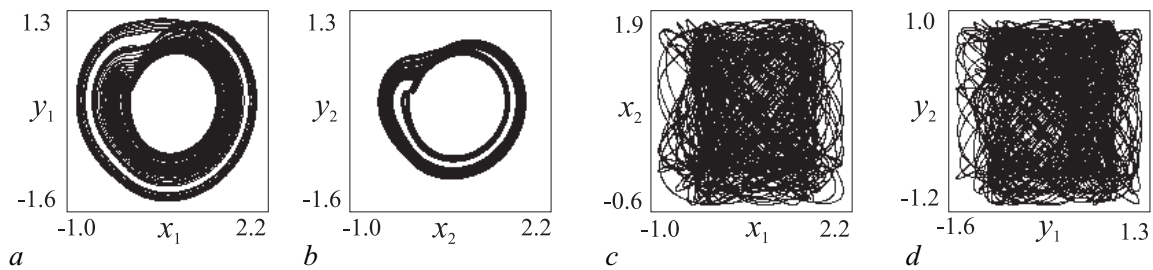


Рис. 17. Проекция хаотического аттрактора модели (13) с инвертированной характеристикой FD при  $\gamma_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 1.0$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.53$ ,  $\varepsilon_2 = 1.05$ ,  $\mu_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -10$  в отсутствие связей  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Fig. 17. Chaotic attractor projections of the model (13) with inverse nonlinearity at  $\gamma_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 1.0$ ,  $\beta_1 = -10$ ,  $\gamma_2 = 0.53$ ,  $\varepsilon_2 = 1.05$ ,  $\mu_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -10$  at couplings absence  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Численный анализ движений модели (13) с инвертированной характеристикой FD в случае  $\xi_3 = x_1 - x_2$  свидетельствует о дестабилизирующем характере связи базирующейся на рассогласованиях переменных  $x$ . Такой вид связи, также как и в случае с инвертированной характеристикой FD, приводит к разрушению хаотических колебаний.

Поведение модели (13) с инвертированной характеристикой FD в случае  $\xi_3 = y_1 - y_2$  иллюстрирует рис. 18. Здесь рис. 18, *a, b* демонстрирует возможность синхронизации колебаний при однонаправленных связях ( $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\beta_3 = 5$ ), а рис. 18, *c, d* при взаимных связях ( $\kappa_1 = 0.85$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\beta_3 = 5$ ). Проекция на рис. 18, *a, c* соответствуют нелинейной связи, а рис. 18, *b, d* – линейной связи. Анализ проекций, представленных на рис. 18, *a, b, c* показывает, что в данном случае при любых связях имеет место достаточно большие ошибки синхронизации. Скорее всего, это связано с тем, что в этом примере изначально были взяты осцилляторы существенно отличавшиеся друг от друга по параметрам. Рис. 18, *d*, отвечающий наличию взаимных линейных связей, свидетельствует о том, что такой вид связи может приводить к регуляризации хаотических колебаний.

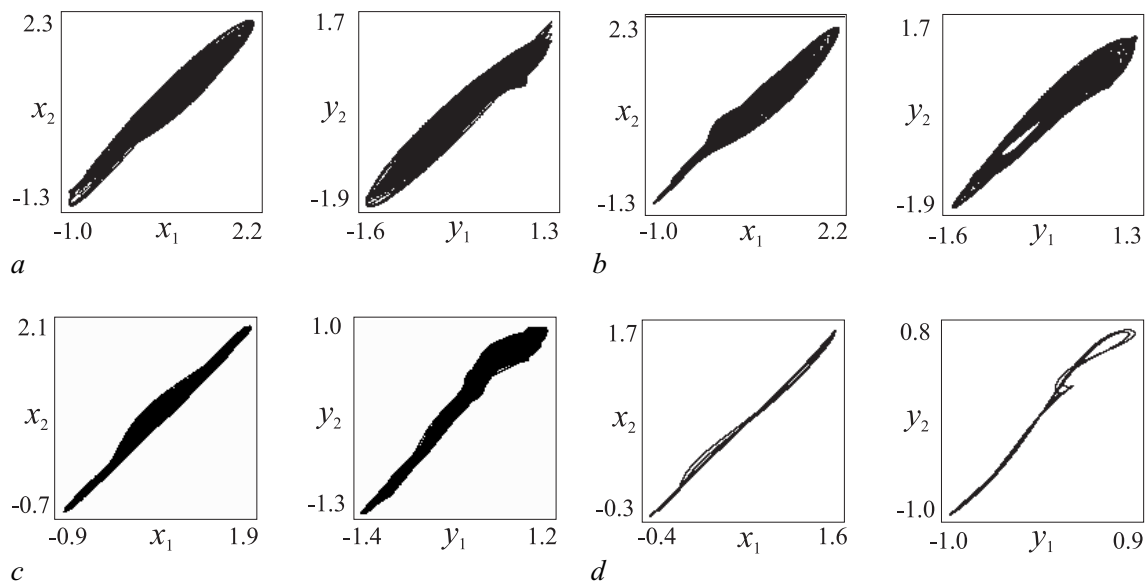


Рис. 18. Проекция хаотического аттрактора модели (13) с инвертированной характеристикой FD при наличии связей: однонаправленных (*a, b*) и взаимных (*c, d*)

Fig. 18. Chaotic attractor projections of the model (13) with inverse nonlinearity: unidirectional couplings (*a, b*), mutual couplings (*c, d*)

## Заключение

Для задач моделирования динамики финансовых и экономических систем, в частности, задач моделирования динамического поведения финансовых и экономических циклов, характерна исключительная сложность, обусловленная естественными трудностями измерения параметров таких моделей, а иногда и принципиальной невозможностью получения количественных оценок параметров. Однако интерес к таким задачам огромен. Хотя такие модели не позволяют получить конкретные оценки параметров реальных экономических и финансовых колебаний, тем не менее они дают возможность понять механизмы генерации циклов, их взаимодействия и синхронизации, а также возможность прогнозирования динамики циклов.

Проведенные исследования моделей динамики экономических и финансовых осцилляторов, построенных с использованием аналогий с автоматической системой частотно-управляемого генератора, показали перспективность таких моделей. Такие модели демонстрируют возможность генерации различных типов сложных хаотических колебаний. Сравнение реальных экономических (финансовых) хаотических колебаний с полученными модельными колебаниями показало достаточно хорошее качественное сходство этих колебаний.

В ходе численных экспериментов установлено, что введение связей между модельными экономическим и финансовым осцилляторами по координате  $x$  не позволяет достичь синхронизации хаотических колебаний осцилляторов даже при связывании достаточно близких по параметрам осцилляторов. Однако, синхронизацию с удовлетворительной точностью удастся достичь при организации связей не по координате  $x$ , а по скорости ее изменения  $y$ . Можно предположить, что это обстоятельство в известной степени объясняет, почему динамика достаточно простых экономических колебаний, хотя и являющихся хаотическими, поддается некоторому прогнозированию, в то время как сложные хаотические колебания практически не поддаются прогнозированию. Действительно, установление режима синхронизации существенно для прогнозирования динамики, однако, как упоминалось выше, для достижения синхронизации сложных хаотических колебаний измерять величины только экономических координат  $x$  недостаточно, важно производить измерения скоростей  $y$  изменения этих координат, что, по-видимому, сделать затруднительно при измерениях параметров экономических и финансовых колебаний в реальном времени.

В целом, приведенные результаты позволяют сделать достаточно оптимистичный вывод о перспективности моделей экономических осцилляторов, основанных на аналогиях с системами автоматического управления, для изучения динамики экономических и финансовых систем, что может стимулировать детальное изучение в дальнейшем динамических свойств предложенных моделей осцилляторов в зависимости от параметров, а также динамики ансамблей таких осцилляторов.

## Список литературы

1. *Мотова М. И., Шалфеев В. Д.* От теории колебаний – к нелинейной динамике // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 1. С. 93–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. *Вайдлих В.* Социодинамика. Системный подход к математическому моделированию в социальных науках. М.: Едиториал УРСС, 2005. 480 с.
3. *Неймарк Ю. И.* Математические модели в естествознании и технике. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2004. 401 с.
4. *Короновский А. А., Трубецков Д. И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГОСУНЦ «Колледж», 2002. 322 с.
5. *Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17–18.

6. *Weinstock L. R.* Introduction to U.S. Economy: The Business Cycle and Growth // CRS In Focus. No. IF 10411. July 31, 2020. Washington, D.C.: Congressional Research Service, 2020.
7. *Drehmann M., Borio C., Tsatsaronis K.* Characterising the financial cycle: don't lose sight of the medium term! // BIS Working Papers. No. 380. Basel: Bank for International Settlements, 2012. 37 p.
8. *Baxter M., King R. G.* Measuring business cycles: Approximate band-pass filter for economic time series // *The Review of Economics and Statistics*. 1999. Vol. 81, no. 4. P. 575–593. DOI: 10.1162/003465399558454.
9. *Creal D., Koopman S. J., Zivot E.* Extracting a robust US business cycle using a time-varying multivariate model-based bandpass filter // *Journal of Applied Econometrics*. 2010. Vol. 25, no. 4. P. 695–719. DOI: 10.1002/jae.1185.
10. *Volos C. K., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N.* Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles // *WSEAS Transaction on Systems*. 2012. Vol. 11, no. 12. P. 681.
11. *Власенко М., Юзефальчик И.* Финансовый рынок и реальный сектор экономики: взаимосвязь и трансмиссия шоков // *Банкаўскі веснік*. 2018. № 12(665). С. 9–17.
12. *Goodwin R. M.* A Growth Cycle. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
13. *Bouali S.* Feedback loop in extended Van der Pol's equation applied to an economic model of cycles // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9, no. 4. P. 745–756. DOI: 10.1142/S0218127499000535.
14. *Guégan D.* Chaos in economics and finance // *Annual Reviews in Control*. 2009. Vol. 33, no. 1. P. 89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
15. *Schüler Y. S., Hiebert P. P., Peltonen T. A.* Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach // *ECB Working Paper Series*. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank, 2015. 54 p.
16. *Schüler Y. S., Hiebert P., Peltonen T.* Coherent financial cycles for G-7 countries: Why extending credit can be asset // *ESRB Working Paper Series*. No. 43. Frankfurt am Main: European Systemic Risk Board, 2017. 42 p. DOI: 10.2849/872841.
17. *Galati G., Hindrayanto I., Koopman S. J., Vlekke M.* Measuring financial cycles with a model-based filter: Empirical evidence for the United States and the euro area // *DNB Working Papers*. No. 495. Amsterdam: Netherlands Central Bank, 2016.
18. *Avouyi-Dovi S., Matheron J.* Interactions between business cycles, financial cycles and monetary policy: stylised facts // *BIS Papers*. No. 22. Basel: Bank for International Settlements, 2005. P. 273–298.
19. *Claessens S., Kose M. A., Terrones M. E.* How do business and financial cycles interact? // *Journal of International Economics*. 2012. Vol. 87, no. 1. P. 178–190. DOI: 10.1016/j.jinteco.2011.11.008.
20. *Oman W.* The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area // *International Journal of Central Banking*. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 327–362.
21. *Harding D., Pagan A.* A comparison of two business cycle dating methods // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003. Vol. 27, no. 9. P. 1681–1690. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00076-3.
22. *Lopes A. M., Machado J. A. T., Huffstot J. S., Mata M. E.* Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization // *PLoS ONE*. 2018. Vol. 13, no. 2. P. e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
23. *Granville B., Hussain S.* Eurozone cycles: An analysis of phase synchronization // *International Journal of Finance and Economics*. 2017. Vol. 22, no. 2. P. 83–114. DOI: 10.1002/ijfe.1576.
24. *Mosekilde E., Larsen E. R., Sterman J. D., Thomsen J. S.* Mode locking and nonlinear entrainment of macroeconomic cycles // In: Day R. H., Chen P. (eds) *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. New York: Oxford University Press, 1993. P. 58–83.

25. *Mosekilde E., Larsen E. R., Sterman J. D., Thomsen J. S.* Nonlinear mode-interaction in the macroeconomy // *Annals of Operations Research*. 1992. Vol. 37, no. 1. P. 185–215. DOI: 10.1007/BF02071056.
26. *Mosekilde E., Thomsen J. S., Sterman J.* Nonlinear Interactions in the Economy // In: Haag G., Mueller U., Troitzsch K. G. (eds) *Economic Evolution and Demographic Change*. Berlin: Springer, 1992. P. 35–61. DOI: 10.1007/978-3-642-48808-5\_2.
27. *Selover D. D., Jensen R. V.* 'Mode-locking' and international business cycle transmission // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1999. Vol. 23, no. 4. P. 591–618. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00036-0.
28. *Süssmuth B.* Modeling the synchronization of sectoral investment cycles on the base of informational externalities // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2003. Vol. 14, no. 3. P. 35–54. DOI: 10.1016/S0954-349X(02)00048-6.
29. *Selover D. D., Jensen R. V., Kroll J.* Mode-locking and regional business cycle synchronization // *Journal of Regional Science*. 2005. Vol. 45, no. 4. P. 703–745. DOI: 10.1111/j.0022-4146.2005.00390.x.
30. *Süssmuth B., Woitek U.* Some new results on industrial sector mode-locking and business cycle formation // *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. 2005. Vol. 9, no. 3. P. 1–33. DOI: 10.2202/1558-3708.1185.
31. *Filer L., Selover D. D.* Why can weak linkages cause international stock market synchronization? The mode-locking effect // *International Journal of Financial Research*. 2014. Vol. 5, no. 3. P. 20–42. DOI: 10.5430/ijfr.v5n3p20.
32. *Zheng S.* Impulsive stabilization and synchronization of uncertain financial hyperchaotic systems // *Kybernetika*. 2016. Vol. 52, no. 2. P. 241–257. DOI: 10.14736/kyb-2016-2-0241.
33. *Zhang W., Cao J., Alsaedi F., Alsaadi F. E. S.* Synchronization of time delayed fractional order chaotic financial system // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2017. Vol. 2017. P. 1230396. DOI: 10.1155/2017/1230396.
34. *Gardini L., Cori L., Guerrini L., Sodini M.* Introduction to the focus issue “nonlinear economic dynamics” // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 5. P. 055801. DOI: 10.1063/1.5039304.
35. *Капранов М. В.* Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: Изд-во МЭИ, 2006. 208 с.
36. *Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2013. 366 с.
37. *Матросов В. В.* Регулярные и хаотические автоколебания фазовой системы // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22, № 23. С. 4–8.
38. *Матросов В. В.* Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // *Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос-II*. 1997. С. 53–64.
39. *Матросов В. В.* Нелинейная динамика системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка // *Известия вузов. Радиофизика*. 2006. Т. 49, № 3. С. 267–278.
40. *McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F.* A dynamical model of decision-making behaviour in a network of consumers with applications to energy choices // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
41. *Пономаренко В. П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // *Известия вузов. ПНД*. 1997. Т. 5, № 5. С. 44–55.
42. *Пономаренко В. П., Заулин И. А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // *Радиотехника и электроника*. 1997. Т. 42, № 7. С. 828–835.

## References

1. Motova MI, Shalfeev VD. From theory of oscillations to nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(1):93–103 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. Weidlich W. *Sociodynamics: A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*. CRC Press; 2000. 392 p.
3. Neimark YI. *Mathematical Models in Natural Science and Technology*. Nizhny Novgorod: Publishing House of Nizhny Novgorod University; 2004. 401 p. (in Russian).
4. Koronovskii AA, Trubetskov DI. *Nonlinear Dynamics in Action. How Ideas of Nonlinear Dynamics Penetrate Ecology, Economics and Social Sciences*. The 2nd edition. Saratov: «College»; 2002. 322 p. (in Russian).
5. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. *Economic Analysis: Theory and Practice*. 2011;10(17–18) (in Russian).
6. Weinstock LR. *Introduction to U.S. Economy: The Business Cycle and Growth*. CRS In Focus. No. IF 10411. July 31, 2020. Washington, D.C.: Congressional Research Service; 2020.
7. Drehmann M, Borio C, Tsatsaronis K. *Characterising the financial cycle: don't lose sight of the medium term!* BIS Working Papers. No. 380. Basel: Bank for International Settlements; 2012. 37 p.
8. Baxter M, King RG. *Measuring business cycles: Approximate band-pass filter for economic time series*. *The Review of Economics and Statistics*. 1999;81(4):575–593. DOI: 10.1162/003465399558454.
9. Creal D, Koopman SJ, Zivot E. *Extracting a robust US business cycle using a time-varying multivariate model-based bandpass filter*. *Journal of Applied Econometrics*. 2010;25(4):695–719. DOI: 10.1002/jae.1185.
10. Volos CK, Kyprianidis IM, Stouboulos IN. *Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles*. *WSEAS Transaction on Systems*. 2012;11(12):681.
11. Ulasenka M, Yuzefalchik I. *Financial market and real sector of the economy: Interrelation and transmission of shocks*. *Banking Bulletin*. 2018;(12(665)):9–17 (in Russian).
12. Goodwin RM. *A Growth Cycle*. Cambridge: Cambridge University Press; 1967.
13. Bouali S. *Feedback loop in extended Van der Pol's equation applied to an economic model of cycles*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1999;9(4):745–756. DOI: 10.1142/S0218127499000535.
14. Guégan D. *Chaos in economics and finance*. *Annual Reviews in Control*. 2009;33(1):89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
15. Schüller YS, Hiebert PP, Peltonen TA. *Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach*. ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank; 2015. 54 p.
16. Schüller YS, Hiebert P, Peltonen T. *Coherent financial cycles for G-7 countries: Why extending credit can be asset*. ESRB Working Paper Series. No. 43. Frankfurt am Main: European Systemic Risk Board; 2017. 42 p. DOI: 10.2849/872841.
17. Galati G, Hindrayanto I, Koopman SJ, Vlekke M. *Measuring financial cycles with a model-based filter: Empirical evidence for the United States and the euro area*. DNB Working Papers. No. 495. Amsterdam: Netherlands Central Bank; 2016.
18. Avouyi-Dovi S, Matheron J. *Interactions between business cycles, financial cycles and monetary policy: stylised facts*. BIS Papers. No. 22. Basel: Bank for International Settlements; 2005. P. 273–298.
19. Claessens S, Kose MA, Terrones ME. *How do business and financial cycles interact?* *Journal of International Economics*. 2012;87(1):178–190. DOI: 10.1016/j.jinteco.2011.11.008.

20. Oman W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area. *International Journal of Central Banking*. 2019;15(1):327–362.
21. Harding D, Pagan A. A comparison of two business cycle dating methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003;27(9):1681–1690. DOI: 10.1016/S0165-1889(02)00076-3.
22. Lopes AM, Machado JAT, Huffstot JS, Mata ME. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization. *PLoS ONE*. 2018;13(2):e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
23. Granville B, Hussain S. Eurozone cycles: An analysis of phase synchronization. *International Journal of Finance and Economics*. 2017;22(2):83–114. DOI: 10.1002/ijfe.1576.
24. Mosekilde E, Larsen ER, Sterman JD, Thomsen JS. Mode locking and nonlinear entrainment of macroeconomic cycles. In: Day RH, Chen P, editors. *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. New York: Oxford University Press; 1993. P. 58–83.
25. Mosekilde E, Larsen ER, Sterman JD, Thomsen JS. Nonlinear mode-interaction in the macroeconomy. *Annals of Operations Research*. 1992;37(1):185–215. DOI: 10.1007/BF02071056.
26. Mosekilde E, Thomsen JS, Sterman J. Nonlinear Interactions in the Economy. In: Haag G, Mueller U, Troitzsch KG, editors. *Economic Evolution and Demographic Change*. Berlin: Springer; 1992. P. 35–61. DOI: 10.1007/978-3-642-48808-5\_2.
27. Selover DD, Jensen RV. 'Mode-locking' and international business cycle transmission. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1999;23(4):591–618. DOI: 10.1016/S0165-1889(98)00036-0.
28. Süßmuth B. Modeling the synchronization of sectoral investment cycles on the base of informational externalities. *Structural Change and Economic Dynamics*. 2003;14(3):35–54. DOI: 10.1016/S0954-349X(02)00048-6.
29. Selover DD, Jensen RV, Kroll J. Mode-locking and regional business cycle synchronization. *Journal of Regional Science*. 2005;45(4):703–745. DOI: 10.1111/j.0022-4146.2005.00390.x.
30. Süßmuth B, Woitek U. Some new results on industrial sector mode-locking and business cycle formation. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. 2005;9(3):1–33. DOI: 10.2202/1558-3708.1185.
31. Filer L, Selover DD. Why can weak linkages cause international stock market synchronization? The mode-locking effect. *International Journal of Financial Research*. 2014;5(3):20–42. DOI: 10.5430/ijfr.v5n3p20.
32. Zheng S. Impulsive stabilization and synchronization of uncertain financial hyperchaotic systems. *Kybernetika*. 2016;52(2):241–257. DOI: 10.14736/kyb-2016-2-0241.
33. Zhang W, Cao J, Alsaedi F, Alsaedi FES. Synchronization of time delayed fractional order chaotic financial system. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2017;2017:1230396. DOI: 10.1155/2017/1230396.
34. Gardini L, Cori L, Guerrini L, Sodini M. Introduction to the focus issue “nonlinear economic dynamics”. *Chaos*. 2018;28(5):055801. DOI: 10.1063/1.5039304.
35. Kapranov MV. *Elements of the Theory of Phase Synchronization Systems*. Moscow: MPEI Publishing House; 2006. 208 p. (in Russian).
36. Shalfeev VD, Matrosov VV. *Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems*. Nizhny Novgorod: Publishing House of Nizhny Novgorod University; 2013. 366 p. (in Russian).
37. Matrosov VV. Regular and chaotic self-oscillations of the phase system. *Tech. Phys. Lett.* 1996;22(23):4–8.
38. Matrosov VV. Regular and chaotic oscillations in the phase system. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Nonlinear Dynamics – Synchronization and Chaos-II*. 1997:53–64.
39. Matrosov VV. Nonlinear dynamics of phase-locked loop with the second-order filter. *Radiophys. Quantum Electron*. 2006;49(3):239–249. DOI: 10.1007/s11141-006-0057-6.
40. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behaviour in a network of consumers with applications to energy choices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.

41. Ponomarenko VP. Modeling the evolution of dynamic modes in an oscillator system with frequency control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1997;5(5):44–55 (in Russian).
42. Ponomarenko VP, Zaulin IA. The dynamics of an oscillator controlled by a frequency-locked loop with an inverted discriminator characteristic. *J. Commun. Technol. Electron*. 1997;42(7):828–835.

*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3146-111X

*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.



603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: shalfeev@rf.unn.ru